Approches analytiques du théorème de d'Alembert-Gauss : un bestiaire

par Étienne FIEUX, Patrice LASSÈRE & Frédéric RODRIGUEZ

Étienne Fieux & Patrice Lassère : Laboratoire de Mathématiques E.Picard UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, fieux@picard.ups-tlse.fr & lassere@picard.ups-tlse.fr, Frédéric Rodriguez : Laboratoire du CERS, UMR CNRS 5177, Université Toulouse II, 5, allées Antonio Machado, 31058 Toulouse Cedex 9, frederic.rodriguez@univ-tlse2.fr

RÉSUMÉ. *Le théorème de d'Alembert-Gauss est l'objet de différentes approches, auxquelles correspondent différentes démonstrations, sujet principal de cet article.*

MOTS-CLÉS : *blibli*

1. INTRODUCTION

Le Théorème de d'Alembert-Gauss ou Théorème Fondamental de l'Algèbre (que l'on abrégera en TFA dans la suite), affirme que dans $\mathbb{C}[z]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Il suffit de parcourir divers traités[1] sur les fonctions holomorphes pour constater que l'analyse complexe fournit différentes manières d'établir ce théorème.

Nous nous proposons d'illustrer ce propos en exhibant de multiples démonstrations, chacune associée à un théorème-clef de la théorie élémentaire de la variable complexe. Cette accumulation de démonstrations peut sembler de prime abord surprenante. Il faut toutefois remarquer qu'analytiquement parlant, l'anneau $\mathbb{C}[z]$ des polynômes se plonge naturellement dans l'anneau des séries entières de rayon de convergence infini, i.e. dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, l'anneau

1. Voir par exemple http ://math.fullerton.edu/mathews/c2002/funtheorem/funtheorem.html.

des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Se placer dans un contexte plus général est très souvent en mathématiques un moyen efficace pour éclairer un point obscur.

L'histoire de ce théorème et de sa démonstration est extrêmement riche ; l'article de Remmert [**?**] est une excellente introduction ; on peut également citer [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], sans chercher à être exhaustif sur ce thème.

Nous organisons notre travail de la manière suivante : chaque paragraphe commencera par le rappel du théorème (ou de la version simplifiée qui nous sera nécessaire) utilisé pour démontrer le TFA. L'ordre des paragraphes suit l'ordre d'apparition des différents théorèmes dans l'incontournable "Analyse Réelle et Complexe" de W. Rudin ([**?**]) auquel nous renvoyons le lecteur pour des énoncés parfois plus complets[2].

Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite[3] holomorphe sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, la limite (dans $\mathbb{C}$) $\lim\limits_{\Omega \ni z \to a} \big(f(z) - f(a)\big)/(z-a)$ existe[4] ; on la note alors $f'(a)$. Une fonction holomorphe sur tout le plan complexe ($f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$) est dite entière et, comme il a déjà été noté, $\mathbb{C}[z] \subset \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Enfin, voici un résultat élémentaire que nous utiliserons à plusieurs reprises et dont nous laissons la démonstration au lecteur :

Lemme de croissance : Soit $P(z) = a_d z^d + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré d. Il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geqslant R$:

$$\frac{1}{2}|a_d|\,|z|^d \leqslant |P(z)| \leqslant 2|a_d|\,|z|^d$$

et, en particulier : $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \dfrac{|z|^\nu}{|P(z)|} = 0$ pour tout $0 \leqslant \nu < d$.

Pour aussi simple qu'il soit, ce lemme n'en demeure pas moins un résultat essentiel et il constitue l'argument-clef de la plupart des différentes approches du TFA qui suivent. En fait, cela n'est pas surprenant si l'on remarque que ce lemme caractérise les polynômes ; nous reviendrons sur ce point dans la conclusion.

Pour terminer cette longue introduction, il faut dire un mot (voir [**?**], [**?**], [**?**] et [**?**]) sur l'approche de d'Alembert pour établir le TFA. En passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, un nouvel objet voit le jour : l'argument d'un nombre complexe ; il est essentiellement lié à la topologie de $\mathbb{C}$ (il illustre le fait que l'on peut tourner autour d'un point). L'existence de racines d-ièmes et le fait qu'un polynôme atteigne sa borne inférieure sont alors les deux résultats fondamentaux.

