L2 Calcul Différentiel – Examen Terminal.

Exercice 1. *Soit $a > 0$. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}.$$

(1) *Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star)$ et déterminer les point critiques de f dans $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$.*

(2) *Montrer que f présente un minimum local en un point M_a que l'on demande de préciser.*

(3) *f est-elle majorée sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$?*

(4) *Montrer que M_a est un minimum global.*

(5) *Soit $b > 0$. quelle est l'équation du plan tangent à la surface $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y)\}$ au point $(b, b, f(b, b))$.*

(6) *Pour quelles valeurs du paramètre réel b ce plan tangent est-il parallèle au plan O_{xy} ? Ce résultat était-il prévisible ?*

(7) *A l'aide (obligatoirement) du théorème de Lagrange des extrema liés, déterminer les extrema de f sur la portion d'hyperbole $\mathscr{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \ : \ xy = 1\}$.*

Exercice 2. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $0 < k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k, \ \forall x \in \mathbb{R}$. On définit alors $F \ : \ \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto F(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$.*

(1) *Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.*

(2) *Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne.*

(3) *Montrer que F est un C^1-difféomorphisme local.*

(4) *On se propose de démontrer que F est injective. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et h_1, h_2 non tous deux nuls tels que $F(a+h_1, b+h_2) = F(a, b)$. Utiliser la question (1) pour en déduire qu'alors $|h_1| < |h_2|$ et $|h_2| < |h_1|$ puis conclure.*

(5) *Montrer que F est un C^1-difféomorphisme global.*

L2 Calcul Différentiel – Examen Terminal, Corrigé.

Exercice 3. *Soit $a > 0$. On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{a}{xy}.$$

(1) *Déterminer les point critiques de f dans $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$.*

(2) *Montrer que f présente un minimum en un point M_a que l'on précisera.*

(3) *f est-elle majorée sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$?*

(4) *Montrer que M_a est un minimum global (ce n'est pas complètement trivial, il faut peut-être rajouter une indic).*

(5) *Soit $b > 0$. quelle est l'équation du plan tangent à la surface $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z = f(x, y)\}$ au point $(b, b, f(b, b))$.*

(6) *Pour quelles valeurs du paramètre réel b ce plan tangent est-il parallèle au plan O_{xy} ? Ce résultat était-il prévisible ?*

(7) *A l'aide du théorème de Lagrange, déterminer les extrema de f sur la portion d'hyperbole $\mathscr{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star \; : \; xy = 1\}$.*

Solution :

(1) Sauf erreur de calcul nous avons :

$$\partial_x f(x, y) = 2x - \frac{a}{x^2 y}, \quad \partial_y f(x, y) = 2y - \frac{a}{y^2 x}.$$

(x, y) sera un point critique si $\partial_x f(x, y) = \partial_y f(x, y) = 0$, après un calcul élémentaire on doit avoir $x^3 y = xy^3$ soit $x = y$ car $x > 0$ et $y > 0$. En reportant alors dans les dérivées partielles on tire immédiatement $x = y = (a/2)^{1/4}$.

(2) f admet donc un unique point critique $M_a = ((a/2)^{1/4}, (a/2)^{1/4})$. Pour préciser sa nature on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 2 + \frac{2a}{x^3 y}, \; \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 2 + \frac{2a}{y^3 x}, \; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{a}{x^2 y^2}.$$

Soit ($x = y = (a/2)^{1/4}$ implique $x^3 y = y^3 x = a/2$) :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_a) = 6 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(M_a), \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(M_a) = 2.$$

les relations de Monge s'écrivent $rt - s^2 = 36 - 4 = 32 > 0$ et $r + t = 12 > 0$: M_a est bien un minimum local.

(3) f n'est certaiment pas majorée sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}_+^\star$ (par exemple $f(x, y) \geq x^2 + y^2 ...$).

(4) Montrer que M_a est un minimum global n'est pas complètement trivial. Soit $R > 1$, $f(x, y) \geq x^2 + y^2$ assure que $f(x, y) > R^2$ pour tout $(x, y) \notin \Omega_{1,R} := B(0_{\mathbb{R}^2}, R) \cap (\mathbb{R}_+^\star)^2$; de même, $f(x, y) \geq a/xy$ assure que $f(x, y) > aR^2$ pour tout $(x, y) \notin \Omega_{2,R} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \geq 1/R \; \& \; y \geq 1/R\} \cap (\mathbb{R}_+^\star)^2$. Par conséquent, en dehors de $\Omega_R = \Omega_{1,R} \cap \Omega_{2,R}$ on aura $f(x, y) \geq \max\{R^2, aR^2\} \underset{R \to +\infty}{\to} +\infty$. Autrement dit, pour R assez grand, le minimum de f sur $(\mathbb{R}_+^\star)^2$ sera atteint dans Ω_R et donc forcément en un point critique de f et donc forcément en M_a.

