Probabilités et Statistiques **Vendredi 19 décembre 2008**
Préorientation IC 3ème année

Contrôle continu 1
Durée : 45 minutes

Tous les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le barême sur 15 est approximatif.

Exercice 1. Espérance et variance (6 pts)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et considérons la variable aléatoire Y donnée par $Y = aX + 1$, où a est un paramètre réel.

1 - Calculer l'espérance et la variance de X (on détaillera les calculs).

2 - En déduire l'espérance et la variance de Y.

3 - Pour quelles valeurs de a et de p la variable aléatoire Y est-elle centrée réduite ?

Exercice 2. Lois exponentielle et géométrique (4,5 pts)
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, et soit Y la variable aléatoire correspondant à la partie entière de $X + 1$.

1 - Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k - 1 \leq X < k).$$

2 - En déduire $\mathbb{P}(Y = k)$ pour tout entier k strictement positif.

3 - Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, dont on précisera le paramètre.

Exercice 3. Densité logistique (4,5 pts)
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1 - Vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (dite densité logistique).

2 - Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité de probabilité. Calculer sa fonction de répartition $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 - Quelle est la médiane de X, c'est-à-dire pour quelle valeur x la fonction de répartition est-elle égale à $1/2$?