---

2. Il faut profiter de cette occasion pour signaler qu'il s'agit d'une nouvelle édition : nouvelle traduction, un nouveau chapitre, et surtout de nombreux appendices historiques dans lesquels sont reproduits in extenso des articles fondateurs (B. Riemann, H. Lebesgue, R. Baire, S. Bernstein, J.P. Kahane...).
3. Le terme "holomorphe" ([**?**], p. 272-73) tire son origine du grec *holos* pour *entier* ou *restant préservé* et de *morphê* désignant la *forme* ; il souligne le caractère de rigidité des fonctions holomorphes.
4. On notera qu'il existe différentes manières de définir une fonction holomorphe ; nous suivons ici la présentation de W. Rudin (def. 10.2). En particulier, une fonction localement développable en série entière sur un ouvert est holomorphe sur cet ouvert.

La « démonstration » de d'Alembert (1746) illustre parfaitement cette situation. Bien que logiquement correcte, elle comportait quelques lacunes tout à fait normales pour cette époque ; sa stratégie est la suivante : si P est sans zéro sur $\mathbb{C}$ alors $\inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| > 0$ et est atteint en un point $a \in \mathbb{C}$. On utilise alors la structure complexe pour montrer que $P(a) = 0$. Dans cet esprit, la première approche correcte (1804) est due[5] au mathématicien suisse J.R. Argand ([**?**], [**?**]) (sans pouvoir toutefois justifier que l'*inf* est atteint, pas plus que ne sauront le faire Gauss ou Cauchy). Voici la démonstration ; bien sûr, la notion d'holomorphie n'intervient pas mais la structure complexe justifie sa présence ici. Tout repose sur le résultat suivant, parfois appelé *inégalité d'Argand* :

($\bigstar$) *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non constant. Alors pour tout $c \in \mathbb{C}$ tel que $P(c) \neq 0$, on peut trouver c' dans $\mathbb{C}$ tel que :*

$$|P(c')| \, < \, |P(c)|$$

Démonstration. [Preuve de ($\bigstar$) :] Notons d'abord le résultat suivant. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $Q(z) := 1 + bz^k + z^k R(z) \in \mathbb{C}[z]$ avec $b \in \mathbb{C}^*$, $R \in \mathbb{C}[z]$ vérifiant $R(0) = 0$. On peut alors trouver $c \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$|\, Q(c) \,| < \, 1$$

En effet, soit d une racine k-ième de $-1/b$. Puisque $bd^k = -1$, on peut écrire :

$$\forall\, t \in [0,1]\,, \quad |Q(dt)| \, \leqslant \, |1 - t^k| \, + \, |d^k t^k R(dt)| \, = \, 1 - t^k + t^k |d^k R(dt)|$$

et, par continuité de R (en 0 où R s'annule), on peut trouver $t \in]0,1[$ tel que $|d^k R(dt)| < 1/2$ et également : $|Q(dt)| < 1 - t^k + t^k/2 < 1$.

On obtient à présent *l'inégalité d'Argand* en associant au polynôme non constant P le polynôme Q défini par :

$$Q(z) = \frac{P(c+z)}{P(c)}$$

Puisque $Q(0) = 1$, on peut écrire $Q(z) := 1 + bz^k + z^k R(z) \in \mathbb{C}[z]$ avec $b \in \mathbb{C}^*$, $R \in \mathbb{C}[z]$ vérifiant $R(0) = 0$ et, d'après le résultat qui précède, il existe un nombre complexe u tel que $|Q(u)| < 1$. Ainsi, si $c' = c + u$, on obtient l'inégalité cherchée :

$$|P(c')| \, = \, |Q(u)|\, |P(c)| \, < \, |P(c)|$$

Le TFA s'ensuit immédiatement :

Preuve $\boxed{0}$ **du TFA** : Par le *lemme de croissance*, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$ mais l'*inégalité d'Argand* montre alors que la seule alternative est $|P(z_0)| = 0$. □

5. La première preuve de Gauss est différente : il montre que les ensembles algébriques $\{\mathrm{Re}\, P = 0\}$ et $\{\mathrm{Im}\, P = 0\}$ ont une intersection non vide ; cette démonstration est d'ailleurs aussi incomplète, cf. [**?**].

