

## Les mathématiques, pourquoi les aime (ou les apprécie)-t-on ?

JEAN-BAPTISTE HIRIART-URRUTY  
Institut de Mathématiques  
Université PAUL SABATIER de Toulouse  
<https://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/>

A la sollicitation de mon collègue BERTRAND JOUVE d'écrire sur le "plaisir des mathématiques", j'avoue avoir longtemps hésité... En effet, est-ce toujours un plaisir de faire des mathématiques ? Assurément non, c'est une discipline exigeante qui rend sa pratique parfois loin des canons du plaisir. Mais alors, trouve-t-on de l'intérêt à faire des mathématiques ? Oui, et c'est dans ce sens que j'ai décidé de répondre à la sollicitation qui m'avait été faite... Bref, dans les mathématiques, *qu'est-ce qu'on y trouve ?* Sous-entendu "*et qu'on ne trouve pas forcément dans la pratique d'autres disciplines*".

J'ai déjà pas mal écrit sur le sujet des mathématiques et des pratiques des mathématiciens (par exemple [1], [2], [3], [4]), je vais donc reprendre partiellement ici certains des aspects qui y sont développés.

### Le syndrome du "6 fois 7 égal 42"

6 fois 7 égal 42..., personne ne conteste cela. Vous avez beau avoir des croyances différentes, des formations scolaires différentes, être dans des conditions de température et de pression différentes (comme aiment bien le dire les physiciens), venir de pays et de cultures très disparates, ... vous admettez que 6 fois 7 ne peut être égal qu'à 42. En bref, **les résultats mathématiques s'imposent à tous.**

Lors d'une visite professionnelle récente dans une université étrangère (en Italie du sud plus précisément), avant d'entrer dans la salle où je devais faire mon exposé de séminaire, il y avait un contrôle systématique du passe sanitaire. Cela ne posait aucun problème aux participants... mais on m'avertit que des étudiants en Master cubains et russes ne pourraient pas assister. Pourquoi donc ? Eh bien, les vaccins qu'ils avaient reçus dans leur pays n'étaient pas reconnus par l'Europe... Les résultats des tests de vaccination ne sont donc pas universels. Si on avait demandé aux étudiants, auditeurs potentiels du séminaire, de résoudre au préalable une équation du second degré, il n'y aurait pas eu d'hésitation : soit les solutions proposées sont justes (vérifiables et acceptées par tous), soit elles sont erronées...

### Résultats vrais mais surprenants...

Les résultats mathématiques, s'ils s'imposent à tous, peuvent surprendre... En effet, nous vivons dans un environnement spatial limité par les échelles de grandeur usuelles que nous côtoyons... Si on a idée assez précise de ce que représente 1 mètre, ce n'est plus le cas pour  $10^9$  km ou pour  $10^{-12}$  cm... Pourtant, pour les calculs de mathématiques, cela ne fait pas de différence.

Les deux exemples de situation qui vont suivre n'ont rien de sophistiqué, de construits pour apparaître paradoxal... Et pourtant, posez-les autour de vous lors d'une rencontre ou déjeuner entre amis (comme nous avons eu l'occasion de le faire plusieurs fois), et vous allez voir la surprise que cela crée...

Les deux situations qui suivent sont du même acabit, mais la première est plus simple (de niveau collègue).

*Allongement d'un mètre (version 1)*

Considérons une corde tendue au sol entre deux poteaux distants de 100 mètres exactement. Ajoutons juste 1 mètre à cette corde. Ainsi, au milieu (à 50 mètres de chaque poteau) il y a un peu de "mou" dans la corde, ce qui fait qu'on peut la tirer légèrement vers le haut. Question : de combien ? C'est la hauteur  $h$  de la Figure 1 ci-dessous. Posez la question et vous verrez les réponses : "Très peu, quelques centimètres...", "En tout cas, moins d'un mètre...". La réponse exacte en est loin : c'est plus de 7 mètres ! Un simple calcul, du niveau classe de 3<sup>e</sup> en collège, en utilisant le célèbre théorème de PYTHAGORE, conduit rapidement à ce résultat... Surprenant, mais le résultat, "mathématiquement" prouvé, s'impose.

