Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables. Normes.

Le but principal de ce cours est d'étudier les fonctions de plusieurs variables. En première année vous avez vu les fonctions d'une seule variable, où un paramètre réel (qui physiquement peut représenter une température, une pression, une densité massique, volumique, etc.) dépend d'un autre paramètre, également réel (le temps, une abscisse, etc.).

Ici s'intéressera donc à des fonctions de plusieurs paramètres réels. Par exemple, on peut vouloir étudier la température, la pression ou la densité volumique en fonction de la position dans l'espace (3 dimensions), de la position et de la vitesse (par exemple quelle est la densité de particules qui se trouve à cet endroit et qui va dans cette direction, ce qui fait 6 dimensions), on peut également s'intéresser à la dépendance par rapport au temps (une dimension supplémentaire). Enfin la quantité étudiée peut dépendre de la position de N objets, auquel cas on doit travailler avec $3N$ dimensions. Bref, les exemples ne manquent pas...

Notre exemple favori dans ce cours sera celui d'une altitude dépendant de deux paramètres (latitude et longitude ou, de façon plus abstraite, x et y). Il s'agit donc d'une fonction sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'intérêt est que le graphe de cette fonction correspond exactement à la montagne que l'on est en train d'escalader.

Mathématiquement, on devra donc étudier des fonctions qui ne sont plus définies sur un intervalle (ou une partie quelconque) de $\mathbb{R}$, mais sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. L'espace d'arrivée pourra être $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{R}^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, si la quantité qui nous intéresse est elle-même multi-dimensionnelle. On verra que le fait d'avoir plusieurs dimensions à l'arrivée n'est pas très génant, alors que le fait d'avoir plusieurs dimensions au départ va poser un certain nombre de difficultés nouvelles par rapport à ce que vous connaissez.

Les principales propriétés des fonctions de plusieurs variables auxquelles on va s'intéresser sont les questions de régularité (continuité, dérivabilité, ...) et leurs conséquences (comportement local d'une fonction, étude des extrema, ...), d'intégration, et enfin le lien entre les deux.

1.1 Fonctions de plusieurs variables

On considère une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'une fonction f de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$. A tout point

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$$

on associe un point $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^p$. On notera parfois

$$f(x) = \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)\big),$$

où $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1. En thermodynamique on étudie généralament la dépendance de quantité telles que l'énergie interne ou l'énergie cinétique en fonction des paramètres température, volume et pression. Ainsi la loi des gaz parfaits s'écrit $f(T, V, P) = 0$ où f désigne la fonction

$$f : (T, V, P) \mapsto PV - nRT,$$

n étant la quantité de matière et R la constante des gaz parfaits.

***Exercice* 1.1.** Donner le domaine de définition maximal de la fonction

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x+y}{x-y}, z\ln(y)\right).$$

L'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. Si λ est une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\lambda f : x \mapsto \lambda(x)f(x)$ définit encore une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$. Si g est une fonction d'une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{R}^p$ contenant l'image de f à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, alors la composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.2. On appelle graphe de f l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{n+p}.$$

On observe que le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est un objet à n dimensions dans l'espace à $(n + p)$ dimensions (en termes savants on dira plus tard qu'il s'agit d'une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+p}$ de dimension n). Concrètement on dessine sur une page en 2 dimensions. Tant que l'on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tout va bien (un graphe est alors une courbe, objet de dimension 1, dans le plan). Quand $n = 2$ et $p = 1$, il faut dessiner en trois dimensions, ce qui est déjà moins parlant (voir tout de même la figure 1.1), et au-delà c'est essentiellement impossible. Dans tout le cours les dimensions seront quelconques, mais c'est souvent une bonne idée d'avoir en tête des exemples dans le cas où $n = 2$ et $p = 1$.

