Chapitre 7

Théorème du point fixe - Théorème de l'inversion locale

Dans ce chapitre et le suivant, on montre deux applications importantes de la notion de différentiabilité : le théorème de l'inversion locale et le théorème des fonctions implicites. Ces deux théorèmes sont assez proches dans la mesure où on obtient assez facilement l'un comme conséquence de l'autre, mais les énoncés et surtout les applications sont bien distincts.

7.1 Théorème du point fixe

On commence par montrer le théorème du point fixe, sur lequel reposent les théorèmes de l'inversion locale et des fonctions implicites. C'est un théorème qui est également très utile par ailleurs. Par exemple, c'est aussi sur le théorème du point fixe que repose le théorème de Cauchy-Lipschitz, point de départ de la théorie des équations différentielles.

Théorème 7.1 (Théorème du point fixe)**.** *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction contractante de Ω dans Ω. Alors f admet un unique point fixe a (solution de l'équation $f(a) = a$) dans Ω. En outre si on se donne $x_0 \in \Omega$ et si on définit par récurrence $x_{m+1} = f(x_m)$, alors x_m tend vers cet unique point fixe quand m tend vers l'infini. Plus précisément, si $K \in [0,1[$ est tel que f est K-lipschitzienne alors on a*

$$\|x_m - a\| \leqslant \frac{K^m}{1-K} \|x_1 - x_0\| .$$

***Exercice* 7.1.** Dans chacun des cas suivants, montrer que la conclusion du théorème du point fixe n'est pas vérifiée, puis expliciter l'hypothèse qui n'est pas satisfaite :

(i) $\Omega =]0,1[$ et $f : x \mapsto x/2$,

(ii) $\Omega = [0,1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$,

(iii) $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$,

(iv) $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f : x \mapsto \sin(x)$.

Démonstration. Soit $K \in [0,1[$ tel que f est K-lipschitzienne. On suppose que x et y sont deux points fixes de f. Alors on a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant K \|x - y\| ,$$

ce qui implique que $\|x - y\| = 0$ et donc que $x = y$. Cela prouve l'unicité d'un éventuel point fixe pour f. Soit maintenant $x_0 \in \Omega$. Comme Ω est stable par f, on peut poser par récurrence $x_m = f(x_{m-1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|f(x_m) - f(x_{m-1})\| \leqslant K \|x_m - x_{m-1}\| ,$$

et donc on obtient par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leqslant K^m \|x_1 - x_0\| .$$

Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|x_{m+l} - x_m\| \leqslant \sum_{i=0}^{l-1} \|x_{m+i+1} - x_{m+i}\| \leqslant \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{l-1} K^{i+m} \leqslant K^m \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-K} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Cela prouve que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, elle converge vers une limite x. Comme Ω est fermé, cette limite appartient à Ω. Enfin pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a par définition

$$x_{m+1} = f(x_m).$$

Comme f est contractante elle est continue sur Ω, donc par passage à la limite ($m \to \infty$) on obtient

$$x = f(x).$$

D'où l'existence d'un point fixe et la propriété d'approximation par des suites. □

En fait on aura besoin d'une version à paramètre de ce théorème du point fixe :

Théorème 7.2 (Théorème du point fixe à paramètre)**.** *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et Λ une partie de $\mathbb{R}^m$. Soit f une fonction continue de $\Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+m}$ dans Ω. On suppose que f est uniformément contractante : il existe $K \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in \Lambda$ on a*

$$\|f(x,\lambda) - f(y,\lambda)\| \leqslant K \|x - y\| .$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x,\lambda)$ admet un unique point fixe a_λ (solution de l'équation $f(a_\lambda,\lambda) = a_\lambda$) dans Ω. En outre l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue de Λ dans Ω.

Démonstration. L'existence et l'unicité du point fixe a_λ résultent pour chaque $\lambda \in \Lambda$ du théorème 7.1. Il suffit de montrer la continuité. Soient $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| &= \|f(a_\lambda,\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| \\ &\leqslant \|f(a_\lambda,\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda)\| + \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| \\ &\leqslant K\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| + \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| .\end{aligned}$$

On obtient

$$\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| \leqslant \frac{1}{1-K} \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| ,$$

et donc la continuité de $\lambda \mapsto \alpha_\lambda$ en λ_0 est conséquence de la continuité de f au point $(a_{\lambda_0},\lambda_0)$. □

7.2 Théorème de l'inversion locale

On considère une application f de classe C^1 d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U}$.

