Correction exercices complémentaires TD6

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 33.

On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x.
Tracez le graphe de la fonction $x \mapsto \{x\}$ et montrez qu'elle est périodique.

Je rappelle que la partie entière est définie pour $x \in \mathbb{R}$ comme l'entier k tel que $k \leqslant x < k+1$.

La partie fractionnaire est linéaire de 0 vers 1 exclu sur tout intervalle $[k, k+1[$. On conjecture qu'elle est périodique de période 1. Montrons-le. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\{x+1\} = x + 1 - E(x+1)$$

Or, par la définition de la partie entière, on a $E(x+1) = E(x) + 1$. Donc :

$$\{x+1\} = x + 1 - E(x) - 1 = x - E(x) = \{x\}$$

Exercice 34.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
   Montrez que $|f|$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et tracez son graphe.
2. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(\pi f(x))$, où f est définie à la question précédente.
   Déduisez de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.

1. Après calcul, on obtient que la dérivée de f est : $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Son signe dépend du signe du numérateur, qui est positif si $x \in [-1, 1]$ et négatif ailleurs.

   On peut remarquer que $f(-x) = -f(x)$ donc que f est impaire. Il suffit donc de l'étudier pour $x \geqslant 0$ et puis de faire la symétrie de son graphe sur $\mathbb{R}^+$ par rapport à l'origine pour obtenir son graphe sur $\mathbb{R}$.

   D'après l'étude des variations, on voit que f a un maximum en $x = 1$, qui vaut $f(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $|f|$ est majorée par $1/2$.

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

   (Pour être plus précis quand on dessine le graphe de f, on peut par exemple regarder la dérivée en 0, et avoir une idée de la pente de la tangente : $f'(0) = 1$)

2. On voit déjà que $\pi f(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc la fonction g ne sera pas périodique. On a : $g(-x) = \sin(\pi f(-x)) = \sin(-\pi f(x)) = -\sin(\pi f(x)) = -g(x)$ (plus généralement, la composée de deux fonctions impaires est impaire). Pour les variations, il faut calculer la dérivée de g :

$$g'(x) = \pi f'(x).\cos(\pi f(x))$$

   Or, on remarque que, sur $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos > 0$, donc le signe de g' ne dépend que du signe de f'. On retrouve ainsi, 'la même allure' pour le graphe de g que pour le graphe de f. On a aussi $g(1) = -g(-1) = 1$, et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Exercice 35.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable et convexe.

1. Démontrer que si f est majorée alors f est constante.
2. Est-ce que ce résultat reste vrai pour $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$?

1. On peut raisonner par contraposition. Supposons f non constante. Alors, il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f'(x_0)\neq 0$. Quitte à remplacer f par $x\mapsto f(-x)$ (la symétrie par rapport à l'axe des y n'a aucun impact sur l'aspect majoré ou non de f, pensez-y), on peut supposer $f'(x_0)>0$.

   Comme, par définition, f est au-dessus de sa tangente en x_0, on a, $\forall x\geqslant x_0$, $f(x)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Donc f n'est pas majorée.
2. Ce résultat n'est plus vrai si on considère $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$. Par exemple, la fonction $f:x\mapsto\frac{1}{x+1}$ pour $x\geqslant 0$ est dérivable, on a $f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$ et $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}>0$ donc elle est convexe (et décroissante). Or $f(0)=1$ et $f(x)>0$ pour tout $x>0$. f est décroissante (majorée) et minorée, donc bornée.