# CORRECTION EXERCICES COMPLÉMENTAIRES TD 19

IRÈNE MEUNIER

*Petit rappel de la décomposition en fraction continues, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ :*

— *Dans* $\mathbb{C}$ : Puisque $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos* (tout polynome de $\mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1$ y admet une décomposition en facteurs de degré 1. Ainsi, si on veut décomposer $F(X) = \frac{N(X)}{D(X)}$, avec $\deg N(X) < \deg D(X)$ (si ça n'est pas le cas, il faut commencer par une division euclidienne de $N(X)$ par $D(X)$) et $D(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{d_i}$, la décomposition sera de la forme :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{A_j}{(X - \alpha_i)^j}$$

où $A_j \in \mathbb{C}$, à déterminer, par diverses méthodes, que je résume en bas (mais rien ne vaut les exercices pour vraiment les comprendre).

— *Dans* $\mathbb{R}$ : Ici, on peut simplement dire que $D$ sera de la forme
$D(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{d_i} \prod_{i=1}^{l} (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{d'_i}$. La décomposition s'écrira :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{d_i} \frac{A_j}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{d'_i} \frac{B_j X + C_j}{(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^j}$$

Où $A_j, B_j, C_j \in \mathbb{C}$.

*Comment déterminer les coefficients ?* Il y a certaines méthodes plus ou moins systématiques à appliquer, l'objectif étant de ne pas les appliquer trop bêtement afin de minimiser les calculs et donc les chances de se tromper. Je ne peux pas vraiment les écrire ici, le plus important est de détailler avec des exemples, ce que je vais faire ensuite avec les exos :

— Parfois, ça se trouve de tête.

— (Marche bien lorsqu'on s'intéresse aux coefficients des facteurs de degré 1) Premièrement, on *multiplie* l'équation (souvent par le facteur multiplié « le plus haut degré » nombres de fois) et on *évalue* en la racine.

Si on est dans $\mathbb{R}$, on peut parfois repasser dans $\mathbb{C}$ pour évaluer en une des racines complexes de $(X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{d'_i}$ : on obtient $B_{d'_i}$ et $C_{d'_i}$ et évaluant en la racine et en identifiant parties réelles et imaginaires.

— (Une variante de la méthode précédente) on multiplie par un facteur $X$ au degré adéquat, et on fait tendre l'équation vers $\pm\infty$. Attention, ça ne marche que si les termes de divergent pas après multiplication et passage à la limite.

— Parfois, pour avoir plus d'équations, il faut simplement évaluer l'équation pour avoir quelque chose le plus simple possible. (Par exemple en 0, même si le dénominateur n'a pas zéro pour racine)

— Si on voit une « symétrie », *i.e.* si $F$ est paire, ou invariante par conjugaison, alors, cela aura une répercution sur les coefficients : on peut trouver ainsi des nouvelles relations entre eux, grâce à *l'unicité de la décomposition en éléments simples*.

— Toujours grâce à l'unicité de la décomposition, on peut également parfois faire diminuer la multiplicité d'un pôle, en soustrayant le terme adéquat (de coefficient connu) avec le dénominateur de la forme $(X-\alpha)^d$ ou $(X^2 + bX + c)^d$ « de plus haut degré » à l'équation.

— Un truc auquel il faut absolument penser quand on a $F(X) = \frac{N(X)}{(X^2+\beta X+\gamma)^d}$ : Faire des divisions euclidiennes successives ! La décomposition en éléments simples de $F$ s'écrit :

$$F(X) = E(X) + \sum_{j=1}^{d} \frac{B_j X + C_j}{(X^2 + \beta X + \gamma)^j} = E(X) + \sum_{j=1}^{d} \frac{B_j X + C_j}{P(X)^j}$$

$$= E(X) + \frac{B_1 X + C_1}{P(X)} + \cdots + \frac{B_{d-1} X + C_{d-1}}{P(X)^{d-1}} + \frac{B_d X + C_d}{P(X)^d}$$