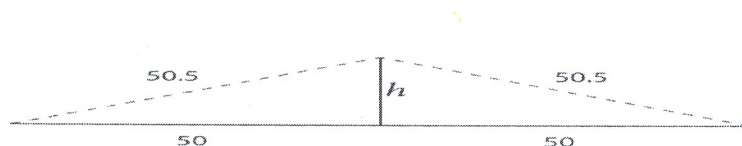


Figure 1.

*Allongement d'un mètre (version 2)*

Le deuxième exemple, à peine un peu plus élaboré que le précédent, est tout aussi percutant. Prenons la Terre assimilée à une sphère de rayon 6400 km. Une corde bien serrée l'entoure au niveau d'un plan passant par les deux pôles, lequel coupe la sphère en deux. Cette corde est longue, plus de 40 000 km ! On allonge la corde de seulement 1 mètre. On tire ensuite la corde en un point, au pôle nord par exemple : il reste dans le plan méridien qui coupe la Terre en deux, mais est tendue de façon à décoller de la surface de la Terre au maximum. Voir la Figure 2 ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle, bien sûr). Question : De quelle hauteur  $h$  la corde décolle-t-elle ? Posez la question autour de vous et vous entendrez les réponses spontanées suivantes :

“Pratiquement rien... l’allongement de la corde ne représente que  $\frac{1}{40\,000\,000}$  de la longueur initiale de la corde”, “Très peu, de l’ordre de quelques cm...” Or, il n’en est rien... La réponse est surprenante, et seule une démonstration, en faisant le calcul effectif (voir le schéma en (b) de la Figure 2), permet de se convaincre du résultat. Le décollement  $h$  est de plus de 120 mètres! Ici encore, **le résultat est surprenant mais vrai!**

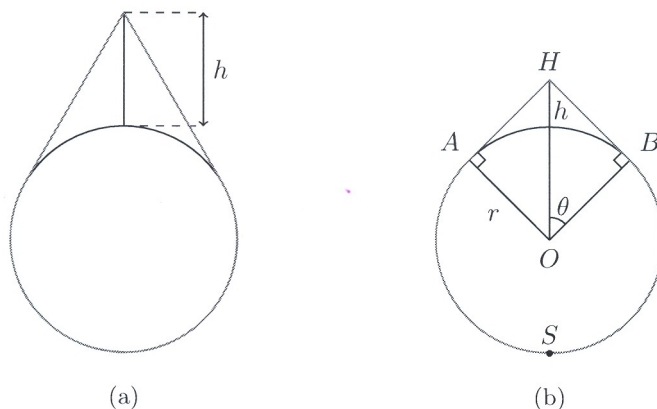


Figure 2.

### Les mathématiques sont internationales, universelles

Demandez à un étudiant ou à un collègue d’Alaska, de Santiago du Chili, de Singapour ou de Novossibirsk quelle est la définition des dérivées partielles d’une fonction de plusieurs variables et la notation qu’il utilise pour les représenter ; il y a de fortes chances que vous receviez les mêmes réponses...

Voici une anecdote qui m’est arrivée il y a quelques années. Lors d’un voyage d’études dans un université du nord-est de la Chine, dans un coin un peu perdu, pas loin de la frontière avec la Corée du Nord, accompagné d’un collègue chinois, j’ai demandé à visiter des bâtiments où vivent les étudiants (dortoirs, salles d’études, restaurants), comme je le fais souvent en de pareilles circonstances. Dans l’un d’entre eux, des étudiants en mathématiques étaient en train de travailler individuellement sur des exercices. Je décidai de regarder par-dessus les épaules de l’un d’entre eux... Je n’en comprenais pas l’énoncé (forcément, c’est du chinois!) mais je reconnus immédiatement l’exercice au travers des formules mathématiques : c’était un exercice classique sur la comparaison de plusieurs distances dans un espace métrique..., exactement comme celui que j’avais eu l’occasion de poser à mes étudiants de L3 (troisième année de Licence, niveau *Undergraduate*). Je me suis fait alors

la réflexion suivante : je suis à 10 000 km de mon lieu de travail habituel, dans un pays et un contexte complètement différents du mien... et voilà que je reconnais les mathématiques !

Ce caractère **international et universel** des mathématiques est celui qui nous permet, à nous mathématiciens, de voyager de par le monde... J'avoue que cela a été pour moi un des agréments du métier. Des camarades d'études, plutôt ingénieurs, ont certes eux aussi voyagé, mais, me racontaient-ils, les contacts se limitaient souvent à des réunions dans des grands hôtels ou des salles d'aéroport.

