GMM 4ème année
Compléments de Probabilités.
Aldéric Joulin

INSA de Toulouse
Année universitaire 2011-2012

Feuille de TD 3
Introduction aux chaînes de Markov

Exercice 1

On dispose dans une maison individuelle de deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 0 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 1 si les deux systèmes fonctionnent.

Si un jour on est dans l'état 0, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité 1/2, tandis que si l'on est dans l'état 1, le lendemain la maison est chaude et l'on passe à l'état 0 avec probabilité 3/4.

Soit X_n l'état du système au jour numéro n. On admet que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

1 - Déterminez sa matrice de transition et son graphe.

2 - Posons $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Montrez que l'on a pour tout entier n la relation

$$p_n = 3/5 + (-1/4)^n (p_0 - 3/5).$$

Que vaut $\lim_{n\to+\infty} p_n$?

3 - Montrez que si un jour on se trouve dans l'état 0 avec probabilité 3/5, alors il en est de même pour tous les jours qui suivent.

Exercice 2

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à deux états 0 et 1, de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in]0,1[.$$

1 - Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$. Calculez p_n en diagonalisant la matrice P^n.

2 - Que valent $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$? Que remarquez-vous ?

Exercice 3

Soient E et C deux ensembles au plus dénombrables et $f : E \times C \to E$ une application. On considère une variable aléatoire X_0 à valeurs dans E indépendante d'une suite i.i.d. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ à valeurs dans C et de loi μ, et on définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1 - Montrez que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, de matrice de transition P définie par

$$P(x,y) = \sum_{k\in C} 1_{\{f(x,k)=y\}}\mu(k).$$

2 - Application : la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.
Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ indépendante d'une suite i.i.d. $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ à valeurs dans $\{-1,+1\}$ et de loi de Rademacher μ déterminée par $\mu(1) = 1-\mu(-1) = 1/2$. On définit par récurrence la marche aléatoire

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n \geq 1.$$

Montrez que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, et calculez sa matrice de transition.

Exercice 4 (CC2 2009-2010)
Un joueur fréquente trois casinos numérotés 0, 1 et 2. Chaque jour, il choisit avec probabilité 1/2 l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille. Au jour 0, il choisit l'un des trois casinos avec une certaine loi de probabilité μ sur le cercle $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du casino fréquenté le jour n par le joueur.
1 - Montrez soigneusement que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}_3$, dont vous déterminerez la matrice de transition P (vous raisonnerez modulo 3).
2 - Montrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_*$ la formule suivante :

$$P^n(x,y) = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1_{\{x=y\}} - \frac{1}{3}\right), \quad x,y \in \mathbb{Z}_3,$$

où l'indicatrice vaut 1 si $x = y$ et 0 sinon.
3 - Déduisez-en la limite lorsque n tend vers l'infini de la probabilité $\mathbb{P}_\mu(X_n = y)$, et ce pour tout $y \in \mathbb{Z}_3$ - on rappelle que la probabilité $\mathbb{P}_\mu$ est donnée pour tout événement A par $\mathbb{P}_\mu(A) = \sum_{x\in\mathbb{Z}_3} \mu(x)\mathbb{P}_x(A)$.
4 - Si la loi initiale μ est la probabilité uniforme sur $\mathbb{Z}_3$, montrez alors par le calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n suit cette même loi.

Exercice 5 (CC2 2010-2011)
Un message pouvant prendre deux formes ± 1 est transmis à travers n intermédiaires. Les transmissions sont supposées indépendantes entre elles et indépendantes du message initial. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec probabilité $p \in]0, 1/2[\cup]1/2, 1[$, ou le déforme en son contraire avec probabilité $1-p$. Notons X_n le message obtenu après la n-ième transmission, et X_0 le message initial.
1 - Montrez soigneusement que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $E := \{-1, +1\}$, dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

2 - On rappelle que pour toute chaîne de Markov à deux états, la matrice itérée P^n est toujours de la forme:

$$P^n = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\,\rho^n & \alpha - \alpha\,\rho^n \\ \beta - \beta\,\rho^n & \alpha + \beta\,\rho^n \end{pmatrix}$$

où $\rho := 1 - \alpha - \beta$, avec $\alpha, \beta \in [0, 1]$.
Déduisez-en, en fonction de p, la valeur de $\mathbb{P}(X_n = X_0)$, probabilité que l'information obtenue après la n-ième transmission soit conforme à l'information initiale.
3 - Que remarquez-vous de particulier, et que se passe-t-il lorsque le nombre d'intermédiaires n devient très grand ?

Exercice 6 (CC2 2010-2011)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un ensemble fini E, de cardinal $N \geq 2$, et de matrice de transition P. Soit $x \in E$ un état tel que $P(x, x) \in]0, 1[$. On définit le temps de séjour dans l'état x par

$$\tau_x := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \neq x\},$$

qui *a priori* est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
1 - Calculez $\mathbb{P}_x(\tau_x = 0)$ puis $\mathbb{P}_x(\tau_x > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2 - Déduisez-en soigneusement que $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$.
3 - Montrez que l'on a l'identité suivante:

$$\mathbb{E}_x[\tau_x] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau_x > k),$$

et déterminez la valeur de cette espérance.
4 - À présent, on suppose qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que $P(x, y) := p$ pour tous $x, y \in E$. Déterminez p et montrez en utilisant ce qui précède que pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x[\tau_x] = \frac{N}{N-1}.$$

Quelle est votre interprétation de ce résultat lorsque $N \to \infty$?