Si on note $P(X) = X^2 + \beta X + \gamma$, et $E(X)$ la partie entière. On divise donc $N(X)$ par $P(X)$. On a alors : $N(X) = Q(X).P(X) + R(X)$ avec $\deg R \leqslant 1$. Dans ce cas, $F(X) = \frac{Q(X).P(X)+R(X)}{P(X)^d} = \frac{Q(X)}{P(X)^{d-1}} + \frac{R(X)}{P(X)^d}$. Par identification, les coefficients de $R$ correspondent à $B_d$ et $C_d$. Et ainsi de suite, en faisant des divisions euclidienne des *quotients* $Q$ successifs par $P$...

*Dans tous les exercices qui suivent, il s'agit de décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples*

**Exercice 21.**

(i)

$$F_1(X) = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$$

On fait d'abord la division euclidienne de $X^5 + X^4 + 1$ par $X^3 - X$.

$$\begin{array}{l}
X^5 + X^4 \qquad\qquad\qquad +1 = \left(X^3 - X\right)\left(X^2 + X + 1\right) + X^2 + X + 1 \\
\underline{-X^5 \qquad +X^3} \\
\qquad X^4 + X^3 \\
\qquad \underline{-X^4 \qquad +X^2} \\
\qquad\qquad X^3 + X^2 \\
\qquad\qquad \underline{-X^3 \qquad +X} \\
\qquad\qquad\qquad X^2 + X + 1
\end{array}$$

Au bilan, on a donc $X^5+X^4+1 = (X^3-X)(X^2+X+1)+X^2+X+1$, soit $F_1(X) = X^2+X+1+\frac{X^2+X+1}{X^3-X}$. Maintenant, de manière évidente, on a : $X^3-X = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Ainsi, la décomposition en éléments simples de $\frac{X^2+X+1}{X^3-X}$ est de la forme :

$$\frac{X^2+X+1}{X^3-X} = \frac{A_1}{X} + \frac{A_2}{X-1} + \frac{A_3}{X+1}$$

Ici, on utilise la méthode *multiplication & évaluation* la plus commune. Pour $A_1$, on obtient :

$$\frac{X^2+X+1}{X^2-1} = A_1 + X\left(\frac{A_2}{X-1} + \frac{A_3}{X+1}\right)$$

Et on évalue en 0 :

$$A_1 + 0 = \frac{1}{-1} = -1$$

On fait la même chose pour $A_2$ : On multiplie par $X-1$, et on évalue en 1.

$$\frac{X^2+X+1}{X^2+X} = A_2 + (X-1)\left(-\frac{1}{X} + \frac{A_3}{X+1}\right)$$

$$\frac{3}{2} = A_2 + 0$$

Pour $A_3$, on multiplie par $X+1$ et on évalue en $-1$.

$$\frac{X^2+X+1}{X^2-X} = A_3 + (X+1)\left(-\frac{1}{X} + \frac{3}{2}\frac{1}{X-1}\right)$$

$$\frac{1}{2} = A_3 + 0$$

Au bilan :

$$F_1(X) = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{3/2}{X-1} + \frac{1/2}{X+1}$$

(ii)

$$F_2(X) = \frac{X+i}{X^2+i}$$

Ici on n'a pas de partie entière car le degré au numérateur est déjà inférieur au degré du dénominateur. Ici, on est dans $\mathbb{C}$, évidemment. On cherche les racines de $X^2+i$ soit les racines carrées de $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Ces racines carrées sont de module 1, et d'argument $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}+\pi$, soit $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $-e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Donc $X^2+i = (X-e^{\frac{3i\pi}{4}})(X+e^{\frac{3i\pi}{4}})$. Pour trouver les coefficients, on procède comme précédemment. Si $F_2(X) = \frac{A_1}{X-e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{A_2}{X+e^{\frac{3i\pi}{4}}}$, on trouve : $A_1 = \frac{e^{\frac{3i\pi}{4}}+i}{2e^{\frac{3i\pi}{4}}} = \frac{1}{2}(1+e^{\frac{-i\pi}{4}})$.