On a dit que l'application affine $x \mapsto f(a) + d_a f(x-a)$ est une bonne approximation de la fonction f au voisinage du point a, et que des propriétés de cette appoximation on espère déduire des propriétés de f. Le but de ce paragraphe est de voir s'il est possible de faire un lien entre le fait que f est une bijection et le fait que sa différentielle en tout point de $\mathcal{U}$ est elle-même bijective. Tout d'abord il est facile de voir que si f est inversible, alors sa différentielle l'est également en tout point :

Proposition 7.3. *On suppose que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$. Alors $n = p$ et pour tout $a \in \mathcal{U}$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'inverse $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$.*

La démonstration repose simplement sur le calcul de la différentielle d'une fonction composée :

Démonstration. On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$. En différentiant on obtient que pour tout $a \in \mathcal{U}$ on a

$$d_{f(a)}(f^{-1}) \circ d_a f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}\,.$$

De même on a $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ donc pour tout $b \in \mathcal{V}$

$$d_{f^{-1}(b)} f \circ d_b(f^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}\,.$$

Avec $b = f(a)$ on obtient que

$$d_a f \circ d_{f(a)}(f^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}\,.$$

Cela prouve que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont isomorphes (ce qui implique que $n = p$), et $d_a f$ et $d_{f(a)} f^{-1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. ☐

En dimension 1, on sait qu'une fonction de classe C^1 d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas est injective, et en particulier elle réalise une bijection de I dans $f(I)$. En outre la réciproque est-elle même de classe C^1, donc f réalise un C^1 difféomorphisme de I dans $f(I)$. Il s'agit même d'un C^k-difféomorphisme si f est de classe C^k.

Malheureusement, tout cela repose sur le théorème de Rolle dont on a déjà dit qu'il n'était plus valable en dimension supérieure…

***Exercice* 7.2.** On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer que la différentielle de f est inversible en tout point.
3. Montrer que f n'est pas injective.
4. On considère l'application φ qui à $\theta \in [0, 2\pi]$ associe $\varphi(\theta) = f(0, \theta)$. Montrer que φ est de classe C^∞, que sa dérivée ne s'annule jamais, et que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.

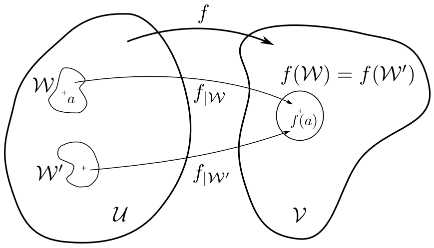
À la lumière de cet exemple on comprend qu'on ne pourra pas obtenir l'injectivité (propriété globale) à partir de l'inversibilité de la différentielle (propriété locale).

On va néanmoins l'obtenir localement : si la différentielle de f est inversible en un point, alors f réalise un difféomorphisme au voisinage de ce point. Ce n'est pas aussi fort qu'en dimension 1, mais c'est déjà un résultat très important qui illustre bien l'intérêt d'étudier la différentielle (il est bien plus facile de montrer qu'une application linéaire est inversible que de montrer directement qu'une fonction est localement inversible en un point).

Théorème 7.4 (Théorème de l'inversion locale)**.** *Soit f une fonction de classe C^k (avec $k \geqslant 1$) d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathcal{U}$. Si $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ alors $n = p$ et il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de a dans $\mathcal{U}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{W}$ réalise un C^1 difféomorphisme de $\mathcal{W}$ dans $f(\mathcal{W})$.*

Heuristique. Soit $a \in \mathcal{U}$. Étant donné y proche de $f(a)$, on cherche à montrer que l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x proche de a. Pour cela on écrit

$$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \ldots$$



Sous l'hypothèse que $d_a f$ est inversible, le théorème de l'inversion locale assure l'existence du voisinage $\mathcal{W}$ de a tel que f réalise un difféomorphisme de $\mathcal{W}$ sur $f(\mathcal{W})$. Cependant rien n'empêche l'existence de $b \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$ tel que $f(b) = f(a)$, donc on ne pourra pas conclure à l'injectivité globale. Cependant