J'ai ressenti encore cette "internationalité" lors de la période récente, depuis les deux années où nous subissons la pandémie COVID19. Les mathématiciens, comme d'autres, se sont mis à organiser des *webinaires* (néologisme, mot-valise, signifiant des "séminaires à distance", via des techniques de télédiffusion). Il était agréable, et fréquent je dois dire, de profiter de ces rencontres de séminaires pour demander des nouvelles aux collègues étrangers, parfois très éloignés de France, sur leur vécu de la pandémie et des contraintes sanitaires... Tout en écoutant l'exposé se dérouler, ou bien juste avant son début, la discussion annexe, ledit *chat*, permettait un échange humain, personnalisé, ... C'étaient des mathématiciens comme nous, confrontés aux mêmes problèmes du moment.

### **Esthétique des mathématiques**

C'est probablement en classe de Terminale de lycée (section encore appelée *Math-Elém*) que mon professeur de mathématiques, un prêtre pourtant "taiseur", m'a fait découvrir l'esthétique des mathématiques, leur exigence aussi (*cf.* chapitre 1 et 7 de [4]). Cette esthétique peut se mesurer de différentes façons : par le biais d'une belle formule synthétique, via un raisonnement astucieux, au travers d'un puzzle dont tous les morceaux finissent par s'assembler, etc. J'ai des collègues physiciens pour qui telle ou telle formule de Physique est "la plus belle du monde" (selon leur expression) ; il en va de même des mathématiciens. Une formule de mathématiques, par sa simplicité, le condensé de tout ce qu'elle représente, le lien qu'elle établit entre différents domaines, suscite parfois notre admiration. Je demandais parfois à mes étudiants de s'arrêter d'écouter ou de lire le cours, et de contempler quelques instants une formule que nous venions de démontrer.

Je présente ici quelques résultats mathématiques que je considère comme particulièrement esthétiques. Le choix est subjectif, il aurait sans doute été différent à un autre moment d'écriture, et celui de votre collègue ou ami est sûrement différent du vôtre. Aucun d'entre eux ne figure par exemple dans la collection [7].

- *Le théorème de GUA DE MALVES* (Géométrie euclidienne)

Cela ressemble au théorème de PYTHAGORE dans  $\mathbb{R}^3$ , cela a le goût du théorème de PYTHAGORE..., mais ce n'est pas le théorème de PYTHAGORE, bien qu'on l'appelle souvent de cette façon (cf. [5]). Le théorème en question dit ceci :

Dans un tétraèdre trirectangle (avec trois faces qui sont des triangles rectangles, et une face hypoténuse qui est un triangle sans propriété ; voir la Figure 3), l'aire du triangle hypoténuse peut se calculer à partir des aires des trois triangles rectangles ; de fait, *le carré de l'aire de la face hypoténuse est égal à la somme des carrés des aires des trois triangles rectangles.*

$$(\text{Aire de } ABC)^2 = (\text{Aire de } OAB)^2 + (\text{Aire de } OAC)^2 + (\text{Aire de } OBC)^2.$$

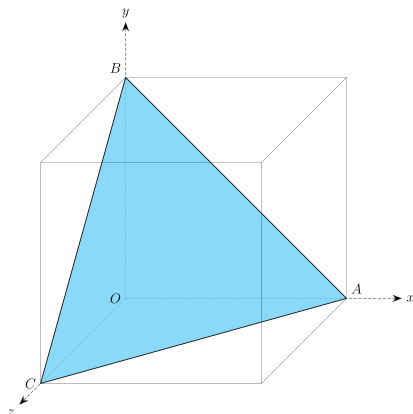


Figure 3.

- *Le théorème de GIRARD* (Géométrie sphérique)

C'est assurément un résultat à la simplicité et esthétique fortes.

