Correction exercices complémentaires TD 13

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 23.

Écrire sous forme trigonométrique et algébrique les racines carrées de $\sqrt{3}+1$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Ici, on demande (implicitement) de trouver ces racines sous forme algébrique (c'est en faisant le lien avec la forme exponentielle qu'on pourra ensuite déterminer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.

Soit $z = a + ib$ tel que $z^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$. On normalise pour avoir également $|z|^2 = 1$. On aboutit au système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2-b^2 & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2ab & = & \frac{1}{2} \\ a^2+b^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & \frac{\sqrt{3}}{2}+1 \\ 2b^2 & = & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ ab & = & \frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & \frac{\sqrt{3}+2}{4} \\ b^2 & = & \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ ab & > & 0 \end{array}\right.$$

La dernière équation ne nous intéressant que pour le signe du produit ab qui ici est positif, ce qui signifie que l'on a deux solutions : Ou bien a et b sont tous deux positif, ou bien ils sont tous deux négatifs.

Les racines de $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ sont donc $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et son opposé $-\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Ainsi, les racines de $\sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})$ sont $\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right) = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$. D'autre part, en utilisant la forme exponentielle, on a : $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}}$, dont les racines carrées sont $-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}}$.

On en déduit (par comparaison des signes des parties réelles et imaginaires) que $e^{\frac{\pi}{12}} = \cos(\dfrac{\pi}{12}) + i\sin(\dfrac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Ainsi, toujours en comparant parties réelles et imaginaires :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) & = & \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) & = & \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{array}\right.$$

Exercice 24.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

$$z^2 + z + 1 = 0 \tag{1}$$

On calcule le discriminant $\Delta = -3$. Les solutions complexes conjuguées sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$$z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \tag{2}$$

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1) = -3+4i-4i+4 = 1$. Nous avons donc deux racines qui sont $\dfrac{(1+2i)\pm 1}{2}$, soit i et $1+i$.

$$z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \tag{3}$$

Le discriminant est, cette fois, $\Delta = 3+4i$. Calculons ses racines carrées. Son module est $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. Pour calculer ses racines, on considère $z = a+ib$ tel que $z^2 = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$. On obtient (une nouvelle fois) le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2-b^2 & = & \frac{3}{5} \\ 2ab & = & \frac{4}{5} \\ a^2+b^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & \frac{4}{5} \\ b^2 & = & \frac{1}{5} \\ ab & > & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, les racines du discriminant Δ sont $\pm\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{i}{\sqrt{5}}\right)=\pm(2+i)$; on les notera respectivement δ_+ et δ_-.

Ainsi, les solutions de l'équation (3) sont : $\dfrac{\sqrt{3}+\delta_-}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-2-i}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}+\delta_+}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+2+i}{2}$.

$$z^4+2z^2+4=0 \tag{4}$$

Cette équation peut se réécrire, en posant $Z=z^2$:

$$Z^2+2Z+4=0 \tag{5}$$

On résout cette équation.

Le discriminant est $\Delta=4-16=-12$. Les solutions de l'équation (5) sont donc $\dfrac{-2\pm i\sqrt{12}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$.

Ainsi, on trouve les solutions de l'équation (4) en trouvant les racines $z_\pm$ de $Z_\pm=z_\pm^2=-1\pm i\sqrt{3}$. Je ferai la forme exponentielle : $2(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $2(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, dont les racines sont, respectivement, $\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}},-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\}$ et $\{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}},-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

Au bilan, les quatre solutions de l'équation (4) sont : $\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}},-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}},\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}},-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}\}$.

Exercice 25.

On considère l'équation $z^3-iz+3-i=0$ qui admes trois solutions.
1. Résoudre cette équation sachant qu'elle admet une solution réelle.
2. Dans le plan complexe, on considère les trois points ayant ces racines pour affixes.
Prouver que le triangle obtenu est rectangle isocèle.

