Correction exercices complémentaires TD 11

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 10.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) $\frac{z-2}{z-1} = i$.
On donnera la solution sous forme algébrique.
1. Soit M, A et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$.
Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$
et retrouver la solution de l'équation (1).

1. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z-1} = i \quad & \Leftrightarrow \quad z - 2 = i(z-1) \\ & \Leftrightarrow \quad z(1-i) = 2 - i \\ & \Leftrightarrow \quad z = \frac{2-i}{1-i} \end{aligned}$$

   Soit :

$$z = \frac{(1+i)(2-i)}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$$

2. On a $|2-z| = |i|.|1-z| = |1-z|$ et $\arg(\frac{z-2}{z-1}) = \frac{\pi}{2}$. Cela signifie que z est à égale distance de 1 et de 2, soit sur la droite $\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}$.De plus, l'angle entre les vecteurs $z-2$ et $z-1$ est de $\pi/2$, soit sur le demi-cercle inférieur de centre $\frac{3}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Donc, nous sommes exactement au point $\frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$.

Exercice 11.

1. Déterminer le module, un argument, les parties réelles et imaginaires de : $e^{(2+3i)}$, $e^{i(2+3i)}$ et $e^{\frac{1}{2+3i}}$.
2. Mêmes questions pour e^z, e^{iz}, et $e^{\frac{1}{z}}$, en fonction de $z = x + iy$
3. Résoudre $e^z = 2$.

1. $e^{(2+3i)} = e^2.e^{i3}$ Donc le module est e^2 et un argument est 3. La partie réelle est $e^2\cos(3)$ et la partie imaginaire est $e^2\sin(3)$.
   $e^{i(2+3i)} = e^{-3+2i} = e^{-3}.e^{2i}$ Donc le module est e^{-3} est un argument est 2. La partie réelle est $e^{-3}\cos(2)$ et la partie imaginaire est $e^{-3}\sin(2)$.
   $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13}$, donc $e^{\frac{1}{2+3i}} = e^{\frac{2}{13} - i\frac{3}{13}}$. Donc le module est $e^{\frac{2}{13}}$ et un argument est $-\frac{3}{13}$. Je vous laisse donner les parties réelles et imaginaires.
2. $e^z = e^x.e^{iy}$. Le module est e^x et un argument est y. La partie réelle est $e^x\cos(y)$ et la partie imaginaire est $e^x\sin(y)$.
   Pour e^{iz} : Le module est e^{-y}, un argument, x. La partie réelle est $e^{-y}\cos(x)$ et la partie imaginaire est $e^{-y}\sin(y)$.
   Pour $e^{\frac{1}{z}}$: On procède de même que pour l'exemple $2+3i$. Le module est $e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$, un argument est $\frac{-y}{x^2+y^2}$. La partie réelle est $e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos(\frac{-y}{x^2+y^2})$ et la partie imaginaire est $e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin(\frac{-y}{x^2+y^2})$.
3. 2 est un réel positif, donc son module est 2 et un argument est 0. L'ensemble des solutions pour z est donc : $\{\log(2) + 2ik\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
   Exercice 12.

   Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.

   (a) On a $-1-i = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. Donc $z_1 = (-1-i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{\frac{-5.3\pi}{4}i} = \sqrt{2}^5 e^{\frac{\pi}{4}i}$. Donc le module est $\sqrt{2}^5$ et un argument est $\frac{\pi}{4}$.

(b) $\sqrt{3}-i=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Donc $z_2=\left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^7=\sqrt{2}^7e^{-i\frac{7\pi}{6}}=\sqrt{2}^7e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

(c) On a $1+i=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Donc : $\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. Ainsi, on a $z_3=\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4=\frac{4}{16}e^{i\frac{4.7\pi}{12}}=\frac{1}{4}e^{\frac{4\pi}{12}}=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{3}}$.

(d) On a $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $z_4=\frac{(1-i)^3}{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{2}^3e^{-i\frac{3\pi}{4}}.\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$.