# Correction exercices complémentaires TD3

Irène Meunier

5 novembre 2020

**Exercice 17.**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto xe^x$
Est-ce que $f$ est bijective ?

On a $f(x) = xe^x$. On calcule la dérivée avec la formule du produit : $f'(x) = (x+1)e^x$. On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) > 0$.

$f$ est strictement croissante, continue sur $\mathbb{R}^+$, donc injective.

On a $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et $f$ est surjective. Donc $f$ est bijective.

**Exercice 18.**

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$

1. Est-ce que $f$ est injective ?
2. Est-ce que $f$ est surjective ?
3. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$

$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{-1-x^2+2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2}$.

On calcule la dérivée (avec la formule de la dérivée de l'inverse) $f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$.

$f'(0) = 0$, $f' > 0$ pour $x < 0$ et $f' < 0$ pour $x > 0$. On a $f(0) = 1$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | -1 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | -1 |

*Note* : On peut remarquer que la fonction $f$ est paire, ce qui permet de n'avoir à l'étudier que pour les $x \geqslant 0$ par exemple.

1. $f$ n'est pas injective : par exemple $f(-1) = f(1)$ (elle est paire) alors que $-1 \neq 1$.
2. $f$ n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$ : on peut le voir sur le tableau, par exemple $-1$ n'a pas d'antécédent. Le mieux est de résoudre le système $\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{2}{1+x^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{1+x^2} = 0$, qui n'a pas de solution.
3. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (tout les réels atterrissent nécessairement dans $\mathbb{R}$ par cette fonction) et $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, comme on le voit sur le tableau. (Pour être rigoureux, on devrait dire : d'après l'étude précédente, $f$ a un minimum en $-1$, un maximum en $1$, et est continue, donc on a le résultat annoncé par le TVI. )

**Exercice 19.**

On considère quatre sous-ensembles $A, B, C, D$ de $\mathbb{R}$ et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$.
Démontrer que :
$g \circ f$ injective $\Rightarrow$ $f$ injective
$g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ $g$ surjective
Démontrer que :
($g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives) $\Leftrightarrow$ ($f$,$g$ et $h$ sont bijectives)

Soient $f : A \to B$, $g : B \to C$ des fonctions. Notez qu'on n'a rien supposé sur la dérivabilité de ces fonctions, donc on ne peut pas utiliser de critère sur la dérivée. Il va falloir revenir à la définition.

On suppose $g \circ h$ injective. Soient $x, x' \in A$ tels que $f(x) = f(x')$. On compose par $g$ : $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Or on a supposé $g \circ f$ injective, donc $x = x'$. Et donc $f$ injective.

On suppose maintenant $g \circ f : A \to C$ surjective. Soit $y \in C$. On veut montrer qu'il admet un antécédent par $g$. On sait que $y$ admet un antécédent par $g \circ f$. $\exists x \mid g \circ f(x) = y$. Alors, $f(x)$ est un antécédent par $g$ de $y$.

Maintenant, soit $h : C \to D$ une autre fonction, et on suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. En utilisant ce qu'on vient de démontrer, on va montrer que $f$, $g$ et $h$ sont bijectives.

$g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective. De même, $g \circ f$ injective $\Rightarrow g$ injective. Donc $g$ bijective. En particulier, $g^{-1}$ existe (et est bijective).

La composée de deux fonctions bijectives étant bijective, on a $g^{-1} \circ (g \circ f) = f$ est bijective. De même, $(h \circ g) \circ g^{-1} = h$ est bijective.