CORRECTION EXERCICES COMPLÉMENTAIRES TD 16

IRÈNE MEUNIER

Exercice 4.

$$\boxed{\text{Effectuez la division euclidienne de } X^5+3X^4+5X^3+X-1 \text{ par } X^3-2X+1}$$

C'est un calcul à faire vous-mêmes, avant de regarder la solution...

$$\begin{array}{llllll}
x^5+3x^4+5x^3 & & & +x-1 = \left(x^3-2x+1\right)\left(x^2+3x+7\right)+5x^2+12x-8 \\
-x^5 & +2x^3 & -x^2 & \\
\hline
3x^4+7x^3 & -x^2 & +x & \\
-3x^4 & +6x^2 & -3x & \\
\hline
7x^3+5x^2 & -2x-1 & & \\
-7x^3 & +14x-7 & & \\
\hline
5x^2+12x-8 & & &
\end{array}$$

Exercice 5.

> Pour $a \neq b$, sachant que le reste de la division de $P(X)$ par $(X-a)$ est 1 et que celui de la division de $P(X)$ par $(X-b)$ est -1 quel est le reste de la division de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$?

On sait que le reste de la division de $P(X)$ par $(X-a)(X-b)$ est de degré inférieur ou égal à 1. On peut l'écrire $R(X)=\alpha X+\beta$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ à déterminer. Soit, $P(X)=\alpha X+\beta+(X-a)(X-b)R(X)$. De plus, on sait que $P(a)=1=\alpha a+\beta$ et $P(b)=-1=\alpha b+\beta$ par hypothèse. On aboutit au système :

$$\left\{\begin{array}{lll}\alpha a+\beta & = & 1 \\ \alpha b+\beta & = & -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll}\alpha ab+\beta b & = & b \\ \alpha ba+\beta a & = & -a\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll}\alpha ab+\beta b & = & b \\ \beta(a-b) & = & -a-b\end{array}\right.$$

On obtient $\beta=\frac{a+b}{b-a}$, et avec la première équation par exemple, $\alpha a+\beta=1$ on trouve $\alpha=\frac{1}{a}(1-\frac{a+b}{b-a})=-\frac{2}{b-a}$.

Donc $\boxed{\alpha=-\frac{2}{b-a}}$ et $\boxed{\beta=\frac{a+b}{b-a}}$.

Autre méthode, pour les curieux d'entre vous :

En réalité, on peut résoudre ici ce problème avec un théorème appelé *Théorème des restes chinois.* On constate que $\mathrm{pgcd}(X-a, X-b)=1$, et ce théorème dit que, dans ce cas, il existe une équivalence entre les couples des restes des divisions euclidiennes respectives par $X-a$ et $X-b$ et le reste de la division euclidienne par $(X-a)(X-b)$. En effet, on peut toujours écrire :

$\frac{1}{b-a}\left((X-a)-(X-b)\right)=1$.

Alors, si on note $\tilde{P}(X)=\frac{1}{b-a}\left(-(X-a)-(X-b)\right)$, on peut constater que le reste de la division euclidienne de $\tilde{P}$ par $X-a$ est égal à 1 et que le reste de la division euclidienne de $\tilde{P}$ par $X-b$ est égal à -1.

Or $\tilde{P}(X)=-\frac{2}{b-a}X+\frac{a+b}{b-a}$. $\tilde{P}$ est en réalité le reste de la division euclidienne du P de l'énoncé par $(X-a)(X-b)$. On obtient bien le même résultat.

Exercice 6.

> 1. Soient P et Q deux polynômes. Montrez que pour tout entier k, $P-Q$ divise P^k-Q^k.
> 2. En déduire que pour tout $P \in K[X]$, $P-X$ divise $P(P)-P$.

(1) On peut connaître une formule :

$$P^k-Q^k=(P-Q)(\sum_{i=0}^{k-1} P^iQ^{k-1-i}$$

On peut la vérifier facilement, c'est un « carambolage » comme disait un de mes profs de L2, ou une somme télescopique :

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(P-Q)(\sum_{i=0}^{k-1} P^i Q^{k-1-i} &= \sum_{i=0}^{k-1} P^{i+1} Q^{k-1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} P^i Q^k - i \\
&= P^k + \sum_{i=0}^{k-2} P^{i+1} Q^{k-1-i} - (\sum_{i=1}^{k-1} P^i Q^{k-i} + Q^k) \\
&= P^k + (PQ^{k-1} + P^2 Q^{k-2} + \ldots + P^{k-1} Q) - (PQ^{k-1} + P^2 Q^{k-2} + \ldots + P^{k-1} Q) - Q^k \\
&= P^k + \sum_{i=1}^{k-1} P^i Q^{k-i} - \sum_{i=1}^{k-1} P^i Q^{k-i} - Q^k \\
&= P^k - Q^k
\end{aligned}
$$

□

Au bilan, on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P-Q \mid P^k - Q^k$$

(2) Si on note $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^P$, on a vu, en appliquant la question précédente, que $1 \leqslant i \leqslant d$, $P - X \mid P^i - X^i$. Ainsi, on a également $P - X \mid a_i P^i - a_i X^i$, pour tout $0 \leqslant i \leqslant d$ (cela marche pour $i = 0$ car $a_0 - a_0 = 0$). Ainsi, en sommant sur i, on a également $P - X \mid \sum_{i=0}^{d} a_i P^i - \sum_{i=0}^{d} a_i X^i = P(P) - P$.