Correction du Devoir maison

IC2, 2011 - 2012

Exercice 1

1) Soit $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On a $I_0 = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

- étape de vérification initiale : $I_0 = 1!$ est vraie
- étape de récurrence : on suppose $I_n = n!$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

On doit m.q. $I_{n+1} = (n+1)!$.

On a $I_{n+1} = \int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{n+1} \left(-e^{-x}\right)' dx$

$$\overset{IPP}{=} \left[-x^{n+1} e^{-x}\right]_0^\infty + (n+1) \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

$$= 0 + (n+1) I_n = (n+1) \cdot n! = (n+1)! \quad \text{(OK)}$$

$\hookrightarrow I_n = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) ϕ produit scalaire $\Leftrightarrow$ ϕ forme bilinéaire symétrique positive et définie.

- ϕ bilinéaire : • $\phi(\alpha P_1 + P_2, Q) = \int_0^\infty (\alpha P_1(x) + P_2(x)) Q(x) e^{-x} dx$

$$= \alpha \int_0^\infty P_1(x) Q(x) e^{-x} dx + \int P_2(x) Q(x) e^{-x} dx = \alpha \phi(P_1, Q) + \phi(P_2, Q)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$.

• $\phi(P, \alpha Q_1 + Q_2) = \alpha \phi(P, Q_1) + \phi(P, Q_2)$ de la même façon

- ϕ symétrique : $\phi(P,Q) = \phi(Q,P)$ car la multiplication est commutative

$$\int_0^\infty P(x) Q(x) e^{-x} dx = \int_0^\infty Q(x) P(x) e^{-x} dx$$

- ϕ positive : $\phi(P,P) = \int_0^\infty \underbrace{P^2(x)}_{\geqslant 0} \underbrace{e^{-x}}_{\geqslant 0} dx \geqslant 0$, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$

- ϕ définie : $\phi(P,P) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \underbrace{P^2(x) e^{-x}}_{\geqslant 0} dx = 0 \Rightarrow P^2(x) e^{-x} = 0, \forall x$

$\Rightarrow P(x) = 0, \forall x$

$\Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\hookrightarrow$ ϕ produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

$\Rightarrow \phi_{|\mathbb{R}_2[X]}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

4) $A = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique, car ϕ est symétrique

$$\left.\begin{array}{l}
\phi(1,1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = I_0 = 1 \\
\phi(1,X) = \phi(X,1) = \int_0^\infty x e^{-x}\,dx = I_1 = 1! = 1 \\
\phi(1,X^2) = \phi(X^2,1) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = I_2 = 2! = 2 \\
\phi(X,X) = \int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx = I_2 = 2 \\
\phi(X,X^2) = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = I_3 = 3! = 6 = \phi(X^2,X)
\end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

$\phi(X^2,X^2) = \int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx = I_4 = 4! = 24$

5) si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $Q(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$

$$\Rightarrow \phi(P,Q) = [a_0, a_1, a_2] \cdot A \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$= a_0b_0 + a_0b_1 + 2a_0b_2 + a_1b_0 + 2a_1b_1 + 6a_1b_2 + 2a_2b_0 + 6a_2b_1 + 24a_2b_2.$$

La forme quadratique associée à ϕ :

$$q(P) = \phi(P,P) = [a_0, a_1, a_2]\, A \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_0^2 + 2a_1^2 + 24a_2^2 + 2a_0a_1 + 4a_0a_2 + 12a_1a_2.$$

6) $\mathcal{B} = \{1-X^2, X, X^2\}$

a) M.q. $\mathcal{B}$ libre : $\alpha(1-X^2) + \beta X + \gamma X^2 = 0 \Rightarrow \alpha + \beta X + (\gamma-\alpha)X^2 = 0$

$\{1, X, X^2\}$ base $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma - \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ libre

$\mathcal{B}$ libre et de taille $3 = \dim \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow \mathcal{B}$ est une base.

b) $A' = \begin{pmatrix} \phi(1-X^2, 1-X^2) & \phi(1-X^2, X) & \phi(1-X^2, X^2) \\ \phi(X, 1-X^2) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2, 1-X^2) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$

La matrice de passage entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1-X^2 & X & X^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

• $\phi(1-X^2, 1-X^2) = \int_0^\infty (1-x^2)^2 e^{-x} dx = \int_0^\infty (1-2x^2+x^4) e^{-x} dx =$