Considérons un triangle sphérique  $ABC$ , c'est-à-dire un triangle tracé sur une sphère (de rayon  $R$  par exemple) de sorte que chacun des côtés (courbes) soit porté par un grand cercle de la sphère (on appelle ainsi un cercle tracé sur la sphère, et dont le centre est celui de la sphère). Le triangle sphérique est donc une zone délimitée par trois grands cercles ; voir la Figure 4 ci-dessous. A chaque sommet du triangle, nous avons un angle, dont la définition est claire, c'est celui formé par les deux tangentes aux côtés (courbes) du triangle,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sur la Figure 4. Eh bien, alors que la somme des angles d'un triangle du plan vaut toujours  $\pi$  (radians), celle des angles d'un triangle sphérique varie, tout en restant supérieur à  $\pi$ . Le théorème de GIRARD affirme que

$$\text{Aire de } ABC = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2.$$

C'est un résultat extraordinaire, qu'on peut illustrer et avec lequel on peut jouer en faisant varier les positions des sommets  $A, B, C$ .

Le théorème de GIRARD comme celui de GUA sont faciles à démontrer, les niveaux de démonstration dépendant des connaissances prérequisées en Géométrie (de collège, de lycée, ou un peu plus). On peut même en trouver des illustrations animées sur YOUTUBE.

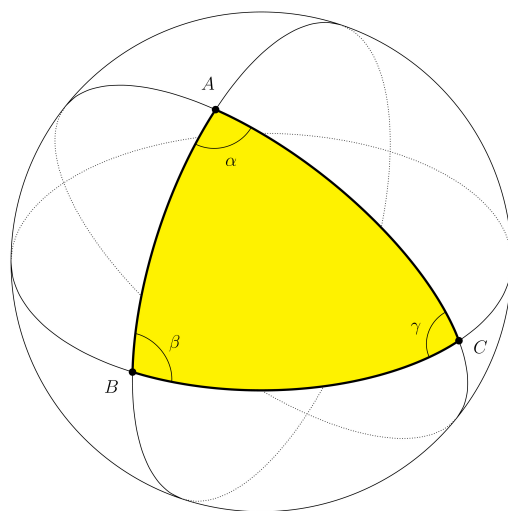


Figure 4.

- *Le théorème des accroissements finis ou de la valeur moyenne (Analyse)*

Je ne cache pas que c'est l'un de mes résultats favoris en Analyse élémentaire. Rappelons-nous ce qu'il dit. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable, de dérivée notée  $f'$  comme d'habitude en mathématiques. Alors, pour tout couple  $(a, b)$ ,  $a < b$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (5)$$

La première fois que j'entendis parler de ce théorème était en classe de Terminale de lycée ([4]). Plus que le résultat lui-même, ce fut le tout premier exercice d'illustration qui attira mon attention. En effet, le premier exercice consistait à trouver le (ou les)  $c$  (dans la formule (5) au-dessus) pour des fonctions quadratiques  $f : x \mapsto f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , avec  $\alpha \neq 0$ . Par un calcul élémentaire, on arrive à  $c = (a + b)/2$ . Toujours la même expression de  $c$  (en fonction de  $a$  et  $b$ ), que  $a$  et  $b$  soient proches de 0 (là où la dérivée de  $f$  est petite), qu'ils soient loins de 0 (là où la dérivée de  $f$  est grande), que la longueur  $b - a$  de l'intervalle soit petite ou pas... Intéressant aussi que la réciproque soit vraie : les seules fonctions dérivables  $f$  pour lesquelles le "point intermédiaire"  $c$ , supposé unique, vaut toujours  $c = (a + b)/2$  sont les fonctions quadratiques.

Il y a une version “asymptotique” de ce résultat, que j’ai démontrée récemment, la voici.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois continûment dérivable avec  $f'' > 0$ . Pour  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , soit  $c(a, b)$  le “point intermédiaire” (assurément unique) tel que défini dans (5) si  $a \neq b$ , et étendu au cas où  $a = b$  par  $c(d, d) = d$ . Alors, la fonction  $c$ , des deux variables  $a$  et  $b$ , est continûment différentiable sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , avec

$$\nabla c(d, d) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ pour tout } (d, d). \quad (6)$$

Ici,  $\nabla c(d, d)$  désigne le vecteur gradient (celui des deux dérivées partielles) de  $c$  en  $(d, d)$ .

