Correction exercices complémentaires TD2

Irène Meunier

4 novembre 2020

NB : Je me permets de faire de petits rappels sur la composée de fonctions, comme c'est le plus délicat.

Savoir trouver le domaine de définition d'une composée de fonctions (pour le domaine de dérivabilité, ça marche de la même manière, on regarde juste les domaines de dérivabilité des différentes fonctions).

Soient A, B, C et D des intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $g : A \to B$ et $f : C \to D$ deux fonctions. Vous devez avoir dans votre cours que la composée $f \circ g$ est définie sur $A \cap g^{-1}(C)$. En pratique, ça veut dire qu'il faut non seulement regarder les endroits où g est définie mais en plus déterminer l'ensemble des x tels que $g(x) \in C$, là où les valeurs de g sont telles que f est définie.

Mais des exercices permettent de s'en convaincre bien mieux que n'importe quelle explication. Ce qui compte dans la rédaction, c'est que vous montriez au correcteur ce que vous avez compris.

Apprenez bien la formule pour la dérivée de la composée de deux fonctions aussi, elle est très utile.

Exercice 11.

> On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$.
> 1. Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f.
> 2. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$ puis en déduire les équations cartésiennes des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

1. $f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

   Ici, on a une fonction qui est produit et composée de plusieurs fonctions connues. Par exemple, c'est le produit de $x \mapsto x$, de $x \mapsto \sqrt{x}$, et de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$, qui est la composée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de $x \mapsto x+1$.

   Un exemple de rédaction serait :

   La fonction id : $x \mapsto x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $(\mathbb{R}^+)^*$.

   La fonction affine $x \mapsto x+1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

   - On a $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ là où le dénominateur ne s'annule pas (mais notez que -1 n'est pas compris dans l'intervalle de définition de racine carrée).

   Conclusion : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $(\mathbb{R}^+)^*$.

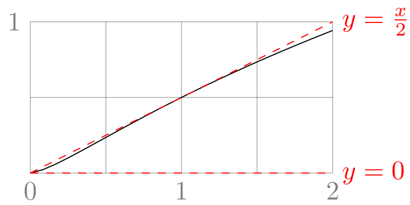
2. Ici, on dérive un produit, par exemple : $f = uv$, où $u(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ et $v(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$, pour $x \neq -1$. Alors $u'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et $v'(x) = -(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$. Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{x\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}(x+3)}{(x+1)^2}$.

   Donc $f'(0) = 0$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$.

   La formule pour la droite tangente au graphe $\mathscr{C}$ en un point a (où la fonction est dérivable) est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

   Ici, ça donne $y = 0.x + 0 = 0$ pour la tangente en 0, et $y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$ pour la tangente en 1.

   Voici la représentation de f en noir, et les tangentes en rouge.



Exercice 12.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$. 1. Calculer les premières dérivées de f afin de conjecturer une expression de $f^{(n)}$. 2. Démontrer la conjecture précédente.

1. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

   On a (en utilisant la formule de la composée) $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x-1)^4} \cdots$

   On peut conjecturer : $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$.

   On montre cette propriété par récurrence :

   Pour $n = 1$ ok.

   On suppose que $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$ pour un certain $n \geqslant 1$.

$$\begin{array}{rcll} f^{(n+1)}(x) & = & (f^{(n)})'(x) & \\ & = & \left(\dfrac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}\right)' & \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ & = & -\dfrac{(-1)^n.n!(n+1)}{(x-1)^{n+2}} & \\ & = & \dfrac{(-1)^{n+1}.(n+1)!}{(x-1)^{n+2}} & \end{array}$$

   La récurrence est vérifiée, donc, conclusion : $\forall n \geqslant 1, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}$