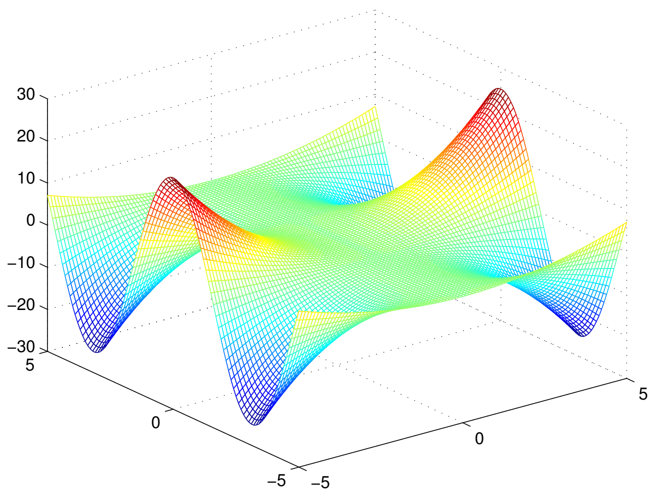


FIGURE 1.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto x^2 \cos(y)$.

***Exercice* 1.2.** On considère l'application f de $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x\cos(2\pi y)$. Parmi les points suivants, lesquels appartiennent au graphe de f :

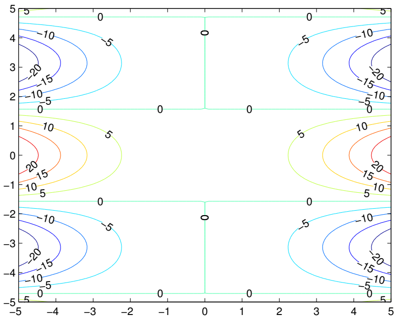
$$(1,1,0), (1,0,1,0), (1,-1,1), (0,1).$$

Une autre façon de visualiser une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, plus adaptée à la représentation en deux dimensions, est de dessiner ses lignes de niveau :

Définition 1.3. On suppose que f est à valeurs réelles ($p = 1$). On appelle lignes de niveau de f les ensembles

$$\{x \in \mathcal{D} \,|\, f(x) = \lambda\} \subset \mathcal{D}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.



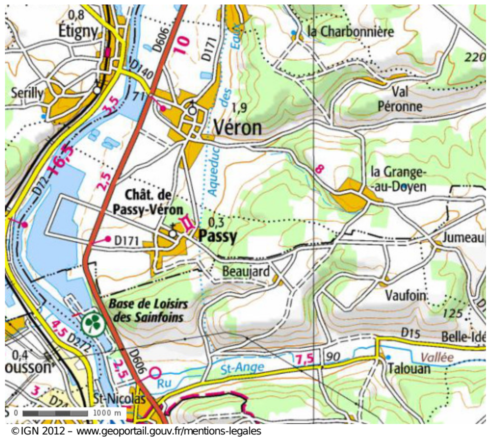


Figure 1.2 – Lignes de niveau pour l'application $(x,y) \mapsto x^2\cos(y)$ et carte IGN avec lignes de niveau pour l'altitude.

***Exercice* 1.3.** Déterminer et représenter les lignes de niveau des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x,y) \mapsto x \quad ; \quad f_2 : (x,y) \mapsto y \quad ; \quad f_3 : (x,y) \mapsto 1$$

$$f_4 : (x,y) \mapsto x + y + 1 \quad ; \quad f_5 : (x,y) \mapsto e^{y-x^2} \quad ; \quad f_6 : (x,y) \mapsto y - \cos(x).$$

1.2 Normes

Notre premier objectif dans ce cours sera d'étudier la régularité des fonctions de plusieurs variables. La notion de limite, sur laquelle reposent en particulier les notions de continuité et de dérivabilité, s'appuie elle-même sur la notion de proximité entre deux points. Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ si $f(x)$ est « proche » de l dès lors que x est « assez proche » de a. Intuitivement, deux réels x et y sont proches si la valeur absolue $|x - y|$ (quantité positive) est petite, en un sens à préciser.

Avant de parler de limite pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, il faut donc donner un sens précis à l'assertion « x est proche de y » lorsque x et y sont des points de $\mathbb{R}^n$.