- *Théorème dit des deux carrés de P. FERMAT* (Théorie des nombres)

Parmi les multiples contributions géniales de FERMAT, nous choisissons son “théorème des deux carrés (pour les nombres premiers)”. Cela tombe bien, il s’applique aux nombres premiers 2017 et 2029 (les deux seuls cas entre les années 2000 et 2050), et nous sommes, en 2022 au moment où je finalise ces lignes, entre les deux à peu près au milieu. Voici ce que dit ce résultat de FERMAT : *Un nombre premier est la somme de deux carrés de nombres entiers si, et seulement si, il est congru à 1 modulo 4* (c’est-à-dire de la forme  $4k + 1$ , avec  $k$  entier). Dans ce cas, les deux entiers apparaissant dans la décomposition sont uniques, l’un est pair et l’autre est impair. Ainsi,  $2017 = (44)^2 + (9)^2$ ,  $2029 = (2)^2 + (45)^2$ . Quant aux nombres entiers 2022 et 2023, ils ne sont pas premiers, mais ils ne sont pas non plus sommes de deux carrés d’entiers... 2022 est néanmoins la demi-somme (la moyenne) des deux nombres premiers voisins, 2017 et 2027.

Ajoutons un commentaire à cette rubrique sur l’esthétisme en disant que faire des mathématiques est une occupation saine de l’esprit... Interrogeant des amis et collègues sur ce qu’ils faisaient pendant les périodes forcées de confinement dues à la pandémie COVID19, certains m’ont dit : “*beaucoup de mots croisés, des grilles de sudokus...*”, et d’autres m’ont répondu : “*des mathématiques comme jamais...*”.

### Utilité, puissance, et figures des mathématiques

On a beaucoup écrit sur l’utilité et la puissance des mathématiques, je n’y reviens pas. Chaque mathématicien a ses idoles mathématiciens ou scientifiques en général. Je ne cache pas que pour moi P. FERMAT est l’un d’entre eux. Mais je préfère ici en évoquer un autre : A. TURING. A son sujet, plutôt qu’un livre ou un film, je recommande “*La drôle de guerre d’Alan Turing. Comment les maths ont vaincu Hitler*”. C’est un excellent documentaire

d'ARTE (chaîne franco-allemande de télévision), réalisé par D. VAN WAE-REBEKE (sorti en 2015), que j'ai eu l'occasion de projeter à des étudiants (en mathématiques ou en informatique) à plusieurs reprises, suscitant leur intérêt à chaque fois. Il montre comment, dans un contexte historique douloureux, l'action de cerveaux de mathématiciens (dont leur leader A. TURING) a permis d'**écourter de deux ans la Deuxième Guerre mondiale** (c'est l'avis des historiens professionnels sur le sujet). Cette appréciation fait écho en moi car mon père fut prisonnier de guerre en Allemagne de juin 1940 (date de la capture) jusqu'à la fin des hostilités en mai 1945.

### Conclusion

Ces quelques pages avaient pour but de montrer, sur un mode très personnel, pourquoi nous apprécions les mathématiques, les trouvons utiles, saines pour l'esprit... D'autres auteurs les voient inévitablement sous un autre angle et expriment un point de vue différent. C'est l'un des aspects de ce qui demeure, malgré les critiques récurrentes qu'elle subit de la part de la société, une belle discipline scientifique.

### Références

(celles de l'auteur sont téléchargeables, pour la plupart, sur son site web professionnel)

1. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Réminiscences... et un peu plus*. Paru en anglais dans *Journal of Set-Valued and Variational Analysis*, Vol. 18, Nos. 3 & 4 (2010).
2. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Mathématiques (et mathématiciens) des villes vs Mathématiques (et mathématiciens) des champs*. Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse, Vol. 178 (décembre 2017).
3. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Oui, les mathématiques peuvent surprendre!* *Revue Au Fil des Maths* (Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), No 531, 1 – 6 (2019).
4. J.-B. HIRIART-URRUTY, *Souvenirs de formation(s). Formez, formez..., il en restera toujours quelque chose*. Ouvrage de souvenirs d'étude et d'enseignement, à paraître (2022).
5. J.-P. QUADRAT, J.-B. LASSERRE and J.-B. HIRIART-URRUTY, *Pythagoras' theorem for areas*. *American Math. Monthly* (June-July 2001), 549 – 551.
6. B. RITTAUD, *Les mathématiques (idées reçues sur les mathématiques)*. Editions Le Cavalier Bleu (2008).



7. L. SALEM, F. TESTARD et C. SALEM, *Les plus belles formules mathématiques*. InterEditions (1990). Réédité plusieurs fois depuis.