Correction exercices complémentaires TD7

Irène Meunier

6 novembre 2020

Exercice 52.

	À l'aide d'une intégration par parties, trouver les intégrales de 0 à π des fonctions :
1.	$f_1(x) = x\cos x$,
2.	$f_2(x) = \arctan(x)$

1. On intègre par parties avec $u(x) = x, v'(x) = \cos(x)$, donc $u'(x) = 1, v(x) = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_1(x)dx &= \int_0^\pi \sin(x)dx - [x\sin(x)]_0^\pi \\ &= [-\cos(x)]_0^\pi - 0 \\ &= -(-1)+1 \\ &= 2\end{aligned}$$

2. Ici, on prend $u(x) = \arctan(x), v'(x) = 1$, $u'(x) = 1/(1+x^2), u(x) = x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f_2(x)dx &= \int_0^\pi \frac{x}{1+x^2}dx - [x\arctan(x)]_0^\pi \\ &= 1/2\left[\ln(1+x^2)\right]_0^\pi - \pi\arctan(\pi) \quad \text{(dérivée de ln(u) : u'/u)} \\ &= 1/2.\ln(1+\pi^2) - \pi\arctan(\pi)\end{aligned}$$

Exercice 53.

	Une ellipse de demi-grand axe a et demi-petit axe b, est l'ensemble des points du plan vérifiant : (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
1.	Montrer que la partie supérieure de l'ellipse correspond au graphe de la fonction $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ sur $[-a, a]$.
2.	Calculer $\int_{-a}^a f(x)dx$ à l'aide du changement de variables $x(u) = a\cos(u)$.
3.	En déduire l'aire de l'ellipse.

1. On calcule, comme indiqué dans l'énoncé :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{f(x)^2}{b^2} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2 - x^2}{a^2} \\ &= \frac{x^2}{a^2} + 1 - \frac{x^2}{a^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Donc le graphe $(x, f(x))$ est bien contenu dans la courbe d'équation (E). Pour être plus précis, et bien montrer que le graphe correspond à la partie supérieure de l'ellipse, il faudrait faire une étude de fonction de f. Montrer qu'elle est croissante sur $[-a, 0]$, décroissante sur $[0, a]$. et que, pour $x = -a$ et $x = a$ on a bien $f(x) = 0$. Par continuité de f, la partie supérieure de l'ellipse correspond bien au graphe de f sur $[-a, a]$.

2. On calcule l'intégrale avec le changement de variables demandé : $x(u) = a\cos(u)$, donc $dx = -a\sin(u)du$. Pour l'intervalle d'intégration, on a : $a\cos$ fonction décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-a, a]$, avec $x = -a$ ssi $u = \pi$ et $x = a$ ssi $u = 0$. Donc :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_\pi^0 f(a\cos(u))(-a\sin(u))du = \int_0^\pi f(a\cos(u))(a\sin(u))du$$

On calcule $f(a\cos(u)) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(u)} = b\sqrt{1-\cos^2(u)} = b\sin(u)$ pour $u \in [0, \pi]$.
On obtient donc :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^{\pi} ba\sin^2(u)du$$

Ici, on peut utiliser une identité de trigonométrie : Sachant que $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 1 - 2.\sin^2(u)$, on obtient $\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$. Donc :

$$\int_0^{\pi} ba\sin^2(u)du = \frac{ab}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos(2u))du = \frac{ab}{2}\left(\int_0^{\pi} du - \underbrace{\int_0^{\pi}\cos(2u)du}_{=0}\right)$$

Au bilan,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{ab\pi}{2}$$

3. La moitié de l'aire de l'ellipse vaut $\frac{\pi ab}{2}$ donc sa totalité vaut πab. Comme dit dans l'énoncé, pour $r = a = b$ on retrouve bien πr^2, l'aire du cercle.

Exercice 54.

On appelle intégrales de Wallis, les intégrales $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$. Démontrez, par récurrence que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $W_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)...3.1}{(2k)(2k-2)...4.2} \times \frac{\pi}{2}$,
$W_{2k+1} = \frac{(2k)(2k-2)...4.2}{(2k+1)(2k)...3}$

En général, avec les récurrences sur les puissances dans une intégrale, on est sûrs de passer par une intégration par parties. Comme on fait une disjonction de cas entre les pairs et les impairs, on veut regarder les deux premiers termes pour initier la récurrence : $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Donc le cas $k = 0$ est vrai pour les deux formules.

On va maintenant calculer une relation de récurrence utile. Comme on sépare pairs et impairs, on va certainement tomber sur une relation entre W_n et W_{n-2}, pour $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2}(t).\cos^2(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2}(t).(1-\sin^2(t))dt \\
&= W_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2}(t)\sin(t)).\sin(t)dt
\end{aligned}$$

Et là on peut reconnaitre une dérivée : $u'(t) = \cos^{n-2}(t)\sin(t)$. On pose aussi : $v(t) = \sin(t)$. On a $u(t) = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$. On applique donc la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2}(t)\sin(t)).\sin(t)dt = \frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt - \underbrace{\left[\frac{1}{n-1}\cos^{n-1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi}}_{=0} = \frac{1}{n-1}W_n$$

Au bilan, pour $n \geq 2$:

$$W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1}W_n$$

En mettant les W_n du même côté de l'équation, et en divisant par $1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$, on obtient :

$$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$$

À partir de là, une récurrence sur k (en séparant bien les cas pairs et impairs) permet de montrer les formules données dans l'énoncé.