Pour quelles fonctions u a-t-on $\arctan(x) + \arctan(u(x))$ constante sur un intervalle I ?

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty [1]

Je voudrais commencer par un aveu : la fonction arctangente (notée $x \mapsto \arctan(x)$) et la fonction de densité gaussienne $x \mapsto \exp(-x^2)$ font partie de mes “fonctions mathématiques particulières” favorites, même s'il y en a d'autres du même acabit (*cf.* [1]). Une raison en est qu'on les retrouve souvent dans des domaines de mathématiques très divers, parfois là où on ne les y attend pas.

La présente note concerne la fonction arctangente à travers la question suivante :

Quelles sont les fonctions $x \mapsto u(x)$ suffisamment régulières, disons dérivables sur un intervalle ouvert I, telles que $\arctan(x) + \arctan(u(x))$ soit égal à une constante c pour tout $x \in I$?

Il y a déjà plusieurs exemples de ce type, que les étudiants traitent en exercice dès la première année post-bac. Les voici.

Le premier, le plus célèbre sans doute, est :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[\;; \tag{1}$$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in]-\infty, 0[\,. \tag{2}$$

La méthode la plus efficace pour démontrer ce résultat est d'utiliser les techniques et résultats issus du calcul différentiel. La fonction $x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable pour tout $x \neq 0$ avec une dérivée $f'(x) = 0$. En conséquence, la fonction f est constante sur tout *intervalle* de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0. La valeur de la constante sur $]0, +\infty[$ (dans la situation (1)) s'obtient en prenant une valeur particulière de x, $x = 1$ par exemple, ou en déterminant $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Cet exercice est excellent pour deux raisons au moins. La première est qu'il illustre le fait qu'avoir une fonction f à dérivée nulle sur un ensemble I ne permet de déduire que f est constante sur I que lorsque I est un *intervalle*. La deuxième est plus subtile et nous préoccupera plus loin : bien qu'on soit tenté d'utiliser le fait (essentiel) que $\tan(\arctan(y)) = y$, la formule d'addition des tangentes, $\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ est inopérante ici.

Un deuxième exemple, à peine plus élaboré que le premier, mais qui se traite de la même façon, est

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ pour tout } x \in]-1, +\infty[\;; \tag{3}$$

1. Département de mathématiques de l'université Paul Sabatier de Toulouse.
Mél : jbhu@math.univ-toulouse.fr

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{3\pi}{4} \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, -1\right[. \tag{4}$$

Ces deux exemples ne doivent pas nous faire oublier le plus simple d'entre eux qui est :

$$\arctan(x) + \arctan(-x) = 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[. \tag{5}$$

D'où à présent notre questionnement : *Peut-on trouver toutes les situations pour lesquelles*

$$\arctan(x) + \arctan(u(x)) = c \textit{ pour tout } x \in I\,? \tag{6}$$

Dans cette quête, on suppose que I est un intervalle ouvert et que u est dérivable sur I. Une fois qu'on aura ce couple (I, u), la constante c pourra être trouvée par l'une des méthodes évoquées plus haut.

La première tentation pour répondre à la question posée est de faire appel à la formule d'addition des tangentes, dont l'utilisation s'avère hasardeuse, dangereuse même dirions-nous. C'est bien ce que nous avons vu dans des écrits de forums de discussion, ou dans des vidéos sur Youtube, et reconnaissons-le : cette approche ne donne pas toutes les solutions à la question posée, en particulier *on ne retrouve pas l'exemple le plus connu* (1)-(2).

Notre idée ici est d'utiliser *le calcul différentiel* et un de ses domaines d'application, *les équations différentielles.* Par ce biais, nous allons trouver toutes les solutions à la question posée et, bien sûr, retrouver les trois exemples cités plus haut.

En dérivant les fonctions dans la relation (6), nous arrivons à l'équation différentielle suivante

$$u'(x) = -\frac{1}{1+x^2}(u(x))^2 - \frac{1}{1+x^2}. \tag{ED}$$

C'est une équation différentielle non linéaire du premier ordre, de la forme $u'(x) = \varphi(x, u(x))$, tout à fait sympathique car $\varphi : (x, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(x, v)$ est une fonction de classe C^1.