En fait, on sait déjà mesurer la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$. Par exemple pour deux points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, la longueur du segment $[x,y]$ est donnée par

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Cette quantité sera appelée distance euclidienne entre x et y. Mais ce n'est pas toujours la bonne façon de mesurer la distance entre deux points, comme le montrent les exemples suivants. Considérons un piéton dans une ville organisée par blocs (voir figure 1.3), chaque bloc faisant 500m de côté. Il devra parcourir 1500m aussi bien pour aller du point A au point B que pour aller du point A au point C, alors que les distances euclidiennes (à vol d'oiseau) entre A et B et entre A et C sont respectivement de 1500m et $\sqrt{1000^2 + 500^2} \simeq 1118m$. Marseille est plus proche de Paris que de Toulouse si on regarde le temps de parcours par

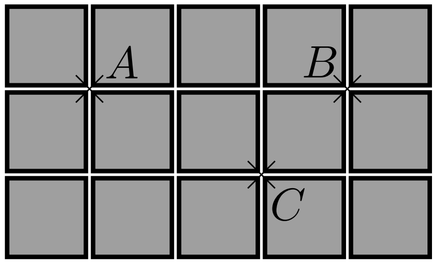


FIGURE 1.3 – Les villes américaines et les déplacements en norme l^1.

le train, alors que c'est quasiment deux fois plus loin en termes de kilomètres par la route. Ainsi il y a différentes façons de mesurer la distance entre deux points, et il n'y en a pas de bonnes ou de mauvaises : chacune est plus ou moins bien adaptée à chaque contexte.

Définition 1.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation),

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ (homogénéité),

(iii) $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Étant donnée une norme N sur E, on appelle distance associée à N l'application

$$d_N : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+, \\ (x,y) & \mapsto & N(x-y). \end{array} \right.$$

On note que toutes les distances ne sont pas obtenues de cette façon, mais on ne s'attardera pas sur ces questions dans ce cours (voir tout de même les exercices 1.16 et 1.17, plus de détails seront donnés dans le cours d'approfondissements mathématiques).

***Exercice* 1.4.** Vérifier que la valeur absolue définit bien une norme sur $\mathbb{R}$. Est-ce la seule ?

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|\,, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|\,.$$

***Exercice* 1.5.** Montrer que les applications $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.5. *L'application $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont faciles et laissées en exercice. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on considère deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si $x + y = 0$ alors le résultat est clair. Sinon on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= \sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j(x_j+y_j) + \sum_{j=1}^{n} y_j(x_j+y_j) \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j+y_j)^2} \\
&\leqslant \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)\|x+y\|_2 .
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité triangulaire en divisant par $\|x+y\|_2 \neq 0$. □

Définition 1.6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient N_1, N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $x \in E$ on a

$$N_1(x) \leqslant C N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant C N_1(x).$$

L'intérêt de savoir que deux normes sont équivalentes est que si deux points sont « proches » pour l'une alors ils sont également « proches » pour l'autre. Cela simplifie grandement la discussion. L'intérêt apparaitra plus clairement au chapitre suivant.

***Exercice* 1.6.** Montrer que les trois normes $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

La vraie bonne nouvelle est qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Comme on travaillera en dimension finie dans tout ce cours, cela signifie que lorsqu'on parlera de limites au chapitre suivant, on pourra le faire sans préciser la norme avec laquelle on travaille. Dans la suite, lorsqu'on parlera d'une norme sur $\mathbb{R}^n$, on ne précisera de laquelle il s'agit que quand ce sera nécessaire. Sinon cela signifiera que le résultat énoncé ne dépend pas du choix de la norme.

Attention tout de même à bien garder en tête cette subtilité, car tous les espaces ne sont pas de dimension finie, loin de là...

Proposition 1.7. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. La démonstration de ce résultat est admise pour ce cours. Elle sera donnée dans le cours d'approfondissements mathématiques. □

1.3 Ouverts et fermés.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Définition 1.8. Pour $x \in E$ et $r > 0$ on note

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|x-y\| < r\}$$

la boule ouverte de centre x et de rayon r,

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|x-y\| \leqslant r\}$$

la boule fermée de centre x et de rayon r, et enfin

$$S(x,r) = \{y \in E \mid \|x-y\| = r\}$$

la sphère de centre x et de rayon r.

Définition 1.9. Soit Ω une partie de E. On dit que Ω est ouvert si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. On dit que Ω est fermé si son complémentaire $E \setminus \Omega$ est ouvert.

