CORRECTION EXERCICES COMPLÉMENTAIRES TD 17

IRÈNE MEUNIER

Exercice 10.

$\boxed{\textit{Pour quelles valeurs de } n \textit{ le polynôme } (X+1)^n - X^n - 1 \textit{ est-il divisible par } X^2+X+1 \textit{ ?}}$

Comme à l'exercice 7., on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ les racines de X^2+X+1. Pour que X^2+X+1 divise $(X+1)^n - X^n - 1$ il faut et il suffit que $(X+1)^n - X^n - 1$ ait j et j^2 pour racines. Or $-j^2 = j+1$, donc $(j+1)^n = j^n + 1 \Leftrightarrow (-j^2)^n = j^n + 1 \Leftrightarrow (-1)^n (j^n)^2 = j^n + 1$. Pour que cette équation soit vérifiée, on doit avoir $n = 1 + 3k$ ou $n = 2 + 3k$, et n pair. Autrement dit, il s'agit de tous les pairs qui ne sont pas multiples de 3.

Exercice 11.

Soit P le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ suivant : $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$.
Déterminez les coefficients a, b dans $\mathbb{Z}$ de façon que $(X-1)^2$ divise P. Même question avec le polynôme X^2+1.

On a $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. On veut que $(X-1)^2$ divise P, soit $P(1) = P'(1) = 0$. Cela revient au système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+1 & = & 0 \\ (n+1)a + nb & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} na+nb & = & -n \\ (n+1)a + nb & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} na+nb & = & -n \\ a & = & n \end{array}\right.$$

Où on a fait l'équation 2 moins l'équation 1.

Ainsi, $\boxed{a = n}$ et $\boxed{b = -a - 1 = -n - 1}$.

On veut savoir maintenant quand le polynome $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ divise P.

On veut donc $P(i) = ai^{n+1} + bi^n + 1 = 0$ et $P(-i) = a(-i)^{n+1} + b(-i)^n + 1 = 0$. Ça revient au système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ai^{n+1} + bi^n & = & -1 \\ -ai^{n+1} + bi^n & = & -(-1)^n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2ai^{n+1} & = & -1-(-1)^{n+1} \\ 2bi^n & = & -1+(-1)^{n+1} \end{array}\right.$$

Au final : $\boxed{a = -\frac{1+(-1)^{n+1}}{2i^{n+1}}}$ et $\boxed{b = \frac{-1+(-1)^{n+1}}{2i^n}}$.

On dirait que ce ne sont pas des nombres entiers, mais en séparant selon la parité de n, on a :

— Si $n = 2m$ est pair : $a = 0$ et $b = (-1)^{m+1}$

— Si $n = 2m+1$ est impair : $b = 0$ et $a = (-1)^m$.

Exercice 12.

Factoriser sur $\mathbb{C}$ les polynômes $P(X) = X^6 + X^5 + 2X^4 + 2X^3 + X^2 + X$
et $Q(X) = 2X^5 - 3X^4 - 3X^3 + 14X^2 - 14X + 4$

On veut factoriser $P(X) = X^6 + X^5 + 2X^4 + 2X^3 + X^2 + X$ dans $\mathbb{C}$. On remarque déjà que l'on peut factoriser par X : $P(X) = X(X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1)$. On note $Q_1(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$. On remarque que $Q_1(-1) = -1 + 1 - 2 + 1 - 2 + 1 = 0$, donc on peut le factoriser par $X+1$. Sans faire la division euclidienne complète, on peut trouver : $Q_1(X) = (X+1)(X^4 + 2X^2 + 1)$. Et on remarque une identité remarquable (justement) : $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$. De plus, dans $\mathbb{C}$, on a : $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$. Au bilan : $P(X) = X(X+1)(X+i)^2(X-i)^2$.

On a $Q(X) = 2X^5 - 3X^4 - 3X^3 + 14X^2 - 14X + 4$. Je n'ai pas envie de faire la division euclidienne de Q par $X - (1+i)$, donc je cherche d'autres racines évidentes de Q : $Q(1) = 2 - 3 - 3 + 14 - 14 + 4 = 0$ Donc 1 est une racine de Q et $Q(X) = (X-1)(2X^4 - X^3 - 4X^2 + 10X - 4)$. En notant $Q_1(X) = 2X^4 - X^3 - 4X^2 + 10X - 4$, on peut remarquer également, en cherchant un peu, $Q_1(-2) = 32 + 8 - 16 - 20 - 4 = 40 - 40 = 0$. Donc $Q_1(X) = (X+2)(2X^3 - 5X^2 + 6X - 2)$.

On note $Q_2(X) = 2X^3 - 5X^2 + 6X - 2$ Là, j'avoue que j'ai un peu triché, je n'aurais jamais trouvé cette racine seule, (sinon, on peut toujours faire la division euclidienne par $X - (i+1)$ comme indiqué dans l'énoncé) mais on trouve que $Q_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + 3 - 2 = 0$, donc on peut encore factoriser : $Q_2(X) = (X - \frac{1}{2})(2X^2 - 4X + 4)$. Comme il est dit dans l'énoncé, $i+1$ doit être racine de $2X^2 - 4X + 4$. Et comme ce polynome est à coefficients réels, son conjugué $1-i$ est également racine. On vérifie bien que : $(X - (i+1))(X - 1 + i) = X^2 - 2X + 2$.

Au bilan :

$$Q(X) = (X-1)(X+2)(X - \frac{1}{2})(X - 1 + i)(X - 1 - i)$$