- *le difféomorphisme entre $\mathcal{W}$ et $f(\mathcal{W})$ va tout de même nous rendre bien des services,*
- *et si par ailleurs on peut montrer l'injectivité globale, alors on aura un difféomorphisme global (c'est le corollaire 7.5).*

FIGURE 7.1 – Théorème de l'inversion locale

où les points de suspension désignent un petit reste. Si $d_a f$ est inversible et si on s'autorise à oublier ce reste, alors on peut écrire

$$y = f(x) \quad \underset{\approx}{\iff} \quad x = a + (d_a f)^{-1}(y - f(a)) + \dots$$

On obtient bien une unique solution, qui se trouve être proche de a. La démonstration rigoureuse du théorème repose sur le théorème du point fixe :

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}^p$ on considère l'application $\phi_y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\phi_y(x) = x - (d_a f)^{-1}(f(x) - y).$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, ϕ_y est de classe C^k sur Ω, sa différentielle ne dépend pas du paramètre y, et au point a on a

$$d_a \phi_y = d_a \phi_0 = 0.$$

Par continuité des dérivées partielles et donc de la différentielle, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a, r) \subset \mathcal{U}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^p$ et $x \in B(a, r)$ on a

$$|||d_x \phi_y||| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^p$ et $x_1, x_2 \in \overline{B}(a, r)$, on a alors d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Cela prouve que ϕ_y est contractante. D'autre part, par continuité de l'application linéaire $(d_a f)^{-1}$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(f(a), \delta)$ on a

$$\left\|(d_a f)^{-1}(f(a) - y)\right\| \leqslant \frac{r}{2}.$$

Pour $x \in \overline{B}(a, r)$ et $y \in B(f(a), \delta)$ on a donc

$$\|\phi_y(x) - a\| \leqslant \|\phi_y(x) - \phi_y(a)\| + \|\phi_y(a) - a\| \leqslant \frac{1}{2} \|x - a\| + \frac{r}{2} \leqslant r.$$

Ainsi ϕ_y envoie la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ dans elle-même. On peut donc appliquer le thérème du point fixe. Pour tout $y \in B(f(a), \delta)$ il existe un unique $x \in \overline{B}(a, r)$ tel que $\phi_y(x) = x$, soit $f(x) = y$. Notant $g(y)$ ce point fixe, g est donc une bijection de $B(f(a), \delta)$ dans son image $\mathcal{W} \subset \overline{B}(a, r)$ par g, et g est la réciproque de la restriction de f à $\mathcal{W}$.

Il reste à montrer que g est une application de classe C^k. En utilisant la version continue du théorème du point fixe (théorème 7.2) et le fait que l'application $(x, y) \mapsto \phi_y(x)$ est continue, on obtient directement que g est continue. Pour obtenir le caractère C^k, il faudrait montrer une version C^k du théorème du point fixe, ce qu'on ne fera pas ici. □

Corollaire 7.5 (Théorème de l'inversion globale)**.** *Soit f une application de l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$. On suppose que f est bijective, de classe C^k $(k \geqslant 1)$ et que pour tout $a \in \mathcal{U}$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme. Alors $n = p$ et f est un difféomorphisme de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$.*

On obtient finalement dans ce corollaire une propriété globale, mais la propriété d'injectivité qui faisait défaut pour l'exemple vu en début de paragraphe est ici ajoutée aux hypothèses. Rien d'extraordinaire donc...

Cet énoncé du théorème de l'inversion globale est bien pratique, mais il faut être conscient qu'il n'apporte pas grand chose par rapport au théorème de l'inversion locale 7.4. Il suffit de regarder la preuve pour s'en convaincre.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est de classe C^k au voisinage de tout point de $\mathcal{V}$. Soit $b \in \mathcal{V}$ et $a = f^{-1}(b)$. D'après le théorème de l'inversion locale appliqué en a, il existe des voisinages ouverts $\tilde{\mathcal{U}}$ de a dans $\mathcal{U}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$ de b dans $\mathcal{V}$ tels que f réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans $\tilde{\mathcal{V}}$. En particulier la restriction de f^{-1} à $\tilde{\mathcal{V}}$ est de classe C^k. D'où le résultat. ☐

7.3 Exercices

***Exercice* 7.3.** On considère de nouveau l'application f de l'exercice 7.2. On rappelle que f est de classe C^1.

1. Montrer que f définit une application surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

a. Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0).

b. Montrer que f définit un C^1-difféomorphisme local au voisinage de (x_0, y_0).

