CORRECTION EXERCICES COMPLÉMENTAIRES TD 18

IRÈNE MEUNIER

Exercice 16.

$\boxed{\textit{Factoriser sur } \mathbb{C} \textit{ puis sur } \mathbb{R} \textit{ les polynômes suivants en produits de polynômes irréductibles}}$

De manière générale, $\prod_{i=0}^{n-1} X^i$ a pour racines toutes les racines n-ièmes de l'unité différentes de 1. En effet :

$$X^n - 1 = (X-1)\prod_{i=0}^{n-1} X^i$$

C'est la conséquence d'une formule qui est la généralisation de l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. On a :

$$a^n - b^n = (a-b)\prod_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$$

On prend $a = X$ et $b = 1$ et on a le résultat.

(i) On note $P_1(X) = 1 + X + X^2 + X^3 = \prod_{k=1}^{3}(X - e^{\frac{2ik\pi}{4}}) = (X-i)(X+1)(X+i) \in \mathbb{C}[X]$. Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on regroupe les racines complexes conjuguées : $(X-i)(X+i) = X^2+1$. Au bilan :

$$P_1(X) = (X+1)(X^2+1)$$

(ii) On note $P_2(X) = 1+X+X^2+X^3+X^4 = \prod_{k=1}^{4}(X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}) = (X - e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{8i\pi}{5}})(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{\frac{6i\pi}{5}}) = (X-e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{-2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{\frac{-4i\pi}{5}})$. Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on regroupe encore les racines complexes conjuguées : $(X-e^{\frac{2i\pi}{5}})(X-e^{\frac{-2i\pi}{5}}) = X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X + 1$ et $(X-e^{\frac{4i\pi}{5}})(X-e^{\frac{-4i\pi}{5}}) = X^2 - 2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1$. Ainsi :

$$P_2(X) = (X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{5})X+1)(X^2-2\cos(\frac{4\pi}{5})X+1)$$

(iii) On note

$$P_3(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = \prod_{k=1}^{5}(X - e^{\frac{2ik\pi}{6}}) = (X+1)\prod_{\substack{k=-2\\k\neq 0}}^{2}(X - e^{\frac{2ik\pi}{6}})$$

Pour la factorisation dans $\mathbb{R}$, on regroupe toujours les termes conjugués. On obtient :

$$P_3(X) = (X+1)(X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{3})X+1)(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{3})X+1)$$

Exercice 17.

$\boxed{\textit{Factoriser } X^8 + X^4 + 2 \textit{ sur } \mathbb{R}}$

On pose le changement de variable $Y = X^4$. Le polynôme devient :

$$X^8 + X^4 + 1 = Y^2 + Y + 1$$

. On veut factoriser dans $\mathbb{R}$ mais on a besoin de passer par $\mathbb{C}$ d'abord.

Le polynôme Y^2+Y+1 a pour racines les racine 3-ièmes de l'unité, que l'on note $j = e^{2i\pi}3$ et $j^2 = e^{4i\pi}3 = \overline{j}$.

On veut maintenant résoudre $X^4 = j$ et $X^4 = \overline{j}$. z est racine de $X^4 - j$ si et seulement si $\overline{z}$ est racine de son polynôme conjugué (avec les coefficients conjugués) $X^4 - \overline{z}$. Donc il suffit de résoudre $X^4 - j$ et son conjugué sera directement dans $X^4 - \overline{j}$. Or on a $z^4 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $4\mathrm{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3} \mod 2\pi \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z) = \frac{2\pi}{12} \mod \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour $k = \{0,1,2,3\}$ on a $z = e^{\frac{2i\pi(1+3k)}{12}}$.

Donc, aucune racine n'étant réelle, on en déduit que :

$$X^8 + X^4 + 1 = (X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{6})X+1)(X^2-2\cos(\frac{2\pi}{3})X+1)(X^2-2\cos(\frac{7\pi}{6})X+1)(X^2-2\cos(\frac{10\pi}{6})X+1)$$