Examen Partiel

Mercredi 20 novembre 2019 (1h30)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

On note δ la distribution de Dirac en 0. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la transformée de Fourier de f par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Si T est une distribution sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}T$ sa transformée de Fourier.

Exercice 1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = H(x)\cos(x)$.
1. Vérifier que f est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et rappeler la définition de la distribution associée à f (que l'on notera T_f).
2. Calculer la dérivée T_f' de la distribution T_f (par calcul direct, sans utiliser la formule des sauts).

Correction :
1. $\boxed{2}$ H est borélienne comme indicatrice de l'ouvert $]0, +\infty[$, et la fonction cosinus est continue et donc borélienne sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est borélienne comme produit de fonctions boréliennes. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, R]$, et donc

$$\int_K |f(x)|\, dx \leqslant \int_{-R}^{R} |f(x)|\, dx \leqslant \int_{-R}^{R} 1\, dx \leqslant 2R < +\infty,$$

donc f est intégrable sur $[-R, R]$. Cela prouve que f est localement intégrable. À f on peut alors associer la distribution T_f définie par

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, dx.$$

2. $\boxed{2}$ Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\langle T_f', \phi \rangle = -\langle T_f, \phi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \cos(x)\phi'(x)\, dx.$$

Par intégration par parties on obtient

$$\langle T_f', \phi \rangle = \cos(0)\phi(0) - \int_0^{+\infty} \sin(x)\phi(x)\, dx = \langle \delta - T_g, \phi \rangle,$$

où T_g désigne la distribution associée à la fonction $g : x \mapsto H(x)\sin(x)$, elle-même localement intégrable. D'où, finalement,

$$T_f' = \delta - T_g.$$

Exercice 2. Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ à support inclus dans $[-1, 1]$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $\rho_n(x) = n\rho(nx)$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $(\rho_n * \phi)$ converge uniformément vers ϕ quand n tend vers $+\infty$.

Correction : $\boxed{3}$ On commence par observer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, en faisant le changement de variable affine $\eta = nx$, $d\eta = n dx$,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} n\rho(nx)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(\eta)\, d\eta = 1.$$

Comme ϕ est continue et à support compact, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [-\delta, \delta]$ on a

$$|\phi(x-y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n \geqslant \frac{1}{\delta}$. Alors ρ_n est à support dans $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, qui est inclus dans $[-\delta, \delta]$, donc pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
|(\rho_n * \phi)(x) - \phi(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\phi(x-y)\, dy - \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\phi(x)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\big(\phi(x-y) - \phi(x)\big)\, dy \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\, |\phi(x-y) - \phi(x)|\, dy \\
&\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \rho_n(y)\, |\phi(x-y) - \phi(x)|\, dy \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \rho_n(y)\, dy = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela prouve que pour tout $n \geqslant \frac{1}{\delta}$ on a

$$\sup_{\mathbb{R}} |(\rho_n * \phi) - \phi| \leqslant \varepsilon,$$

et donc que $\sup_{\mathbb{R}} |(\rho_n * \phi) - \phi|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. **1.** Pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ on note $\check{f}$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f(-x)$. On dit alors que f est impaire si $\check{f} = -f$ presque partout. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on considère la distribution tempérée $\check{T}$ définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle.$$

On dit alors que T est impaire si $\check{T} = -T$.

a. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On note $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ la distribution associée. Montrer que T_f est impaire si et seulement si f est impaire.

b. Montrer que si T est impaire alors sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ est impaire.

2. On note maintenant T la distribution $\mathsf{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

a. Montrer que $xT = 1$ (où on a noté 1 la distribution tempérée associée à la fonction constante égale à 1).

b. Montrer que $(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(-ixT)$ et en déduire $(\mathcal{F}T)'$.

c. Montrer que $\mathcal{F}T$ est impaire.

d. Calculer $\mathcal{F}T$.

Correction : **1. a.** $\boxed{1{,}5}$ Pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a, en faisant le changement de variable $y = -x$,

$$\langle \check{T}_f, \phi \rangle = \langle T_f, \check{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(-y)\phi(y)\, dy = \left\langle T_{\check{f}}, \phi \right\rangle.$$

Cela prouve que $\check{T}_f = T_{\check{f}}$. Ainsi on a

$$\check{T}_f = -T_f \quad \Longleftrightarrow \quad T_{\check{f}} = T_{-f}.$$

L'application qui à $f \in L^1(\mathbb{R})$ associe la distribution tempérée T_f étant injective, on obtient finalement

$$\check{T}_f = -T_f \quad \Longleftrightarrow \quad \check{f} = -f \text{ presque partout,}$$

donc la distribution T_f est impaire si et seulement si la fonction f l'est.

b. $\boxed{\mathbf{1{,}5}}$ Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{F}\check{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \phi(-x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi} \phi(y)\, dy = \mathcal{F}\phi(-\xi).$$

D'où, si T est impaire,

$$\left\langle \widecheck{\mathcal{F}T}, \phi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F}T, \check{\phi} \right\rangle = \left\langle T, \mathcal{F}\check{\phi} \right\rangle = \left\langle T, \widecheck{\mathcal{F}\phi} \right\rangle = \left\langle \check{T}, \mathcal{F}\phi \right\rangle = -\left\langle T, \mathcal{F}\phi \right\rangle = -\left\langle \mathcal{F}T, \phi \right\rangle.$$

Cela prouve que $\mathcal{F}T$ est également impaire.