Exemple 1.10. Dans $E = \mathbb{R}$, muni de la valeur absolue :
- Un intervalle de la forme $]a, b[$ avec $a < b$ est ouvert,
- un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ est fermé,
- un intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé,
- $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Exemple 1.11. • Une boule ouverte est un ensemble ouvert de E,
- une boule fermée ou une sphère sont des ensembles fermés de E.

Démonstration. On montre la première assertion de l'exemple 1.11. Soit $x \in E$ et $r > 0$. On considère $y \in B(x, r)$ et on note $\rho = r - \|y - x\| > 0$. Alors on a $B(y, \rho) \subset B(x, r)$. En effet pour tout $z \in B(y, \rho)$ on a par l'inégalité triangulaire

$$\|z - x\| \leqslant \|(z - y) + (y - x)\| \leqslant \|z - y\| + \|y - x\| < \rho + (r - \rho) = r.$$

Cela prouve que $B(x, r)$ est une partie ouverte de E. □

Définition 1.12. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Remarque 1.13. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a est un voisinage de a, mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Par la suite on dira qu'une propriété est vraie au voisinage de a s'il existe un voisinage de a sur lequel elle est vraie. Par exemple l'assertion « $f \geqslant 0$ au voisinage de a » signifie qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a, r)$ on a $f(x) \geqslant 0$.

Définition 1.14. On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est bornée s'il existe $R \geqslant 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Définition 1.15. On dit d'une partie de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle est fermée et bornée.

Attention, cette définition est propre à la dimension finie. Il y a d'autres définitions équivalentes de la compacité qui elles sont encore valables en dimension infinie. Mais on ne s'attardera pas sur la notion de compacité dans ce cours (là encore, ce sera fait dans le cours d'approfondissements mathématiques).

***Exercice* 1.7.** Parmi les intervalles de l'exemple 1.10, lesquels sont des parties compactes de $\mathbb{R}$?

1.4 Exercices

***Exercice* 1.8.** Déterminer et représenter le domaine de définition maximal des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}} \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x + y) \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(y)}{\sqrt{x - y}}.$$

***Exercice* 1.9.** Déterminer et représenter les lignes de niveau des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto x + y, \quad f_2 : (x, y) \mapsto |x| + |y|, \quad f_3 : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$f_4 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2, \quad f_5 : (x, y) \mapsto \max(x, y), \quad f_6 : (x, y) \mapsto xy.$$

***Exercice* 1.10.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f_1(x, y) = \sin(x) - \sin(y), \qquad f_2(x, y) = \sin(xy), \quad f_3(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{y^2}{9}\right),$$
$$f_4(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}, \qquad f_5(x, y) = \cos(x)e^{\frac{y}{5}}, \quad f_6(x, y) = \sin(x - y).$$

Associer à chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 son graphe (voir Figure 1.4) et ses lignes de niveau (voir Figure 1.5). NB : ce poly est disponible en couleurs à l'adresse `http://www.math.univ-toulouse.fr/~jroyer/enseignement.html`.

