Probabilités et Statistiques **Mercredi 21 janvier 2009**
Préorientation IC 3ème année

Examen final
Durée: 2 heures

Documents et téléphones portables sont interdits. La calculatrice est autorisée.
Le barême sur 20 est approximatif.

Exercice 1. Indépendance (3 pts)
On s'intéresse dans cet exercice aux couples ayant trois enfants exactement. On suppose que la probabilité d'avoir un garçon est égale à $p \in]0, 1[$. On note A et B les deux événements suivants:

$$A = \{\text{Les 3 enfants sont de même sexe}\} \qquad B = \{\text{Il y a au plus un garçon}\}.$$

Pour $i = 1, 2, 3$, on note également X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le ième enfant est un garçon;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + X_3$ désigne donc le nombre de garçons dans la famille. Enfin, on suppose que les X_i sont indépendantes.

1 - Quelle est la loi de la variable aléatoire S ?
2 - En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.
3 - Montrer que si $p = 1/2$, alors les événements A et B sont indépendants.

Exercice 2. Loi de Rayleigh (6 pts)
Soit X la variable aléatoire de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{-x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1 - Calculer $\mathbb{E}[X]$. Indication: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2}$.
2 - Déterminer la fonction de répartition de X.
3 - Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = X^2$, et en déduire sa loi.
4 - Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Var(X)} = 2 - \pi/2$.
5 - En utilisant l'inégalité de Chebyshev, déterminer le nombre $A_{\min}$ tel que pour tout $A \geq A_{\min}$,

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| > A\right) \leq 1\%.$$

6 - Quel est la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\left(Y > 100 | X > 5\right)$?

Exercice 3. Intervalles de confiance (5 pts)
Un site Internet présente depuis quelques mois un nombre de connexions en progression importante, ce qui génère des problèmes sur le réseau. On souhaite alors étudier le nombre

(aléatoire) X d'essais nécessaires pour établir la connexion entre un ordinateur et ce site Internet. On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre inconnu $p \in]0,1[$. Le but de cet exercice est d'estimer la valeur de p.
On rappelle que $\mathbb{E}[X] = 1/p$ et que $\mathrm{Var}(X) = 1/p^2$. On note $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un N-échantillon issu de X.

1 - Proposer un estimateur de p dépendant des variables $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Quel résultat du cours justifie la convergence en probabilité de cet estimateur ?

2 - Montrer que lorsque N est suffisamment grand, on a l'approximation suivante:

$$\sqrt{N}\left(p\bar{X}_N - 1\right) \approx \mathcal{N}(0,1).$$

3 - En déduire un intervalle de confiance à 90% pour le paramètre inconnu p.

4 - Déterminer la taille de cet intervalle de confiance.

5 -Application numérique. Après une étude sur cet échantillon, on obtient l'estimation ponctuelle suivante: $\bar{x}_N = 3,41$.

a) Pour $N = 100$, calculer numériquement l'intervalle de confiance précédent.

b) Déterminer N pour que la taille de l'intervalle de confiance n'excède pas $0,01$.

Exercice 4. Tests d'hypothèses (6 pts)
En vue de la conception d'un pont suspendu, on souhaite étudier la fréquence (aléatoire) des vibrations auquel il va être soumis pour éviter un phénomène de résonance. On note m_0 la fréquence propre du pont et l'on suppose que la fréquence de ces vibrations suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où m est inconnu et σ connu. On effectue le test bilatéral suivant:

$$(H_0) : \text{“}m = m_0\text{”} \qquad \text{contre} \qquad (H_1) : \text{“}m \neq m_0\text{”}.$$

Notons $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un N-échantillon issu de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et rappelons la règle de décision suivante, pour un risque $\alpha \in [0,1]$ donné:

$$\text{Rejet de } (H_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_{H_0}(|\bar{X}_N - m_0| > |\bar{x}_N - m_0|) \leq \alpha.$$

1 - Sous H_0, calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_N$. Quelle est sa loi ?

2 - Déterminer le nombre A_α tel que

$$\mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{|\bar{X}_N - m_0|}{\sigma/\sqrt{N}} > A_\alpha\right) = \alpha.$$

3 - En déduire que la règle de décision peut se réécrire de la manière suivante:

$$\text{Rejet de } (H_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{x}_N \leq k_1^\alpha \quad \text{ou} \quad \bar{x}_N \geq k_2^\alpha,$$

où k_1^α et k_2^α sont des valeurs à expliciter.

4 - Application numérique. On suppose que l'on a recueilli les données suivantes sur l'échantillon de taille $N = 100$:

$$m_0 = 2,15 \qquad \sigma = 0,4 \qquad \bar{x}_N = 2,23.$$

a) Quelle est la conclusion du test au niveau $\alpha = 5\%$?

b) Avec les mêmes données, on suppose maintenant que $\alpha = 1\%$. Quelle est cette fois la conclusion du test ? Donner une interprétation de ce test relative à la conception du pont.