CORRECTION EXERCICES COMPLÉMENTAIRES TD 20

IRÈNE MEUNIER

Dans les deux exercices, il s'agit de déterminer les primitives des fonctions suivantes.

Exercice 26.

(1) On a la fonction $f_1(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

On peut écrire : $f_1(x) = \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$. Pour le 2e terme, on peut faire une intégration par parties avec $u(t) = t$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ avec $v(t) = \frac{1}{2}\frac{-1}{1+t^2}$. Ainsi,

$$\int^x \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{(1+t^2)}dt + C$$

Soit une primitive :

$$\int^x f_1(t)dt = \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + C = \frac{1}{2}(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}) + C$$

(2) $f_2(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$.

Même procédé que précédemment : $f_2(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$. On fait également une IPP avec le deuxième terme, $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$ donc $v(x) = \frac{1}{4}\frac{-1}{(1+x^2)^2}$:

$$\int^x \frac{t^2}{(t^2+1)^3}dt = -\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int^x \frac{1}{(1+t^2)^2}dt + C$$

On connaît la primitive de $\frac{1}{(1+t^2)^2}$ par la question précédente.

$$\begin{aligned}\int^x f_2(t)dt &= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\int^x \frac{1}{(1+t^2)^2}dt + C \\ &= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}(\arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}) + C\end{aligned}$$

(3) $f_3(x) = \frac{1}{(x^2+4x+3)^2}$

Ici, on peut réécrire le polynôme de degré 2 sous forme canonique : $\frac{1}{(x^2+3x+3)^2} = \frac{1}{\left((x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left((x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2}))^2+1\right)^2}$

Donc :

$$\int^x f_3(x)dx = \int^x \frac{16}{9}\frac{1}{\left((\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{3}{2}))^2+1\right)^2}dt$$

On pose le changement de variable : $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{3}{2})$, et donc $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{3}{2}$. On a donc $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du$.

$$\begin{aligned}\int^x f_3(x)dx &= \int^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2})} \frac{16}{9}\frac{1}{(u^2+1)^2}\frac{\sqrt{3}}{2}du \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{2}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2})) + \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2})}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2}))^2+1}\right) + C \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2})) + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{3}{2})}{\frac{4}{3}(x+\frac{3}{2})^2+1}\right) + C\end{aligned}$$

Exercice 27. L'idée générale ici est de faire des décompositions en éléments simples.

(1) $g_1(x) = \frac{3}{(x-2)x(x-4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-4}$.

On multiplie par x et en on évalue en 0 : $\frac{3}{(-2).(-4)} = A_1$ d'où $A_1 = \frac{3}{8}$.

De manière similaire, on trouve $A_2 = -\frac{3}{4}$ et $A_3 = \frac{3}{8}$.

Donc $g_1(x) = \frac{\frac{3}{8}}{x} + \frac{-\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{3}{8}}{x-4}$.

Une primitive est donc : $G_1(x) = \frac{3}{8}\log(x) - \frac{3}{4}\log(x-2) + \frac{3}{8}\log(x-4)$.

(2) $g_2(x) = \frac{3x+3}{(x-1)^3}$

Ici, $g_2(x) = \frac{3x-3+6}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{6}{(x-1)^3}$

Une primitive est donc : $G_2(x) = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{6}{4(x-1)^4} = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{2(x-1)^4}$.