Correction exercices complémentaires TD5

Irène Meunier

6 novembre 2020

Aide sur l'exercice 26.

Donner le domaine de définition et calculer les fonctions suivantes :
4. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$
5. $x \mapsto \tan(\arctan(x))$
6. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$

On a déjà vu en classe le 2.. La méthode est similaire ici.

4. Elle est définie sur $\mathbb{R}$. La valeur de arccos étant comprise entre 0 et π, car cos étant une bijection sur $[0, \pi]$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe $\tilde{x} \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = \cos(\tilde{x})$. De plus, ce $\tilde{x}$ est unique (convainc-t'en !). Et on a $\arccos(\cos(x)) = \tilde{x}$.
   Ça c'est la théorie. Comment trouver ce $\tilde{x}$ en pratique ? On utilise notamment la parité du cos, et sa périodicité.
   $$\begin{cases} \cos(-x) & = & \cos(x) \\ \cos(x + 2\pi) & = & \cos(x) \end{cases}$$
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [k\pi, (k + 1)\pi]$, forcément. Alors, on peut distinguer en fonction de la parité de k :
   — $k = 2m$: Alors $x - 2m\pi \in [0, \pi]$ et $\cos(x) = \cos(x - 2m\pi)$, par périodicité. Donc $x - 2m\pi$ est le nombre recherché : $\arccos(\cos(x)) = x - 2m\pi$
   — $k = 2m - 1$: Alors $x - 2m\pi \in [-\pi, 0]$. Dans ce cas, $2m\pi - x \in [0, \pi]$ et $\cos(x) = \cos(x - 2m\pi) = \cos(2m\pi - x)$ par périodicité et parité. Et donc : $\arccos(\cos(x)) = 2m\pi - x$.
   Je pense que si tu écris tout ça sur une copie, on considère que tu as fini le point.
5. Il n'y a pas de problème de définition. arctan est à valeurs dans $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, et tan y est bien définie. On est donc définis sur $\mathbb{R}$, le domaine de définition de arctan. Là, il n'y a pas de problème : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$.
6. Ici, on note que tan n'est définie que sur $\mathbb{R} \setminus \{k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}^*\}$. On procède comme en 4. sauf que là on utilise la π-périodicité de tan. Je te laisse essayer. On doit trouver que $\arctan(\tan(x)) = x$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, puis si $x \in]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + (k + 1)\pi[$, $\arctan(\tan(x)) = x - k\pi$.

Exercice 27.

1. Calculer $\arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}})$, $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{6}))$, $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{6}))$, $\sin(\arcsin(1))$, $\arcsin(\sin(1))$ et $\arctan(\tan(3))$.
2. Calculer $\arcsin(\sin(\frac{11\pi}{7}))$ et $\arctan(\tan(-\frac{17\pi}{5}))$.
3. Calculer $\cos(\arcsin(x))$, $\tan(\arcsin(x))$, $\cos(\arctan(x))$.
4. En utilisant les formules de trigonométrie habituelles, simplifier les expressions suivantes : $\sin(\arccos(x))$, $\cos(2\arcsin(x))$, et $\sin(\arctan(x))$.

1. $\arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$, $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$, $\sin(\arcsin(1)) = 1$ ($\sin \circ \arcsin$ toujours égal à l'identité sur $[-1, 1]$), $\arcsin(\sin(1)) = 1$ ($1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), $\arctan(\tan(3)) = 3 - \pi$.
2. $\frac{11\pi}{7} = 2\pi - \frac{3\pi}{7}$, or $\frac{\pi}{2} > -\frac{3\pi}{7} > -\frac{\pi}{2}$. Donc $\arcsin(\sin(\frac{11\pi}{7})) = -\frac{3\pi}{7}$.
   $\arctan(\tan(-\frac{17\pi}{5})) = -\frac{2\pi}{5}$.
3. On peut noter que si $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\theta) \geqslant 0$. Donc on peut écrire $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$. Donc, en particulier, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
   $\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On a aussi $\arctan(\theta) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Donc, $\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\cos^2(\arctan(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ car $\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$. (il y a un moyen mnémotechnique géométrique pour ces trois derniers, dessinez des triangles).

4. De même, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$.
$\cos(2\arcsin(x)) = \cos^2(\arcsin(x)) - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin(x)) = 1 - 2x^2$.
$\sin(\arctan(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arctan(x))} = \sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 28.

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \text{sign}(x)\frac{\pi}{2}$.

Le plus simple est de passer par la dérivée : On note, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Alors f est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. On note également que $f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = -\frac{\pi}{4}$, ce qui donne la valeur sur chacun des intervalles et donc le résultat.

Exercice 29.

On considère la fonction définie par $f(x) = \arcsin(\frac{x^2-1}{x^2+1})$.
1. Démonter que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée. (simplifier au maximum l'expression de f').
2. En déduire une autre expression de f.

1. (Je rappelle que les fonctions ne sont dérivables que sur des intervalles 'ouverts') arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$. Une étude de fonctions similaire à ce que, j'espère, vous avez fait précédemment au TD2 Exercice 18 permet de montrer que $g(x) := \frac{x^2-1}{x^2-1}$ est à valeurs dans $[-1, 1[$ et que -1 est atteint uniquement en 0. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On calcule la dérivée en utilisant la dérivée de la composée : $f'(x) = g'(x).\arcsin'(g(x))$, où $g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. Donc $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x^2-1}{x^2+1})^2}}$. Après calcul et simplification, on obtient :

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2}}$$

Donc

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{2}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Pour voir une autre expression de f on peut utiliser les formules de trigonométrie. Si on note $x = \tan(\frac{\theta}{2})$ ($\theta = 2\arctan(x)$), alors on peut vérifier que $\cos(\theta/2) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin(\theta/2) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Alors $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. En particulier, $f(x) = \arcsin(-\cos(\theta)) = -\arcsin(\cos\theta)$ (Car arcsin est impaire). Donc, d'après la formule de l'exercice 24, on a $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \arccos(\cos\theta)$.
Si $x > 0$, on a $\theta \in [0, \pi]$, et donc $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \theta = -\frac{\pi}{2} + 2\arctan(x)$.
Si $x < 0$, on a $\theta \in [-\pi, 0]$, et donc $f(x) = -\frac{\pi}{2} - \theta = -\frac{\pi}{2} - 2\arctan(x)$. Si on veut se convaincre de ça, on peut dériver ces formules et constater qu'on obtient la même dérivée qu'en 1.. De plus, on a la même valeur en 0 pour ces deux formules : $-\frac{\pi}{2}$.