Correction exercices complémentaires TD 12

Irène Meunier

4 novembre 2020

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la transformation du plan donnée par :
$z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}} z + e^{-i\frac{\pi}{2}}$
1. Quel type de transformation est f ?
2. On note t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2.
(a) Quelle est l'écriture complexe de $f \circ t$?
(b) Quelle est la nature de $f \circ t$?
(c) Est-ce que $f \circ t = t \circ f$?

1. f est de type $az + b$ avec $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $|a| = 1$, et $a \neq 1$. Ainsi, f est une rotation.
2. (a) On a $f \circ t(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z + 2) + e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2e^{\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   (b) Comme précédemment, $f \circ t$ est une rotation.
   (c) On calcule $t \circ f = e^{i\frac{\pi}{3}} z + e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2$. On a $t \circ f \neq f \circ t$ comme on peut le constater avec leurs expressions respectives (ou bien on peut simplement les calculer en 0 par exemple).

Exercice 18.

1. Soit r_1 la rotation du plan de centre $A(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
Soit r_2 la rotation du plan de centre $B(-1 + i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Déterminer la nature des transformations $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.
2. Soit r_3 la rotation du plan de centre $B(-1 + i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer la nature des transformations $r_1 \circ r_3$ et $r_3 \circ r_1$.

Une composée de rotation est ou bien une rotation, ou bien une translation. Par exemple :

1. On a $r_1(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-i)+i$ et $r_2(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+1-i)-1+i$. $r_1 \circ r_2(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{-i\frac{\pi}{4}}(z+1-i)-1+i-i)+i = e^{-i\frac{\pi}{12}} z + e^{-i\frac{\pi}{12}}(1-i) - 1 + i$. Donc $r_1 \circ r_2$ est une rotation. De même, on se rend compte que le coefficient devant z de $r_2 \circ r_1$ est aussi $e^{-i\frac{\pi}{12}}$. Donc $r_2 \circ r_1$ est une rotation.
2. On finit par se rendre compte que ce qui compte dans la détermination de la nature de la transformation est le coefficient a devant z, de module 1, mais différent de 1 si c'est une rotation, et égal à 1 si c'est une translation. Or, lorsqu'on compose deux rotations r_1 et r_2, de coefficients respectifs a_1 et a_2, la composée (dans les deux sens, car la multiplication est commutative) a pour coefficient $a_1.a_2$.
   Ici, donc, comme on a $e^{i\frac{\pi}{6}}.e^{-i\frac{\pi}{6}} = 1$, $r_1 \circ r_3$ et $r_3 \circ r_1$ sont des translations.

Exercice 19.

On donne $A(1 + i)$, $B(3 + i)$, $C(5)$ et $D(7)$.
Existe-t-il une rotation r telle que $r(A) = C$ et telle que $r(B) = D$? Justifier votre réponse.

(Je vous conseille de faire un dessin, avec les points A, B, C et D. De toute manière, dans ces exercices géométriques, je vous conseille de faire des dessins).

Si une telle rotation r existe, elle est de la forme $r(z) = az + b$ avec $|a| = 1$, $a \neq 1$. Si on note respectivement z_A, z_B, z_C et z_D les affixes de A, B, C et D, on aurait $\frac{r(z_A)-r(z_B)}{z_A-z_B} = a$, or, d'autre part, $\frac{r(z_A)-r(z_B)}{z_A-z_B} = \frac{z_C-z_D}{z_A-z_D} = 1$. Donc, r ne peut être une rotation, seulement une translation.