$\boxed{\text{Exercice 7}}$

$u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $P_u = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T$.

1) $P_u^T = I_n^T - \frac{1}{\|U\|^2} (U U^T)^T = I_n - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T = P_u$

$\hookrightarrow$ P_u symétrique.

2) $D = \text{Vect}(u)$.

a) Soit $v \in D \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $v = \lambda u$.

La matrice colonne de v dans $\mathcal{B}$ (la base canonique) est $V = \lambda U$.

La matrice colonne de $p_u(v)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u V = \lambda P_u U = \lambda\left(U - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T U\right) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

car $U^T U = \langle U, U \rangle = \|U\|^2$.

Donc $p_u(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

b) Soit $w \in D^\perp$ et W sa matrice colonne dans $\mathcal{B}$.

La matrice de $p_u(w)$ dans $\mathcal{B}$ est :

$$P_u W = W - \frac{1}{\|U\|^2} U U^T W = W,$$

car $U^T W = \langle U, W \rangle = 0$. $\begin{pmatrix} u \in D \\ w \in D^\perp \end{pmatrix}$

$\Rightarrow p_u(w) = w$.

c) p_u est la projection orthogonale sur $D^\perp$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$ $\quad A_a = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2a & 6 & -3 \\ -6a & 3 & 2 \\ 3a & 2 & 6 \end{pmatrix}$

1) A_a orthogonale $\Leftrightarrow$ ses colonnes forment une base orthonormée ($\langle C_i, C_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$ et $\|C_i\| = 1$, $\forall i$)

Dans notre cas on a $\begin{cases} \langle C_i, C_j \rangle = 0, \quad \forall i \neq j \in \{1,2,3\} \\ \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \end{cases}$

Il reste à avoir $\|C_1\| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{7}\sqrt{4a^2 + (-6a)^2 + 9a^2} = 1$

$\Leftrightarrow \underline{a^2 = 1} \Leftrightarrow \underline{a \in \{-1, 1\}}$.

2) $\boxed{a = 1}$

A_1 est la matrice d'une rotation $\Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ orthogonale} \\ \det(A) = 1 \end{cases}$

$$A_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overset{15}{\det(A_1)} = \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\begin{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \end{bmatrix}}{=} \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} \boxed{2} & 6 & -3 \\ \boxed{0} & 21 & -7 \\ \boxed{0} & -7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 21 & -7 \\ -7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

$\hookrightarrow$ A_1 est la matrice d'une rotation.

- A_1 matrice d'une <u>rotation autour d'un axe</u>
  $\Leftrightarrow$ A_1 admet 1 comme valeur propre
  $\Leftrightarrow$ $\exists\ v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ t.q. $Av = v$

$$A_1 v = v \Leftrightarrow (A_1 - I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ -6x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$v = (x, y, z)^T$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 6y - 3z = 0 & (L_1) \\ 14x = 0 & (3L_2 - L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$; On prend, par exemple, <u>$v = (0, 1, 2)$</u>.

$\Rightarrow$ A_1 est la matrice de la <u>rotation autour de l'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(0, 1, 2)$</u>.

⚠ $\exists$ une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de la même rotation est $A' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On veut trouver <u>l'angle θ</u>.

⚠ La trace d'une matrice est invariante par chang. de base

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(A') = \mathrm{Tr}(A_1) \Leftrightarrow 1 + 2\cos\theta = \frac{11}{7} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{7}$.

$\Rightarrow \underbrace{\theta = \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$ ou $\underbrace{2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}$.

- Pour décider, on doit trouver le <u>signe de $\sin\theta$</u>.

⚠ Le signe de $\sin\theta$ est le même que le signe du produit mixte $[u, A_1 u, v]$, avec $u \in \Delta^\perp$.

Soit $u = (1, 0, 0)^T \in \Delta^\perp$. On a $A_1 u = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où } [u, A_1 u, v] = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{6}{7} & 1 \\ \frac{3}{7} & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(-12 - 3) = -\frac{15}{7}\ \boxed{< 0}\ !$$

$$\Rightarrow \sin\theta < 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)}.$$

Donc A_1 est la matrice de la rotation autour de l'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(0,1,2)$ d'angle $\theta = 2\pi - \arccos\left(\frac{2}{7}\right)$.

$\boxed{\text{Exercice 9}}$ $q(x,y,z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz$.

1) La matrice de q dans $\mathcal{C}$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

On va trouver une base orthonormée directe formée de vecteurs propres de A.

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

- $E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I_3)$: $v = (x,y,z)$; $(A - 3I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ -x + 2z = 0 \\ -2x + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2z \\ y = -2z \end{cases} \implies E_3 = \{(2z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\underbrace{2,-2,1}_{\boxed{v_1}}).$$

$\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$

Soit $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

- $E_6 = \mathrm{Ker}(A - 6I_3)$; $v = (x,y,z)$, $(A - 6I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases} \implies E_6 = \{(2y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\underbrace{2,1,-2}_{\boxed{v_2}})$$

$\|v_2\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{3}(2,1,-2)$.

- $E_9 = \mathrm{Ker}(A - 9I_3)$: $v = (x,y,z)$, $(A - 9I_3)v = 0_{\mathbb{R}^3} \iff$

$$\iff \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \{ y = z = 2x \implies E_9 = \{(x, 2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\underbrace{1,2,2}_{\boxed{v_3}})$$

$\|v_3\| = \sqrt{9} = 3$; soit $b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

$\mathcal{B} := (b_1, b_2, b_3)$ est une <u>base orthonormé</u>. (on vérifie bien que $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, pour $i \neq j$)

Rmq. : On peut démontrer en général [17] que, si A matrice symétrique, alors
- A diagonalisable
- les espaces propres sont orthogonaux 2 à 2
- il existe une base orthonormée formée de vect. propres

• Vérifier si $\mathcal{B}$ est une base directe :

$$P = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1' & v_2' & v_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

(la matrice de passage entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$)

$$\det(P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}) = \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{[C_2 \leftarrow C_2 - C_1\,;\, C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3]}{=} \frac{1}{27}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$= 1 \implies \mathcal{B}$ est une base directe.

• La matrice semblable à A dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$ On a $D = P^{-1}AP$.

P est la matrice de passage entre deux bases orthonormés
$\implies P$ est orthogonale.

(car les colonnes de P sont 2 à 2 orthogonaux et de norme 1 (base orthonormée))

On a donc $P^{-1} = P^T \implies D = P^TAP$.

On reconnait la formule de chang. de base pour les formes quadratiques

$\implies D$ est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$

$\implies$ si $v = Xb_1 + Yb_2 + Zb_3$, alors $q(v) = 3X^2 + 6Y^2 + 9Z^2$.

2) P est orthogonale et $\det(P) = 1 \implies$ la transf. géométrique associée à P est une rotation.