$= I_0 - 2I_2 + I_4 = 1-4+24 = 21.$

Une autre façon de calculer :

$$\phi(1-X^2, 1-X^2) \underset{\text{bilinéarité}}{=} \phi(1,1) - \phi(1,X^2) - \phi(X^2,1) + \phi(X^2,X^2) = 1-4+24 = 21$$

• $\phi(1-X^2, X) = \phi(1,X) - \phi(X^2,X) = 1 - 6 = -5$

• $\phi(1-X^2, X^2) = \phi(1,X^2) - \phi(X^2,X^2) = 2 - 24 = -22.$

$$\hookrightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 21 & -5 & -22 \\ -5 & 2 & 6 \\ -22 & 6 & 24 \end{pmatrix}$$

c) On a $A' = P^T A P$, où $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$

$$P^T A P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 & -5 & -22 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -5 & -22 \\ -5 & 2 & 6 \\ -22 & 6 & 24 \end{pmatrix} = A'$$

7) $\mathcal{E}$ n'est pas une base orthogonale pour le produit scalaire ϕ car A n'est pas diagonale : $\phi(1,X) = 1 \neq 0$.

$\mathcal{B}$ n'est pas orthogonale pour ϕ, non plus car A' n'est pas diagonale : $\phi(1,X) = -1 \neq 0$.

[$\mathcal{E}$ orthonormée $\iff$ $A = I_3$]

Dans notre cas $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ ne sont pas orthonormées, car elles ne sont mêmes pas orthogonales.

---

8) $F = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \ : \ P(0) = 0 \}$

Si $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, $P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow P(X) = a_1 X + a_2 X^2$

$\Rightarrow F = \{ a_1 X + a_2 X^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}(X, X^2).$

$\hookrightarrow$ F sous-espace vect. de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\{X, X^2\}$ libre $\Rightarrow$ base de F

b)
$$F^\perp = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] : \phi(P,Q) = 0, \; \forall Q \in F \}$$
$$= \{ P \in \mathbb{R}_2[X] : \phi(P,X) = 0, \; \phi(P,X^2) = 0 \}$$

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. car $\{X, X^2\}$ base de F.

- $\phi(P,X) = 0 \Leftrightarrow \phi(a_0 + a_1 X + a_2 X^2, X) = 0$
$$\Leftrightarrow a_0 \phi(1,X) + a_1 \phi(X,X) + a_2 \phi(X^2,X) = 0$$
$$\Leftrightarrow \underline{a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 0}.$$
- $\phi(P,X^2) = 0 \Leftrightarrow a_0\phi(1,X^2) + a_1 \phi(X,X^2) + a_2 \phi(X^2,X^2) = 0$
$$\Leftrightarrow 2a_0 + 6a_1 + 24 a_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{a_0 + 3a_1 + 12 a_2 = 0}$$

On a $\begin{cases} a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 0 \\ a_0 + 3a_1 + 12a_2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 0 \\ a_1 + 6a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 0 \\ a_1 = -6a_2 \end{cases}$$
$(L_2 - L_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 6a_2 \\ a_1 = -6a_2 \\ a_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\hookrightarrow F^\perp = \{ 6a - 6aX + aX^2 \mid a \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}(6 - 6X + X^2)$.

$\dim(F^\perp) = 1$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ $\quad q(v) = 4(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + xz + yz)$

1) Soit $f(v,v') = 4xx' + 4yy' + 4zz' + xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z$
(obtenue par dédoublement)

On a $f(v,v') = (x,y,z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ symétrique, donc f est une forme bilinéaire symétrique

et $q(v) = f(v,v) \Rightarrow q$ est une forme quadratique et f est sa forme polaire.

Une autre méthode : m.q. $\begin{cases} \cdot\ g(\lambda v) = \lambda^2 g(v), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \\ \cdot\ f(v,v') := \frac{1}{4}\{g(v+v') - g(v-v')\} \end{cases}$

est une forme bilinéaire.

2) $A = \left(f(e_i,e_j)\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -3+\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\cdot\left(20 - 9\lambda + \lambda^2 - 2\right)$$

$$= (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 9\lambda + 18\right) = (3-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 3$ avec multiplicité 2

$\lambda_2 = 6$ —"— 1.