De même, on trouve : $A_2 = \frac{1}{2}(1-e^{\frac{-i\pi}{4}})$

(iii)

$$F_3(X) = \frac{1}{1+X^4}$$

Les racines carrées de $(-1)$ sont les racines carrées de 1 « avec une rotation de $\frac{\pi}{4}$ », soit $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ et $e^{-\frac{i\pi}{4}}$. Ainsi, la décomposition en éléments simples de $F_3(X)$ est de la forme :

$$F_3(X) = \frac{A_1}{X-e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{A_2}{X-e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{A_3}{X-e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{A_4}{X-e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$$

Ici, notons que l'on n'a toujours que des racines simples.

Je vois deux manières de trouver les coefficients : ou bien en faisant la méthode habituelle, multiplier et évaluer, ou bien en faisant une variante : si on note $D(X) = (X-a)Q(X)$ dans $F(X) = \frac{N(X)}{D(X)}$, et si on multiplie par $X-a$, alors $(X-a)F(X) = \frac{N(X)}{Q(X)}$ et le coefficient de $\frac{1}{(}X-a)$ vaut $\frac{N(a)}{Q(a)} = \frac{N(a)}{D'(a)}$.

Par la première méthode, on obtient $A_k = 1/\prod_{j\neq k}(e^{\frac{i\pi(2k-1)}{4}} - e^{\frac{i\pi(2j-1)}{4}})$ et par la deuxième méthode, on obtient $A_k = \frac{1}{4e^{\frac{3i\pi(2k-1)}{4}}}$

Cela se retrouve avec la formule de la dérivation du produit : On dérive $X^4+1 = \prod(X - e^{\frac{i\pi(2j-1)}{4}})$, et on évalue en une racine fixée $e^{\frac{i\pi(2k-1)}{4}}$ (Faites-le c'est un bon exercice pour se rappeler la formule généralisée de la dérivation d'un produit de fonctions : $(\prod u_i(x))' = \sum_k \prod_{i\neq k} u_k'(x)u_i(x)$ (on l'avait fait avec 3 facteurs dans un des premiers TD).

(iv)

$$F_4(X) = \frac{X^2+1}{X^4+1}$$

Ici, on a une décomposition en éléments simples du même type que précédemment :

$$F_4(X) = \frac{A_1}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{A_2}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{A_3}{X - e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{A_4}{X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$$

Et on obtient de même : $A_k = \frac{e^{\frac{2i\pi(2k-1)}{4}}+1}{4e^{\frac{3i\pi(2k-1)}{4}}} = \frac{1}{4}(e^{-\frac{i\pi(2k-1)}{4}} + e^{-\frac{3i\pi(2k-1)}{4}})$

(v)

$$F_5(X) = \frac{X^2+X+1}{X^4+1}$$

On a exactement la même forme :

$$F_5(X) = \frac{A_1}{X - e^{\frac{i\pi}{4}}} + \frac{A_2}{X - e^{-\frac{i\pi}{4}}} + \frac{A_3}{X - e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{A_4}{X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}}$$

Et cette fois : $A_k = \frac{e^{\frac{i\pi(2k-1)}{2}} + e^{\frac{i\pi(2k-1)}{4}} + 1}{4e^{\frac{3i\pi(2k-1)}{4}}}$.

(vi)

$$F_6(X) = \frac{1}{X^n - 1}$$

On utilise la même méthode, si on note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ :

$$F_6(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{A_i}{X - \zeta^i}$$

Ainsi, on a $A_i = \frac{1}{n\zeta^{i(n-1)}} = 1/\prod_{j\neq i}(\zeta^i - \zeta^j)$.