2. a. $\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a, par le théorème de convergence dominée,

$$\langle xT, \phi \rangle = \langle T, x\phi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{x\phi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx.$$

Cela prouve que $xT = 1$.

b. $\boxed{\mathbf{2{,}5}}$ Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour $y \in \mathbb{R}$ on a

$$(\mathcal{F}\phi')(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \phi'(x)\, dx = \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \phi(x)\, dx = iy(\mathcal{F}\phi)(y).$$

On en déduit

$$\left\langle (\mathcal{F}T)', \phi \right\rangle = -\left\langle \mathcal{F}T, \phi' \right\rangle = -\left\langle T, \mathcal{F}\phi' \right\rangle = -\langle T, iy\mathcal{F}\phi \rangle = -\langle iyT, \mathcal{F}\phi \rangle = -\langle \mathcal{F}(iyT), \phi \rangle.$$

Cela prouve que $(\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(-iyT)$. Ici, cela donne

$$\left\langle (\mathcal{F}T)', \phi \right\rangle = -\langle \mathcal{F}(i), \phi \rangle = -\langle (i), \mathcal{F}\phi \rangle = -i \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\phi(y)\, dy.$$

Avec la formule d'inversion de Fourier on obtient

$$\left\langle (\mathcal{F}T)', \phi \right\rangle = -i\sqrt{2\pi}\phi(0),$$

et donc

$$(\mathcal{F}T)' = -i\sqrt{2\pi}\delta.$$

c. $\boxed{\mathbf{1}}$ Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a

$$\left\langle \check{T}, \phi \right\rangle = \left\langle T, \check{\phi} \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\phi(-x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y| \geqslant \varepsilon} \frac{\phi(y)}{-y}\, dy = -\langle T, \phi \rangle.$$

Ainsi, T est une distribution impaire. D'après la question 1.b, c'est également le cas pour $\mathcal{F}T$.

d. $\boxed{\mathbf{1{,}5}}$ On a $T_H' = \delta$ et deux primitives d'une même distribution sur $\mathbb{R}$ ne diffèrent que d'une constante, donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\mathcal{F}T = -i\sqrt{2\pi}(H + \alpha).$$

La distribution $\mathcal{F}T$ est impaire. Or c'est la distribution associée à la fonction $-i\sqrt{2\pi}(H + \alpha)$. D'après la question 1.a, la fonction $H + \alpha$ est donc impaire, ce qui implique que $\alpha = -\frac{1}{2}$. D'où

$$\mathcal{F}T = -i\sqrt{2\pi}\left(H - \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 4. Si f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, alors pour $\lambda > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$f_\lambda(x) = f(\lambda x).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est homogène de degré k si pour tous $\lambda > 0$ et $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\left\langle T, \phi_{1/\lambda} \right\rangle = \lambda^{d+k} \left\langle T, \phi \right\rangle. \tag{$*$}$$

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution homogène de degré $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. Montrer que la distribution dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est homogène de degré $(k-1)$.
2. Soit T une distribution homogène de degré $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = kT,$$

où $x_j \frac{\partial T}{\partial x_j}$ désigne la multiplication de la distribution $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ par la fonction coordonnée $x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_j$.

Indication : on pourra dériver par rapport à λ l'égalité $(*)$.

Correction :
1. $\boxed{2}$ Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi_{1/\lambda} \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \phi_{1/\lambda}}{\partial x_j} \right\rangle$$

Or pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\frac{\partial \phi_{1/\lambda}}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)_{1/\lambda}(x).$$

Ainsi

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi_{1/\lambda} \right\rangle = -\frac{1}{\lambda}\left\langle T, \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)_{1/\lambda} \right\rangle = -\lambda^{d+k-1}\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = \lambda^{d+k-1}\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \phi \right\rangle.$$

Cela prouve que $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est homogène de degré $k-1$.
2. $\boxed{3}$ Soient $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $R > 0$ tel que le support de ϕ est inclus dans la boule $B(0, R)$. Pour $\lambda \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\Phi(\lambda, x) = \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Φ est de classe C^∞ et pour tout $\lambda \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ la fonction $\Phi(\lambda, \cdot)$ est à support dans $B(0, 2R)$. Par le théorème de dérivation sous le crochet on a alors

$$\frac{d}{d\lambda}\left\langle T, \phi_{1/\lambda} \right\rangle = \frac{d}{d\lambda}\left\langle T, \Phi(\lambda, \cdot) \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial}{\partial \lambda}\Phi(\lambda, \cdot) \right\rangle.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda, x) = -\sum_{j=1}^d \frac{x_j}{\lambda^2} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^d \frac{x_j}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Comme T est homogène de degré k on obtient alors

$$\frac{d}{d\lambda}\left\langle T, \phi_{1/\lambda} \right\rangle = -\lambda^{d+k-1}\sum_{j=1}^d \left\langle T, x_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle,$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\left\langle T,\phi_{1/\lambda}\right\rangle &= -\lambda^{d+k-1}\sum_{j=1}^{d}\left\langle T,\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j\phi)-\phi\right\rangle \\ &= d\lambda^{d+k-1}\left\langle T,\phi\right\rangle + \lambda^{d+k-1}\sum_{j=1}^{d}\left\langle x_j\frac{\partial T}{\partial x_j},\phi\right\rangle .\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\frac{d}{d\lambda}\lambda^{d+k}\left\langle T,\phi\right\rangle = (d+k)\lambda^{d+k-1}\left\langle T,\phi\right\rangle .$$

En $\lambda = 1$ cela donne

$$dT + \sum_{j=1}^{d} x_j\frac{\partial T}{\partial x_j} = (d+k)T.$$

D'où le résultat.