Une particularité de (ED), qui se vérifie aisément, est que si $u : I \to \mathbb{R}$ est une solution de (ED) sur un intervalle ouvert I ne contenant pas 0, alors la fonction $v : x \in I \mapsto v(x) = -u\left(\frac{1}{x}\right)$ est aussi solution de (ED). Nous n'avons pas d'explication sur le pourquoi de cette involution $u \mapsto T(u) = v$ (involution signifiant que $(T \circ T)(u) = u$ ou $T^{-1}(u) = u$).

Nous nous apprêtons donc à résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\left\{\begin{aligned} u'(x) &= -\tfrac{1}{1+x^2}(u(x))^2 - \tfrac{1}{1+x^2}, \\ u(x_0) &= u_0. \end{aligned}\right. \tag{$\mathcal{C}$}$$

Les étudiants de deuxième et troisième année post-bac en mathématiques savent que, pour tout couple $(x_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de données, *il existe une et une seule solution maximale à* $(\mathcal{C})$, c'est-à-dire : un intervalle ouvert I contenant x_0, une fonction dérivable $u : I \to \mathbb{R}$, tels que

$$\left\{\begin{aligned} u'(x) &= -\tfrac{1}{1+x^2}(u(x))^2 - \tfrac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in I, \\ u(x_0) &= u_0, \end{aligned}\right.$$

et on ne peut pas faire mieux (c'est-à-dire, sur un intervalle plus grand que I). Toutes les solutions u sont strictement décroissantes (voir pour s'en convaincre le signe de la dérivée $u'(x)$ dans $(\mathcal{C})$). Ainsi, soit l'intervalle I de définition d'une solution maximale u est $\mathbb{R}$ (on parle alors de *solution globale*), soit il est de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $]-\infty, \alpha[$; dans ces derniers cas $\lim_{x \to \alpha^+} = +\infty$ ou bien $\lim_{x \to \alpha^-} = -\infty$.

"Y-a-plu-ka" trouver cette solution maximale à $(\mathcal{C})$ en examinant tous les cas de figure possibles. Les calculs, parfois après tâtonnements (la formule d'addition des tangentes aide tout de même à "intuiter" les résultats), ne sont pas difficiles. Allons-y.

1^{er}*cas*. Lorsque $u_0 = -x_0$. Alors, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x) = -x$ est la solution maximale de $(\mathcal{C})$. Ce sera d'ailleurs le seul cas de solution globale.

2^{e}*cas*. - Lorsque $x_0 > 0$ et $u_0 = \frac{1}{x_0}$. Alors, $x \in]0, +\infty[\mapsto u(x) = \frac{1}{x}$ est la solution maximale de $(\mathcal{C})$.

- Lorsque $x_0 < 0$ et $u_0 = \frac{1}{x_0}$. Alors, $x \in]-\infty, 0[\mapsto u(x) = \frac{1}{x}$ est la solution maximale de $(\mathcal{C})$.

3^{e}*cas*. - Lorsque $x_0 = 0$ et $u_0 = a > 0$. Alors, $x \in \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[\mapsto u_a(x) = \frac{a-x}{1+ax}$ est la solution maximale de $(\mathcal{C})$.

- Lorsque $x_0 = 0$ et $u_0 = a < 0$. Alors, $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[\mapsto u_a(x) = \frac{a-x}{1+ax}$ est la solution maximale de $(\mathcal{C})$.

Si on tient à avoir la formule de la solution de $(\mathcal{C})$ écrite avec x_0 et u_0, on peut le faire, sauf si $x_0 u_0 = 1$: c'est u_a avec $a = \frac{x_0 + u_0}{1 - x_0 u_0}$.

Ce faisant, on a examiné tous les cas possibles ; de fait, *tout* le plan $\mathbb{R}^2$ est stratifié par l'ensemble des courbes des solutions de $(\mathcal{C})$: la droite d'équation $y = -x$, les deux branches de l'hyperbole particulière $y = \frac{1}{x}$ (qui ne coupe pas les axes des coordonnées), les deux branches de l'hyperbole générique $y = \frac{a-x}{a+x}$ avec $a \neq 0$ (dont une des branches coupe les axes de coordonnées)

On voit bien, "a bisto de nas" (= "à vue de nez") comme on dit en Occitanie, que l'hyperbole particulière $y = \frac{1}{x}$ est le cas limite, quand $a \to \infty$, de l'hyperbole générique $y = \frac{a-x}{1+ax}$.

Autre remarque : Toutes les solutions maximales u sont des *involutions*, à savoir $u = u^{-1} : I \to I$. Pas d'explication non plus.