(5) Si on pose $g(x,y,z) = f(x,y) - z$, alors $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : g(x,y,z) = 0\}$; donc (cours) l'équation du plan tangent à Σ au point $A_b = (b,b,f(b,b))$ est donnée par

$$(x-b)\partial_x g(A_b)+(y-b)\partial_y g(A_b)+(z-f(b,b))\partial_z g(A_b) = (x-b)\partial_x f(b,b)+(y-b)\partial_y f(b,b)-(z-f(b,b)) = 0.$$

soit

$$x\left(2b - \frac{a}{b^3}\right) + y\left(2b - \frac{a}{b^3}\right) - z = 2b^2 - \frac{3a}{b^2}.$$

(6) La normale à ce plan est donc $(2b - \frac{a}{b^3}, 2b - \frac{a}{b^3}, -1)$, le plan sera parallèle au plan O_{xy} si ce vecteur est colinéaire à $(0,0,1)$ soit $2b - \frac{a}{b^3} = 0$ et $b = (a/2)^{1/4}$. On retombe bien sur le minimum local obtenu dans les questions précédentes, c'est rassurant !

(7) La demi-hyperbole $\mathscr{H}$ peut s'écrire $\mathscr{H} = \{h(x,y) = 0\}$ avec $h(x,y) = xy - 1$. On peut donc appliquer le théorème de Lagrange : un point $(x,y) \in \mathscr{H}$ sera un extrema de f sur $\mathscr{H}$ si les gradients de f et h sont colinéaires en (x,y). Cette condition équivaut à

$$\begin{vmatrix} y & 2 - \frac{a}{x^2 y} \\ x & 2 - \frac{a}{y^2 x} \end{vmatrix} = 0$$

soit $2y^2 - \frac{a}{xy} - \left(2x^2 - \frac{a}{xy}\right) = 2(y^2 - x^2) = 0$ soit (x et y sont > 0) $x = y$. comme $xy = 1$ on trouve un unique candidat : $(1,1)$. Pour préciser sa nature on peut remarquer que $f(1,1) = 2 + a$ et sur $\mathscr{H}$: $f(x,y) = x^2 + x^{-2} + a = (x - 1/x)^2 + a + 2 \geq a + 2$ avec égalité si et seulement si $x - 1/x = 0$ soit $x = y = 1$. $(1,1)$ est le minimum absolu et l'unique point critique de f sur $\mathscr{H}$. ■

Exercice 4. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $0 < k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k, \ \forall x \in \mathbb{R}$. On définit alors $F \ : \ \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto F(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$.*

(1) *Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$.*

(2) *Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer sa matrice jacobienne.*

(3) *Montrer que F est un C^1-difféomorphisme local.*

(4) *On se propose de démontrer que F est injective. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et h_1, h_2 non tous deux nuls tels que $F(a+h_1, b+h_2) = F(a,b)$. Utiliser la question (1) pour en déduire qu'alors $|h_1| < |h_2|$ et $|h_2| < |h_1|$ puis conclure.*

(5) *Montrer que F est un C^1-difféomorphisme global.*

(6) *Quelle est l'équation du plan tangent à la surface $\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = F(x,y)\}$ en un point $(a,b,F(a,b)$?*

Solution :

(1) Appliquer à f le théorème (ou mieux l'inégalité) des accroissements finis sur $[x,y]$.

(2) Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, F est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Un calcul élémentaire donne

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Avec la question précédente,

$$\det JF(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{vmatrix} = 1 - f'(y)f'(x) > 0,$$

car $|f'| \leq k < 1$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer à F le théorème d'inversion locale en tout point de $\mathbb{R}^2$: F est un C^1-difféomorphisme local.

(4) Soient donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et h_1, h_2 non tous deux nuls tels que $F(a+h_1, b+h_2) = F(a,b)$. On a

$$\begin{cases} a + h_1 + f(b+h_2) = a + f(b) \\ b + h_2 + f(a+h_1) = b + f(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(b+h_2) - f(b) = -h_1 \\ f(a+h_1) - f(a) = -h_2 \end{cases}$$

on applique alors à chacunes des deux égalités la question (1) :

$$|h_1| = |f(b+h_2) - f(b)| \leq k|h_2| < |h_2|$$

et de même pour la seconde. On trouve donc $|h_1| < |h_2|$ et $|h_2| < |h_1|$. Ces deux inégalités sont incompatibles, F est bien injective.

(5) F de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ est un C^1 difféomorphisme local injectif : c'est donc un C^1-difféomorphisme global d'aprés le théorème d'inversion globale. ■