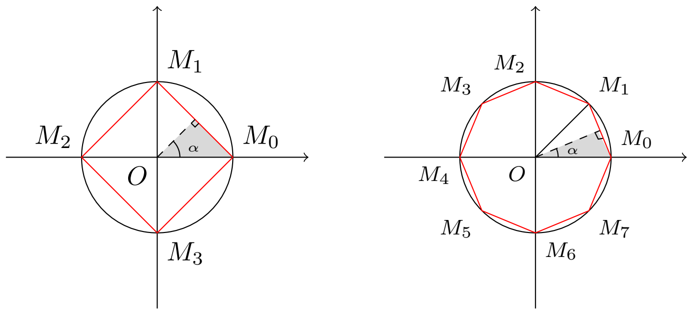
Correction exercices complémentaires TD 14

Irène Meunier

3 novembre 2020

Exercice 30.

Dessiner, calculer les périmètres et les aires des polygones ayant pour sommet les racines 4e et 8e de l'unité.
Calculer les limites de ces nombres lorsque n tend vers $+\infty$



(Petit bonus pour connaître une valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{8})$: Ici, on est dans le cadrant où sin et cos sont positifs. Donc on peut utiliser la formule : $\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$, avec $\theta = \dfrac{\pi}{8}$. On connaît $\cos(2\theta) = \cos(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient finalement : $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Toujours grâce à : $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, on obtient $\cos(\dfrac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.)

1. On cherche le périmètre P_n du polygone μ_n. Dans ces polynomes, l'angle $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM_1})$ vaut $\dfrac{2\pi}{n}$, et donc l'angle que j'ai noté α sur le dessin vaut la moitié : $\dfrac{\pi}{n}$. On considère maintenant le rectangle grisé. Par la formule : $\sin(\alpha) = \dfrac{o}{h}$ où on prend $h = 1$ et o le demi-côté du triangle OM_0M_1, on obtient $\dfrac{c}{2} = \sin(\dfrac{\pi}{n})$, on notant c un côté M_0M_1. D'où $c = 2\sin(\dfrac{\pi}{n})$, et donc $P_n = nc = 2n\sin(\dfrac{\pi}{n})$.
2. Pour calculer l'aire de μ_n, on calcule l'aire du triangle OM_0M_1, de formule $\dfrac{bh}{2}$. Il y a n triangles identiques pour faire le polygone total. Ici, on a vu b = demi-côté = $\sin(\frac{\pi}{n})$, et de même, $h = \cos(\frac{\pi}{n})$. D'où $A_n = n\dfrac{2\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})}{2} = n\dfrac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{2}$ avec une formule de trigo : $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$.
3. Ici, on utilise une formule importante, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Pour $n \to +\infty$, on a $P_n = 2n\sin(\frac{\pi}{n}) = 2\pi\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}$. Or, la formule donne $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}} = 1$. D'où, $\lim_{n\to+\infty} P_n = 2\pi$, ce qui est le périmètre du cercle de rayon 1.

   Pour l'aire, on utilise la même formule en constatant que $A_n = n\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{2} = \pi\frac{\sin(\frac{2\pi}{n})}{\frac{2\pi}{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \pi$, ce qui est bien l'aire d'un cercle de rayon 1.

Exercice 31.

Soient z_1, z_2 et z_3 trois nobres complexes distincts ayant le même cube.
1. Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme exponentielle, les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$

1. On a z_1, z_2 et z_3 tels que $z_1 \neq z_2 \neq z_3$, et $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$. Dans ce cas $\dfrac{z_2}{z_1} \neq \dfrac{z_3}{z_1} \neq 1$, et $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)^3 = 1$. Ainsi, $\dfrac{z_2}{z_1}$ et $\dfrac{z_3}{z_1}$ sont les 2 racines 3-ièmes de l'unité distinctes et distinctes de 1. Alors, quitte à intervertir z_2 et z_3, on peut supposer que $z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_1$ et $z_3 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_1$.

2. On veut résoudre $z^6 + (7-i)z^3 - 8 - 8i = 0$. On pose $Z = z^3$ et l'équation pour Z devient $Z^2 + (7-i)Z - 8 - 8i = 0$. On résout à l'aide du discriminant $\Delta = (7-i)^2 + 4(8+8i) = 80 + 18i$. Son module vaut : $|\Delta| = \sqrt{6724} = 82$. On calcule les racines à l'aide d'un système que l'on a déjà vu plusieurs fois on trouve : $\pm(9+i)$.
   Ainsi, les solutions de l'équation initiale sont, si on note $z_\pm$ une racine cubique de $\pm(9+i)$:
   $\{z_\pm, e^{\frac{2i\pi}{3}} z_\pm, e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_\pm\}$. (Il y a au total 6 solutions distinctes dans l'accolade).