Correction exercices complémentaires TD1

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 4.

> Soient P, Q, R des propositions. Montrer les propositions suivantes :
> 1. $(\text{non}(P \text{ et } Q)) \Leftrightarrow ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q))$
> 2. $((P \text{ ou } Q) \text{ et } R) \Leftrightarrow ((P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R))$.

1. On veut montrer (non(P et Q))⇔ ((non P) ou (non Q)).

P	V	F	V	F
Q	V	V	F	F
P et Q	V	F	F	F
non(P et Q)	F	V	V	V

Et d'autre part

P	V	F	V	F
Q	V	V	F	F
non P	F	V	F	V
non Q	F	F	V	V
(non P) ou (non Q)	F	V	V	V

Donc ça marche. Souvenez-vous qu'on a aussi (non(P ou Q)) ⇔ ((non P) et (non Q)).

2. Si vous avez le courage, vous pouvez vérifier ça avec une table de vérité (il doit y avoir $2^3 = 8$ colonnes, car il y a 2 possibilités, vrai ou faux, pour chacune des 3 propositions P, Q et R). Retenez que les propositions logiques se distribuent par rapport aux opérations 'et' et 'ou'.

Exercice 5.

> 1. Traduire dans le formalisme mathématique la proposition « 0 n'admet pas d'inverse ».
> 2. Écrire la négation de cette proposition.
> 3. Montrer cette proposition

1. Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x.0 \neq 1$.
2. $\exists x \in \mathbb{R} \mid x.0 = 1$
3. Pour prouver 1., on peut par exemple procéder par l'absurde : On suppose $\exists x \in \mathbb{R} \mid x.0 = 1$, or on a $\forall x \in \mathbb{R}, x.0 = 0$, donc $0 = 1$, absurde.

Exercice 6.

> 1. Nontrer que, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 3.
> 2. Monter que, pour tout entier naturel n, si $10^n + 1$ est un multiple de 3 alors 10^{n+1} est un multiple de 3. Que peut-on en déduire ?

1. On procède par récurrence :
Initialisation : $10^1 - 1 = 9$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$. On se rend compte que cela a des chances de marcher, mais le cas $n = 1$ suffit : 9 est divisible par 3.
Hypothèse de récurrence : On suppose que $10^n - 1$ est divisible par 3 pour un certain $n \geqslant 1$. Maintenant :

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10.10^n - 1 \\ &= (9+1).10^n - 1 \\ &= 9.10^n + 10^n - 1 \end{aligned}$$

Or, 9, donc 9.10^n est divisible par 3, et par hypothèse de récurrence, $10^n - 1$ est divisible par 3. Donc la somme des deux est divisible par 3.
Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $10^n - 1$ est un multiple de 3. (On peut écrire aussi $3 \mid 10^n - 1$).
NB : On peut se rendre compte que $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{\text{n fois}} = 9 \times 11\ldots1$, divisible par 9, donc par 3.

2. Si on suppose $10^n + 1$ divisible par 3, alors, même principe que précédemment, au niveau de la mise en place de la récurrence, $10^{n+1} + 1 = 9.10^n + 10^n + 1$ est divisible par 3.

   Le problème, c'est que l'on ne peut rien en déduire : **on n'a pas initialisé la récurrence.** Toutes les phases sont importantes pour cette technique de démonstration.

   Parenthèse : En réalité $10^n + 1$ n'est jamais divisible par 3. Pour $n \geqslant 1$ il s'écrit $10^n + 1 = 1\ \underbrace{0 \dots 0}_{\text{(n-1) fois}}\ 1$ et un critère de divisibilité par 3 consiste à faire la somme des chiffres qui composent le nombre et à regarder si cette somme est divisible par 3 : Ici,$1 + 0 + \dots + 0 + 1 = 2$ qui n'est pas multiple de 3.