3. L'application f réalise-t-elle un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

***Exercice* 7.4.** Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est bien définie et réalise en tout point un difféomorphisme local de classe C^1, mais n'est pas un difféomorphisme global.

***Exercice* 7.5.** On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y) \end{array} \right.$$

Montrer que l'image de f est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

***Exercice* 7.6.** Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b| < r$ le problème

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 & = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) & = b \end{cases}$$

admet une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

***Exercice* 7.7.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x + a\cos(y), y + b\sin(x)) \end{array} \right.$$

1. A quelle condition sur (a,b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.

2. Montrer que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|$.

3. En déduire que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

***Exercice* 7.8.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la différentielle de f en 0 est un isomorphisme de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel f est injective.
4. Quel est le but de cet exercice ?

***Exercice* 7.9.** Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ (en particulier $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$). On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle d_x f(h), h \rangle \geqslant \alpha \|h\|_2^2 .$$

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geqslant \alpha \|b - a\|_2^2 .$$

On pourra considérer la fonction $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f(a + t(b-a))$.
2. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $f(F)$ est également un fermé de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que l'image par f d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
4. Montrer que f est surjective. *On pourra utiliser la connexité de $\mathbb{R}^n$: $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seules parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$.*

***Exercice* 7.10.** Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^1 sur Ω. On suppose que $d_x f$ est inversible pour tout $x \in \Omega$. Montrer que la fonction $x \mapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum en un point de la frontière $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ de Ω.

***Exercice* 7.11.** On se place dans l'espace $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|A - I_n\| \leqslant \alpha$ admet une racine carrée (cela signifie qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$).

***Exercice* 7.12.** Soient f et g deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et φ l'application qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe $(f(x,y), g(x,y))$. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} f(x,y) = u, \\ g(x,y) = v. \end{cases} \tag{S}$$

1. On suppose pour cette question qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = ax + by \quad \text{et} \quad g(x,y) = cx + dy.$$

On note

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Discuter selon le rang de la matrice A l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème (S).
2. On revient au cas général pour toute la suite de l'exercice. On suppose dans cette question que la matrice jacobienne de φ est inversible en tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si le système (S) admet une solution, alors elle est localement unique (en un sens à préciser).
3. On suppose maintenant que la matrice jacobienne de φ est nulle en tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrer que φ est constante sur $\mathbb{R}^2$. Discuter l'existence et l'unicité d'une solution pour le système (S).

4. Enfin on suppose que la matrice jacobienne de φ est de rang 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$. On suppose par exemple que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est non nulle sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que l'application $\psi : (x,y) \mapsto (f(x,y), y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Soient $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et $(X_0, Y_0) = \psi(x_0, y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $\mathcal{W}_X$ de X_0 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage $\mathcal{W}_Y$ de Y_0 dans $\mathbb{R}$ tels que si on note $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X \times \mathcal{W}_Y$ alors ψ réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}_X \times \mathcal{W}_Y$ (qu'on notera $\tilde{\psi}$).

c. On note $\Phi = \varphi \circ \tilde{\psi}^{-1}$ et $G = g \circ \tilde{\psi}^{-1}$. Justifier que Φ et Γ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathcal{W}$.

d. Soient $(x,y) \in \mathcal{V}$ et $(X,Y) = \psi(x,y) \in \mathcal{W}$. Montrer que (x,y) est solution de (S) si et seulement si

$$\begin{cases} X = u, \\ G(X,Y) = v. \end{cases} \tag{S'}$$

e. Montrer que la fonction G ne dépend pas de Y *(on pourra commencer par s'intéresser au rang de la jacobienne de Φ en tout point de $\mathcal{W}$).*

f. Discuter l'existence et l'unicité d'une solution pour le système (S').