Toutes ces propriétés des solutions de (ED) se voient sur la figure ci-dessous montrant la stratification du plan par les courbes solutions.

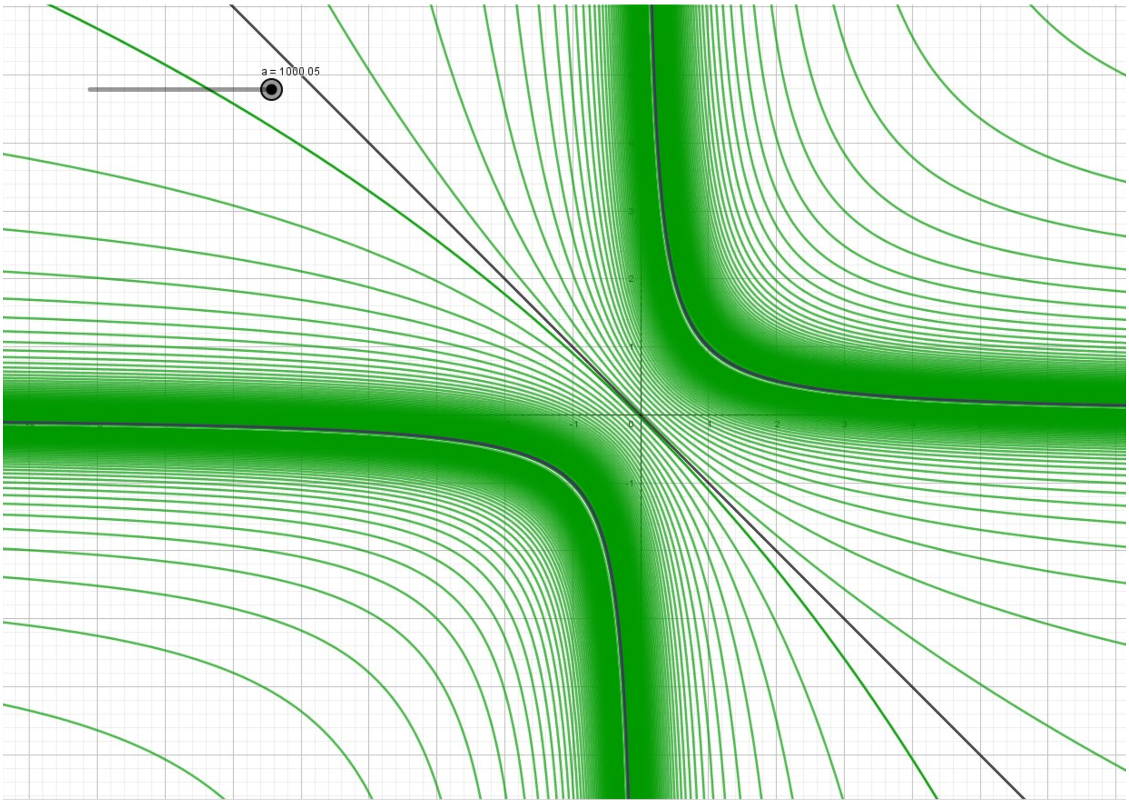

Figure 1.

Revenons à présent à notre questionnement initial et donnons toutes les réponses :

$$\begin{aligned}
\arctan(x) + \arctan(-x) &= 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[. \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in \left]0, +\infty\right[\,; \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= -\frac{\pi}{2} \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, 0\right[. \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{a-x}{1+ax}\right) &= \arctan(a) \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad (\text{avec } a > 0)\,; \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{a-x}{1+ax}\right) &= -\pi + \arctan(a) \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[\quad (\text{avec } a > 0). \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{a-x}{1+ax}\right) &= \pi + \arctan(a) \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{1}{a}, +\infty\right[\quad (\text{avec } a < 0)\,; \\
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{a-x}{1+ax}\right) &= \arctan(a) \text{ pour tout } x \in \left]-\infty, -\frac{1}{a}\right[\quad (\text{avec } a < 0).
\end{aligned}$$

On remarquera que toute la plage $\left]-\pi, \pi\right[$ (et pas seulement $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) est couverte par les constantes c possibles dans le deuxième membre de (6).

Référence

1. J.-B. Hiriart-Urruty. *Des fonctions... pas si particulières que ça : celles de* Lambert*,* Gudermann *et* Airy. Revue Quadrature, n° 101, 40 − 45 (2016).