Quasi-Monte Carlo et dimension effective

Résumé :
On se place dans un espace A de dimension s_1. On cherche à estimer l'intégrale d'une fonction inconnue h définie sur A. La première idée serait d'utiliser la méthode Monte Carlo standard. Cependant, il est fréquent que pour des raisons de coût, la taille de l'échantillon des réalisations de h soit limitée. La précision obtenue n'est alors plus toujours satisfaisante. La méthode de quasi-Monte Carlo ayant une meilleure vitesse de convergence que Monte Carlo standard, pour un même nombre de points, la précision devrait être meilleure. Cependant, cette vitesse de convergence dépend de la dimension. Plus précisément, lorsque la dimension est trop élevée, la précision Monte Carlo est en théorie meilleure que celle de quasi-Monte Carlo. La solution dans ce cas est de réduire la dimension avant d'appliquer la méthode quasi-Monte Carlo. Pour réduire la dimension, il est possible d'effectuer un plan d'expériences permettant ainsi de ne retenir que les variables les plus importantes. Le nombre de variables ainsi obtenues s'apparente à la notion de dimension effective introduite par S.H. Paskov et J.F. Traub.

D'autre part, dans certaines applications, bien que la dimension soit grande, la méthode quasi-Monte Carlo donne de meilleurs résultats que Monte Carlo. Une des explication avancée est que la dimension effective de la fonction étant faible, la vitesse de convergence se rapproche plus de celle d'une restriction de h à un espace projeté. Cependant, la méthode quasi-Monte Carlo utilise des points issus d'une suite à discrépance faible. Or les suites à discrépance faible, bien que bien réparties dans l'espace de dimension s_1, présentent des irrégularités de répartition sur les projections. Certaines projections des points sont mieux réparties que d'autre. Il est alors facile d'imaginer que si la fonction dépend beaucoup d'une variable sur laquelle la projection des points est mal répartie, alors la précision des résultats sera moins bonne. L'intérêt de connaitre les variables importantes pour la fonction est qu'il est alors possible de choisir la suite de points optimale pour cette fonction. Il peut alors être interressant de connaitre un critère permettant de juger de l'adéquation de la suite à la fonction d'intérêt voire de construire la suite de points optimisant ce critère.