Correction exercices complémentaires TD8

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 44.

	Soit f une fonction continue et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1.	Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[x, x+T]$ est indépendante du réel x. On l'appelle valeur moyenne de f.
2.	Déterminer la valeur moyenne de cos, de $\cos^2$ de $\lvert\cos\rvert$ sur un intervalle de longueur 2π.

Ici, on utilise la relation de Chasles.

1. Soit f une fonction continue et T-périodique. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+T} f(t)dt &= \int_x^{x'} f(t)dt + \int_{x'}^{x'+T} f(t)dt + \int_{x'+T}^{x+T} f(t)dt \\
&= \int_x^{x'} f(t)dt + \int_{x'}^{x'+T} f(t)dt + \int_{x'}^{x} f(u-T)du \quad \text{(changement de variable u = t-T)} \\
&= \int_x^{x'} f(t)dt + \int_{x'}^{x'+T} f(t)dt + \int_{x'}^{x} f(t)dt \quad \text{(périodicité de f)} \\
&= \int_x^{x'} f(t)dt + \int_{x'}^{x'+T} f(t)dt - \int_{x}^{x'} f(t)dt \\
&= \int_{x'}^{x'+T} f(t)dt
\end{aligned}$$

2. Valeur moyenne de cos :

$$\begin{aligned}
M(\cos) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}[\sin(t)]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Valeur moyenne de $\cos^2$. Je rappelle que $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$.

$$\begin{aligned}
M(\cos^2) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}2\pi \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Valeur moyenne de $|\cos|$:

$$\begin{aligned}
M(|\cos|) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}|\cos(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}([sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2} - [sin(t)]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\
&= \frac{1}{2\pi}((1+1)-(-1-1)) \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Exercice 45.

1. Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, $\frac{1}{2}t^2 \leqslant \frac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$.
2. En déduire un encadrement de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt$.

1. Si $t \in [0,1]$, $1 \leqslant 1+t \leqslant 2$. Donc $2 \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $t^2 > 0$, on a le résultat.
2. Les intégrales conservent la relation d'ordre. Donc :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 t^2dt \leqslant I \leqslant \int_0^1 t^2dt$$

.

Après calcul, on obtient :

$$\frac{1}{6} \leqslant I \leqslant \frac{1}{3}$$

Exercice 46.

On définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ les intégrales $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+e^t}dt$.
1. Démontrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive.
2. Étudier la monotonie de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. Étudier les extremums de la fonction $g : e \mapsto \frac{1}{t^2+e^t}$ sur $[0;1]$.
En déduire un encadrement de J_n puis sa limite.

1. C'est la propriété de positivité de l'intégrale. Comme $t \in [0,1]$, on a $t^n \geqslant 0$ et donc $\frac{t^n}{t^2+e^t} \geqslant 0$, $\forall t \in [0,1]$.
2. Toujours comme $t \in [0,1]$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $\frac{t^{n+1}}{t^2+e^t} \leqslant \frac{t^n}{t^2+e^t}$, puisque t^2+e^t est positif pour tout $t \in [0,1]$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $J_{n+1} \leqslant J_n$ donc la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Une suite décroissante et minorée (ici par 0 d'après la question 1) converge. Donc J_n converge.
3. On calcule la dérivée de g (avec la formule de la dérivée de $\frac{1}{u}$: $-\frac{u'}{u^2}$) et on trouve qu'elle est négative sur $[0,1]$. Donc la fonction g atteint son maximum en 0 où elle vaut $g(0) = 1$ et son minimum en 1 où elle vaut $g(1) = \frac{1}{1+e}$.
4. On utilise la croissance de l'intégrale pour déduire de l'encadrement $\frac{1}{1+e} \leqslant g(t) \leqslant 1$ pour $t \in [0,1]$ un encadrement de J_n :

$$\frac{1}{1+e}\int_0^1 t^ndt \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 t^ndt$$

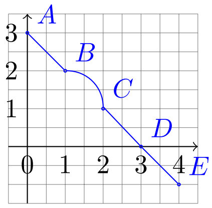
On calcule $\int_0^1 t^ndt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, et donc l'encadrement devient :

$$\frac{1}{(n+1)(1+e)} \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On voit que les suites des côtés droits et gauches de l'inégalité tendent vers 0. Par un théorème d'encadrement de limites (théorème des gendarmes), si on note l la limite de J_n on a $0 \leqslant l \leqslant 0$. On a donc $l = 0$.

Exercice 47.

La courbe représentative de la fonction f qui figure sur le graphe ci-dessous est constituée de deux segments [AB] et [CE] est d'un quart de cercle entre B et C.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,3]$ puis sur $[0,4]$.



Ici, on procède en utilisant le théorème fondamental de l'analyse : L'intégrale d'une fonction (intégrable) sur un intervalle correspond à l'aire sous sa courbe représentative.

On procède méthodiquement : On découpe l'intégrale sur $[0,3]$ en plusieurs sous-segments grâce à la relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_0^3 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt$$

$$\int_0^1 f(t)dt = 2.1 + 1.1/2 = 3/2$$

$$\int_1^2 f(t)dt = 1 + \pi/4 \text{ (aire du quart de cercle de rayon 1)}$$

$$\int_2^3 f(t)dt = 1/2$$

Donc : $\int_0^3 f(t)dt = 3 + \pi/4$

D'où la valeur moyenne de f est de :

$$1/3 \int_0^3 f(t)dt = 1 + \pi/12$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_0^4 f(t)dt = 3 + \pi/4 - 1/2 = 5/2 + \pi/4$$

Donc :

$$1/4 \int_0^4 f(t)dt = 5/8 + \pi/16$$