Correction exercices complémentaires TD4

Irène Meunier

5 novembre 2020

Exercice 23.

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la fonction f définie par $f_a(x) = e^{x\log(a)}$. On notera a^x l'expression $f_a(x)$.
1. Quel est l'ensemble de définition de f_a ?
2. Justifier la notation a^x utilisée pour désigner $f_a(x)$.
3. Démontrer que, dans certains cas, $x \mapsto a^x$ réalise une bijection. Préciser les ensembles de départ et d'arrivée.
4. Lorsque $x \mapsto a^x$ est bijective, déterminer sa bijection réciproque, sa dérivée et la dérivée de sa réciproque.

Soit $a > 0$.

1. f_a est la composée de $x \mapsto \ln(a)x$, qui est linéaire donc définie sur $\mathbb{R}$ (ici, a est fixé), et de exp, qui est définie sur $\mathbb{R}$. Donc f_a est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Parce que $e^{\ln(a).x} = (e^{\ln(a)})^x$. Or ln et exp sont réciproques l'une de l'autre. Donc $e^{\ln(a)} = a$, et donc $f_a(x) = a^x$.
3. On calcule la dérivée de f_a. C'est la dérivée d'une composée :
   $f_a'(x) = \ln(a)e^{x.\ln(a)} = \ln(a)a^x$.
   On peut faire une **disjonction de cas** :
   - si $0 < a < 1$: Alors on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) < 0$. En effet, $\ln(a) < 0$ et (car $a > 0$) $a^x > 0$. Dans ce cas, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et de plus, comme $\frac{1}{a} > 1$:
   $$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{-\ln\left(\frac{1}{a}\right)x} = \lim_{y\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)y} = +\infty$$
   $$\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{y\to-\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{a}\right)y} = 0$$
   Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$.
   - si $a > 1$, on montre par les même calculs que f réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$.
   - si $a = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = 0$. Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $f_1(x) = 1$ et f_1 ne réalise pas de bijection.
4. On suppose maintenant $a \neq 1$. On a déjà déterminé la dérivée de f_a. Pour trouver une expression explicite de la réciproque, on peut résoudre le système, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in (\mathbb{R}^+)^*$:
   $$\begin{aligned} a^x &= y \\ \Leftrightarrow x\ln(a) &= \ln(y) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \end{aligned}$$
   Donc on a $f_a^{-1}(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$. Sa dérivée est : $(f_a^{-1}(y))' = \frac{1}{y\ln(a)}$.