**Exercice 22.**

— $\frac{X^2+X}{(X-1)^n} = \frac{X^2-2X+1+(3X-1)}{(X-1)^n} = \frac{(X-1)^2}{(X-1)^n} + \frac{3X-3}{(X-1)^n} + \frac{2}{(X-1)^n}$

On a donc, si $n \geqslant 2$ : $\frac{X^2+X}{(X-1)^n} = \frac{1}{(X-1)^{n-2}} + \frac{3}{(X-1)^{n-1}} + \frac{2}{(X-1)^n}$

Si $n=1$ on a de même $\frac{X^2+X}{X-1} = X + 2 + \frac{2}{X-1}$

— $\frac{(X+1)^n}{(X-1)^n}$

Ici, on utilise la formule du binôme de Newton : $(X+1)^n = ((X-1)+2)^n = \sum_{k=0}^n (X-1)^{n-k}2^k$. D'où :

$$\frac{(X+1)^n}{(X-1)^n} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{(X-1)^k}$$

Ce qui donne la décomposition demandée.

— $\frac{1}{\prod_{p=0}^n (X+p)}$.

Ici, la décomposition est de la forme : $\frac{1}{\prod_{p=0}^n (X+p)} = \sum_{p=0}^n \frac{A_p}{X+p}$. En multipliant par $(X+p)$ et en évaluant en $-p$, on a : $A_p = \frac{1}{\prod_{i\neq p}(i-p)}$.

**Exercice 23.**

— $F(X) = \frac{1}{(X^4-1)^2}$ La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$F(X) = \frac{A_1}{X-1} + \frac{B_1}{(X-1)^2} + \frac{A_2}{X+1} + \frac{B_2}{(X+1)^2} + \frac{A_3}{X-i} + \frac{B_3}{(X-i)^2} + \frac{A_4}{X+i} + \frac{B_4}{(X+i)^2}$$

On peut d'abord utiliser des symétries : $F(X) = F(-X) = F(iX) = F(-iX)$ et également $F(X) = F(\overline{X})$. On a alors $A_1 = -A_2$, $B_1 = B_2$, $A_3 = -A_4$, $B_3 = B_4$, et $A_4 = -iA_1$, $B_1 = -B_4$, $A_3 = -iA_2 = iA_1$, $B_2 = -B_3$. Également $A_3 = \overline{A_4}$, $B_3 = \overline{B_4}$.

La décomposition devient :

$$F(X)=\frac{A_1}{X-1}+\frac{B_1}{(X-1)^2}-\frac{A_1}{X+1}+\frac{B_1}{(X+1)^2}+\frac{iA_1}{X-i}-\frac{B_1}{(X-i)^2}-\frac{iA_1}{X+i}-\frac{B_1}{(X+i)^2}$$

Si on multiplie par $(X-1)^2$ et qu'on évalue en 1 : $B_1=\frac{1}{2^2.2^2}=\frac{1}{16}$

$$F(X)=A_1\left[\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}-\frac{1}{iX+1}+\frac{1}{iX-1}\right]+\frac{1}{16}\left[\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{1}{(X+i)^2}\right]$$

Si on évalue la fraction en 0, on obtient :
$1=-4A_1+\frac{1}{4}\Leftrightarrow A_1=-\frac{3}{16}$
Au bilan :

$$F(X)=\frac{3}{16}\left[-\frac{1}{X-1}+\frac{1}{X+1}-\frac{i}{X-i}+\frac{i}{X+i}\right]+\frac{1}{16}\left[\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{1}{(X+1)^2}-\frac{1}{(X-i)^2}-\frac{1}{(X+i)^2}\right]$$

— $H(X)=\frac{X^2+1}{(X-1)^3(X^2-X+1)^3}$ (Décomposer sur $\mathbb{R}$)
Alors, celle-là, je n'ai pas vraiment d'idée d'astuce facile... C'est un enfer de calcul. Mais au moins, c'est un entraînement.

Vous n'aurez sans doute pas cela à l'examen, en tout cas.