3) A symétrique et ses valeurs propres sont toutes strictement positives

$\Rightarrow$ A positive et définie

$\Rightarrow$ f positive et définie $\Rightarrow$ f produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

4) $g(v) = 2(x^2+y^2+z^2) + (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2$

$\Rightarrow$ $g(v) \geq 0, \ \forall v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow g$ positive

$g(v) = 0 \Rightarrow x = y = z \Rightarrow g$ définie

$\hookrightarrow$ f est un produit scalaire.

Remarque : Si on trouve une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A,

par exemple v_1, v_2 vecteurs propres pour $\lambda_1 = 3$

v_3 —"— pour $\lambda_2 = 6$

alors la matrice de f dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

et si $v = X v_1 + Y v_2 + Z v_3$, on a $g(v) = 3X^2 + 3Y^2 + 6Z^2$.

5) a) $\mathcal{E}$ n'est pas orthogonale pour f, car la matrice A de f dans la base $\mathcal{E}$ n'est pas diagonale.

Par exemple, $f(e_1, e_2) = 1 \neq 0$.

b) On va noter $\langle v, v' \rangle = f(v, v')$, à ne pas confondre avec le produit scalaire canonique !

Le procédé de Gram-Schmidt :

- $v_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \dfrac{1}{2}(1, 0, 0) = \boxed{\dfrac{1}{2} e_1}$

  $\|e_1\| = \sqrt{f(e_1, e_1)} = \sqrt{4} = 2$

- $\tilde{v}_2 = e_2 - \langle e_2, v_1 \rangle v_1 = e_2 - f(e_2, v_1) v_1$

  $f(e_2, v_1) = \dfrac{1}{2} f(e_2, e_1) = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$

  $\Rightarrow \tilde{v}_2 = e_2 - \dfrac{1}{2} v_1 = (0, 1, 0) - \dfrac{1}{4}(1, 0, 0)$
  $= \left(-\dfrac{1}{4}, 1, 0\right) = e_2 - \dfrac{1}{4} e_1$

  $v_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|}$

  $\|\tilde{v}_2\| = \sqrt{f(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)} = \sqrt{f\left(e_2 - \frac{1}{4} e_1, e_2 - \frac{1}{4} e_1\right)}$
  $= \sqrt{f(e_2, e_2) - \frac{1}{2} f(e_2, e_1) + \frac{1}{16} f(e_1, e_1)}$
  $= \sqrt{4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot 4} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

  $\Rightarrow \boxed{v_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{15}\left(-\dfrac{1}{2}, 2, 0\right)}$

- $\tilde{v}_3 = e_3 - \langle e_3, v_1 \rangle v_1 - \langle e_3, v_2 \rangle v_2$

  $\langle e_3, v_1 \rangle = f(e_3, v_1) = \dfrac{1}{2} f(e_3, e_1) = \dfrac{1}{2}$.

$$\langle e_3, v_2 \rangle = f(e_3, v_2) = \frac{\sqrt{15}}{15}\, f\left(e_3, -\frac{1}{2} e_1 + 2e_2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{2} f(e_3, e_1) + 2\, f(e_3, e_2)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{v}_3 = (0,0,1) - \frac{1}{4}(1,0,0) - \underbrace{\frac{\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{\sqrt{15}}{15}}_{\frac{1}{10}} \cdot \left(-\frac{1}{2}, 2, 0\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right)$$

$$\|\tilde{v}_3\| = \sqrt{f(\tilde{v}_3, \tilde{v}_3)}$$
$$= \sqrt{q\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right)}$$
$$= \sqrt{4 \cdot \left(\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 1\right) + 2\left(\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 1 + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 1\right)}$$
$$= \sqrt{4 \cdot \frac{27}{25} - \frac{18}{25}} = \sqrt{\frac{18}{5}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{6}\left(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 1\right)}.$$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base orthonormée pour f.

c)
$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{15}} & -\frac{\sqrt{10}}{30} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{15}} & -\frac{\sqrt{10}}{30} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{6} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

$$P = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1/2 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{\sqrt{15}}{10} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \quad (\text{voir } (*))$$

! P n'est pas orthogonale, car P est la matrice de passage entre une base orthonormée et une base qui n'est pas orthonormée.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2} e_1 \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{2} e_1 + 2e_2\right) \\ v_3 = \frac{\sqrt{10}}{6}\left(-\frac{1}{5} e_1 - \frac{1}{5} e_2 + e_3\right) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = 2 v_1 \\ e_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{15}}{2} v_2 \\ e_3 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{\sqrt{15}}{10} v_2 + \frac{3\sqrt{10}}{5} v_3 \end{array} \right.$$