1. On considère $z^3-2z^2-iz+3-i=0$. Comme indiqué dans l'énoncé, on cherche sa racine réelle : $x_0=-1$. En effet, $x_0^3-2x_0^2-ix_0+3-i=(-1)^3-2(-1)^2-i(-1)+3-i=-1-2+i+3-i=0$. On peut donc factoriser cette équation, de la forme :

$$z^3-2z^2-iz+3-i=(z+1)P(z) \tag{6}$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré 2. On peut écrire $P(z)=az^2+bz+c$ et identifier les coefficients dans l'équation (6), puis résoudre un système linéaire à trois équations, trois inconnues pour trouver a, b et c. On devrait trouver $z^3-2z^2-iz+3-i=(z+1)(z^2-3z+(3-i))$.

On résout maintenant la nouvelle équation $z^2-3z+(3-i)=0$. Le discriminant : $\Delta=9-4(3-i)=-3+4i$. On a déjà trouvé les racines de $3+4i$ un peu plus haut, j'irai donc très vite : les racines sont $\pm(1+2i)$. (*Parenthèse :* Lorsqu'on connaît les racines de $a+ib=re^{i\theta}$, on peut facilement trouver les racines de $-a+ib=re^{i(\pi-\theta)}$ (la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). Il suffit d'échanger parties réelles et imaginaires des racines données. Pourquoi ? Il s'agit d'appliquer une symétrie par rapport à l'axe $\{y=x\}$. Une racine de $re^{i\theta}$ s'écrit $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Si on applique cette symétrie, on obtient : $\pm\sqrt{r}e^{i(\pi/2-\theta/2)}$. Lorsqu'on prend le carré, on obtient $re^{i(\pi-\theta)}=-a+ib$.)

Ainsi, les racines de $z^2-3z+(3-i)$ sont $2+i$ et $1-i$ (Vérifiez !). Donc, $z^3-2z^2-iz+3-i=(z+1)(z-2-i)(z-1+i)$.

2. On dessine les racines -1, $1-i$ et $2+i$ dans le plan. On notera les points associés respectivement A, B et C. On conjecture que l'angle $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ est droit, et donc que les côtés de l'angle droit sont de même longueur.

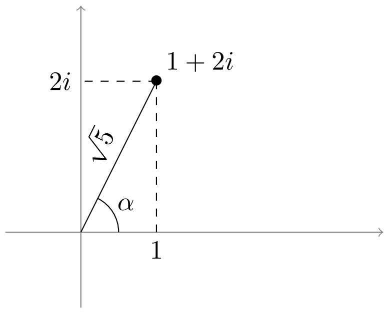
Vérifions-le. Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ s'écrit en complexe $2+i-(1-i)=1+2i$ et le vecteur $\overrightarrow{BA}$ s'écrit $-1-(1-i)=-2+i$. On peut bien vérifier que $i(1+2i)=-2+i$. Ils sont donc bien de même longueur (en prenant le module de cette expression) et il y a bien un angle de $\frac{\pi}{2}$ entre les deux (argument de i).

Exercice 26.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2+Z+1=0$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $e^{2z}+e^z+1=0$.

1. On a déjà vu cette équation au début de l'exercice 24. Les solutions sont, en écriture exponentielle : $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
2. Si on pose $Z=e^z$ on obtient l'équation du 1. à résoudre pour Z. Donc $Z=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$, soit $e^z=e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. Mais rappelez-vous qu'en complexes, contrairement aux réels, l'exponentielle n'est certainement pas injective ! Les solutions sont $\{i(\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi)|k\in\mathbb{Z}\}$.

Petit bonus : Quelle est la racine (avec parties réelles et imaginaires positives) de $1+2i$?



On l'a déjà vu en résolvant un bon nombre de fois le même système, lorsque le module du nombre complexe est 1. Je le résume ici, énoncé d'une manière un peu différente. Puisque $\alpha \in [0, \pi]$, alors $\frac{\alpha}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et, dans ce cas :

$$\begin{cases} \cos(\alpha/2) & = & \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}} \\ \sin(\alpha/2) & = & \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} \end{cases}$$

(Sinon, les signes de $\cos(\alpha/2)$ et $\sin(\alpha/2)$ peuvent changer)

Dans notre cas $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Et donc, la racine est (sachant que le module de $1 + 2i$ est $\sqrt{5}$ et donc que le module de sa racine est $\sqrt[4]{5}$) :

$$\sqrt[4]{5}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Or, on peut reconnaître le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dont l'inverse vaut $\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. D'où la racine est :

$$\sqrt{\varphi} + i\sqrt{\frac{1}{\varphi}}$$