Correction exercices complémentaires TD 10

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 4.

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique

$$
\begin{aligned}
\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} &= (1-i\sqrt{3})\frac{-4}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}} \\
&= \frac{-4+4i}{1^2+\sqrt{3}^2} \\
&= \frac{-4+4i}{4} \\
&= -1+i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}+i}{1-i\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{2}+i)(1+i\sqrt{2})}{1^2+\sqrt{2}^2} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2})+i(1+2)}{3} \\
&= \frac{3i}{3} \\
&= i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{3+i}{5-i}+\frac{1-2i}{1+5i} &= \frac{(3+i)(1+5i)+(1-2i)(5-i)}{(5-i)(1+5i)} \\
&= \frac{(-2+16i)+(3-11i)}{10+24i} \\
&= \frac{1+5i}{(10+24i)(10-24i)}(10-24i) \\
&= \frac{-110+26i}{100+576} \\
&= \frac{-110+26i}{676}
\end{aligned}
$$

Exercice 5.

1. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$.
2. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} kz$.

1. On veut calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Une astuce consiste à regarder $(1-z)S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k - z\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=1}^{n+1} z^k = 1 - z^{n+1}$. Donc en divisant par $(1-z)$ on obtient :

$$S_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

2. Je suppose qu'il y a une faute de frappe : $S_n = \sum_{k=0}^{n} kz^{k-1}$, il y a une puissance au z (sinon, il n'y a rien de complexe dans le calcul de $\sum_{k=0}^{n} kz = z\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = zn(n+1)/2$.

On pose donc $f(z) = \sum_{k=0}^{n} kz^{k-1}$.
Il existe une dérivée complexe, sa définition est la même que dans le cas réel, en tant que limite du taux d'accroissement, et ses propriété sont les mêmes. En gros, on la calcule de la même manière que dans le cas réel, rien ne change parce qu'il y a un $z \in \mathbb{C}$ à la place du $x \in \mathbb{R}$. Si on pose $F(z) = S_n^1 = \sum_{k=0}^{n} z^k$ on obtient $F'(z) = \sum_{k=0}^{n} kz^{k-1} = f(z)$ (notez que le premier terme est nul).
Or, on a déjà calculé F. Donc

$$f(z) = \left(\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right)' = \frac{-(n+1)z^{n+1}(1-z) - (1 - z^{n+1})(-z)}{(1-z)^2} = \frac{nz^{n+2} - (n+1)z^{n+1} + z}{(1-z)^2}$$

Exercice 6.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Démontrer que} \\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \Re(z_1 z_2) \leqslant (|z_1|^2 + |z_2|^2)\end{array}}$$

Ici, une astuce consiste à calculer la norme au carré de $(z_1 + \overline{z_2})$. Bien sûr, cette expression est positive. On a $|z_1 + \overline{z_2}|^2 = |z_1|^2 + (z_1.z_2 + \overline{z_1.z_2}) + |\overline{z_2}|^2 = |z_1|^2 + 2\Re(z_1.z_2) + |z_2|^2 \geqslant 0$