Pour les coefficients de $(X-1)^n$, on peut utiliser, pour changer, une technique délicate, de *division selon les puissances croissantes*. Le principe est le suivant. Si :

$$H(X)=\frac{A_1}{X-1}+\frac{A_2}{(X-1)^2}+\frac{A_3}{(X-1)^3}+\frac{B_1X+C_1}{X^2-X+1}+\frac{B_2X+C_2}{(X^2-X+1)^2}+\frac{B_3X+C_3}{X^2-X+1)^3}$$

On multiplie par $(X-1)^3(X^2-X+1)^3$, pour avoir des polynomes. Et on fait une translation $X\to X+1$, ce qui donne :

$$X^2+1=(A_1(X-1)^2+A_2(X-1)+A_3)(X^2-X+1)^3+P(X)$$

$$(X+1)^2+1=X^2+2X+2=(A_1X^2+A_2X+A_3)(X^2+X+1)^3+P(X+1)$$

Or, pour $A,B$ polynomes avec $B(0)\neq 0$, il existe un unique polynome $R$, et des uniques coefficients $A_i$ tels que :

$$A(X)=B(X)(A_1X^2+A_2X+A_3)+X^3R(X)$$

On appelle ça une division selon les puissances croissantes à l'ordre 3. On a : $(X^2+X+1)^3=X^6+3X^5+6X^4+7X^3+6X^3+3X+1$. Cela fonctionne comme une division de polynomes, mais à l'envers, et on s'arrête à la puissance 3.

$$\begin{array}{cccc|c}
2+ & 2X+ & X^2 & & 1+3X+6X^2+7X^2+6X^4+3X^5+X^6 \\ \cline{5-5}
-2- & 6X- & 12X^2 & +\cdots & 2-4X+X^2 \\ \cline{1-4}
- & 4X- & 11X^2 & +\cdots & \\
+ & 4X+ & 12X^2 & +\cdots & \\ \cline{1-4}
 & & X^2 & +\cdots & \\
 & & -X^2 & +\cdots & \\ \cline{1-4}
 & & & \cdots &
\end{array}$$

Demandez-moi si vous souhaitez plus d'information sur la division selon les puissances croissantes, mais ça n'est pas très important.

Ainsi, les coefficients sont ceux que l'on obtient dans le quotient : $A_1=1$, $A_2=-4$ et $A_3=2$.

Pour l'instant, on a :

$$H(X)=\frac{1}{X-1}-\frac{4}{(X-1)^2}+\frac{2}{(X-1)^3}+\frac{B_1X+C_1}{X^2-X+1}+\frac{B_2X+C_2}{(X^2-X+1)^2}+\frac{B_3X+C_3}{X^2-X+1)^3}$$

On peut aussi trouver ces coefficients selon des moyens plus simples...

Je n'ai vraiment pas de méthode simple pour trouver les autres coefficients. J'ai donc vérifié mes calculs avec un logiciel de calcul. On a :

$$\frac{1}{X-1}-\frac{4}{(X-1)^2}+\frac{2}{(X-1)^3}=\frac{X^2-6X+7}{(X-1)^3}$$

Et :

$$\begin{aligned} H(X) - \frac{X^2-6X+7}{(X-1)^3} &= \frac{X^2+1-(X^2-6X+7)(X^2-X+1)^3}{(X-1)^3(X^2-X+1)^3} \\ &= \frac{-X^8+9X^7-31X^6+64X^5+64X^5-X^4+88X^3-60X^2+27X-6}{(X-1)^3(X^2-X+1)^3} \\ &= \frac{(X-1)^3(-X^5+6X^4-10X^3+15X^2-9X+6}{(X-1)^3(X^2-X+1)^3} \end{aligned}$$

Donc :

$$H(X) - \frac{X^2-6X+7}{(X-1)^3} = \frac{-X^5+6X^4-10X^3+15X^2-9X+6}{(X^2-X+1)^3}$$

Où la dernière ligne est obtenue par divisions euclidiennes successives par $(X-1)$.