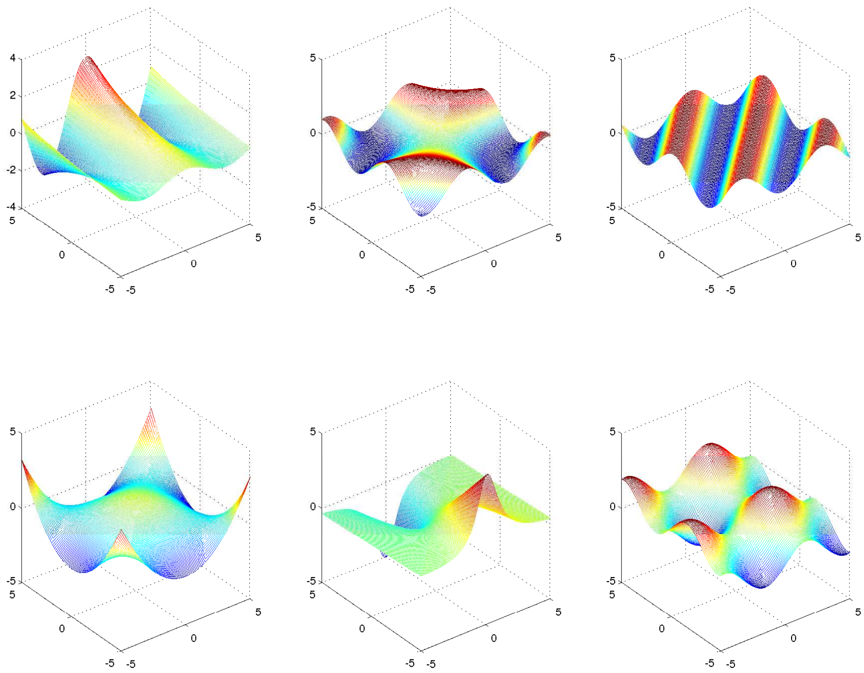


Figure 1.4 – Graphes pour l'exercice 1.10.

***Exercice* 1.11.** Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ la boule de rayon 1 et de centre 0 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

Pour aller plus loin

***Exercice* 1.12.** Compléter la démonstration des affirmations des exemples 1.10 et 1.11.

***Exercice* 1.13.** On note E l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on note

$$\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

(la somme est une somme finie).
1. Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
2. Montrer que les applications $u \mapsto \|u\|_1$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ sont des normes sur E.
3. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

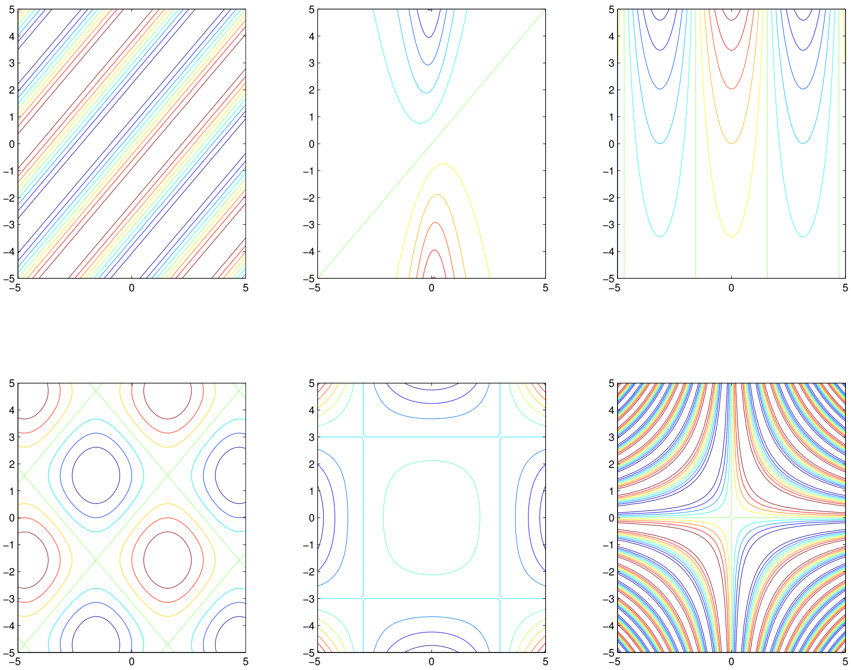


FIGURE 1.5 – Lignes de niveau pour l'exercice 1.10.

***Exercice* 1.14.** Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un certain $l \in \mathbb{R}^n$ on a $l \in F$.

***Exercice* 1.15.** On appelle distance sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y, z \in E$ on a
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E alors l'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E.

***Exercice* 1.16.** Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^n$.
2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

***Exercice* 1.17.** On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. On note $O = (0, 0)$ l'origine de $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on note

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si les points } x,\ y \text{ et } O \text{ sont alignés,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^2$.

2. Dessiner la boule fermée de centre $x_0 = (0, 2)$ et de rayon 3, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $d(x, x_0) \leqslant 3$.
3. On considère la suite $x_m = \left(1, \frac{1}{m+1}\right)$ de points de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = (1, 0)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais que $d(x_m, x)$ ne tend pas vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

***Exercice* 1.18.** On a déjà défini les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement pour $p \in [1, +\infty[$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ *(L'inégalité triangulaire pour cette norme est l'inégalité de Minkowski, qui repose elle-même sur l'inégalité de Hölder).*
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|x\|_\infty .$$