On peut maintenant faire des divisions euclidiennes par $X^2-X+1$ On trouve : $-X^5+6X^4-10X^3+15X^2-9X+6 = (-X^3+5X^2-4X+6)(X^2-X+1)+X$ et puis : $-X^3+5X^2-4X+6 = (-X+4)(X^2-X+1)+X+2$. Ainsi :

$$-X^5+6X^4-10X^3+15X^2-9X+6 = (-X+4)(X^2-X+1)^2+(X+2)(X^2-X+1)+X$$

Et on voit là apparaître la décomposition en éléments simples :

$$H(X) - \frac{X^2-6X+7}{(X-1)^3} = \frac{-X+4}{X^2-X+1} + \frac{X+2}{(X^2-X+1)^2} + \frac{X}{(X^2-X+1)^3}$$

Au bilan :

$$H(X) = \frac{1}{X-1} - \frac{4}{(X-1)^2} + \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{-X+4}{X^2-X+1} + \frac{X+2}{(X^2-X+1)^2} + \frac{X}{X^2-X+1)^3}$$

— $T(X) = \frac{X^6+2}{(X^2+1)^2(X-1)}$ (Décomposer sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$)

On fait d'abord la division euclidienne de $X^6+2$ par $(X^2+1)^2(X-1) = X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1$. On trouve $X^6+2 = (X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1)(X+1) - X^4+X^2+3$

On regarde maintenant : $\frac{-X^4+X^2+3}{(X^2+1)^2(X-1)}$. Le coefficient de $\frac{1}{X-1}$ est $\frac{3}{4}$. Le reste de la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{A_1}{X+i} + \frac{B_1}{(X+i)^2} + \frac{A_2}{X-i} + \frac{B_2}{(X-i)^2}$$

Avec $A_1 = \overline{A_2}$ et $B_1 = \overline{B_2}$. On trouve les coefficients $B_1 = \frac{1}{8}(1+i)$ et $B_2 = \frac{1}{8}(1-i)$, en évaluant $(X \pm i)^2 \frac{-X^4+X^2+3}{(X^2+1)^2(X-1)}$ en $\pm i$.

On évalue en 0, et en $+\infty$ en ayant multiplié par $X$. On trouve :

$$-2 = \frac{A_1 - \overline{A_1}}{i} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(A_1) = -1$$

$$-1 = \frac{3}{4} + A_1 + \overline{A_1} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(A_1) = -\frac{7}{8}$$

D'où $A_1 = -\frac{7}{8} - i$ et $A_2 = -\frac{7}{8} + i$. Ainsi :

$$T(X) = X+1+\frac{\frac{3}{4}}{X-1} - \frac{\frac{7}{8}+i}{X+i} + \frac{\frac{1}{8}(1+i)}{(X+i)^2} + \frac{-\frac{7}{8}+i}{X-i} + \frac{\frac{1}{8}(1-i)}{(X-i)^2}$$

Pour trouver la décomposition dans $\mathbb{R}$, on regroupe les termes en $(X+i)$, $(X-i)$ et $(X+i)^2$, $(X-i)^2$. On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{7}{8}-i}{X+i} + \frac{\frac{1}{8}(1+i)}{(X+i)^2} + \frac{-\frac{7}{8}+i}{X-i} + \frac{\frac{1}{8}(1-i)}{(X-i)^2} &= \frac{-\frac{7}{4}X-2}{X^2+1} + \frac{\frac{1}{4}X^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{4})-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}}{(X^2+1)^2} \\ &= \frac{-\frac{7}{4}X-2+\frac{1}{4}}{X^2+1} + \frac{-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2}}{(X^2+1)^2} \\ &= -\frac{7(X+1)}{4(X^2+1)} - \frac{X+1}{2(X^2+1)^2} \end{aligned}$$

Au bilan :

$$T(X) = X+1+\frac{3}{4(X-1)} - \frac{7(X+1)}{4(X^2+1)} - \frac{X+1}{2(X^2+1)^2}$$