2. Par le théorème de Cauchy

Soient Ω un ouvert convexe du plan complexe, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et γ un cercle inscrit dans Ω orienté positivement. Le ***théorème de Cauchy*** *([**?**], th. 10.35) affirme que :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Preuve $\boxed{1}$ **du TFA** : Supposons[6] qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ non constant et sans zéro sur $\mathbb{C}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$; en effet, sinon, il suffit de considérer le polynôme :

$$Q(z) := P(z)\overline{P(\overline{z})} = (a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0)(\overline{a_d}\, z^d + \ldots + \overline{a_1}\, z + \overline{a_0})$$

qui sera toujours sans zéro sur $\mathbb{C}$ et vérifiera bien $Q(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. L'application $\varphi : [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto \varphi(\theta) := 1/P(2\cos\theta)$ est alors continue et de signe constant sur $[0, 2\pi]$; par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(2\cos\theta)} \neq 0. \tag{1}$$

Mais on peut aussi écrire :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(2\cos\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{ie^{i\theta}P(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{zP(z+z^{-1})}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^{d-1}dz}{z^d P(z+z^{-1})} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} f(z)dz,$$

où $f(z) = z^{d-1}/R(z)$ avec $R(z) = z^d P(z+z^{-1}),\ R(0) = a_d \neq 0$; R est un polynôme de degré d sans zéro sur $\mathbb{C}$. Il s'ensuit que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et, par le *théorème de Cauchy* :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(2\cos\theta)} = \int_{|z|=1} f(z)dz = 0\,, \tag{2}$$

ce qui contredit (1) et achève la démonstration. □

Preuve $\boxed{2}$ **du TFA** : Pour $R > 0$, on considère dans le demi-plan $\{Im(z) \geqslant 0\}$, le circuit Γ_R orienté positivement, constitué du demi-cercle C_R centré à l'origine d'extrémités $(R, 0)$ et $(-R, 0)$ et du segment $[-R, R]$. Selon ce qui précède, si $P \in \mathbb{C}[z]$ est non constant et sans zéro sur $\mathbb{C}$, le *théorème de Cauchy* nous assure que

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{P(z)\overline{P(\overline{z})}} = 0, \qquad \forall\, R > 0\,. \tag{3}$$

6. R.P. Boas, Amer. Math. Monthly, 71(1964), 298-300.

Mais, pour $R > 0$:

$$0 = \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{P(z)\overline{P(\overline{z})}} = \int_{C_R} \frac{dz}{P(z)\overline{P(\overline{z})}} + \int_{I_R} \frac{dz}{P(z)\overline{P(\overline{z})}}$$
$$= \int_{C_R} \frac{dz}{P(z)\overline{P(\overline{z})}} + \int_{I_R} \frac{dz}{|P(z)|^2} = \varphi(R) + \psi(R) .$$

P étant de degré supérieur ou égal à 1, il existe $R_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que : $|z| > R_0 \Rightarrow |P(z)| \geqslant C|z|$. Ainsi :

$$|\varphi(R)| \leqslant \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{C^2R^2} \leqslant \frac{\pi}{C^2R}, \qquad R > R_0 ,$$

i.e. $\lim_{R\to+\infty} \varphi(R) = 0$.

D'un autre côté, $\psi(R) = \int_{I_R} \frac{dz}{|P(z)|^2}$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ et à valeurs strictement positives : mais ceci est absurde puisque l'on a aussi $\varphi(R) + \psi(R) = 0$, $\forall R > 0$ et $\lim_{R\to+\infty} \varphi(R) = 0$. La fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto (P(z)\overline{P(\overline{z})})^{-1}$ ne peut donc être holomorphe sur tout le plan complexe et P doit donc posséder au moins une racine sur $\mathbb{C}$. La démonstration est terminée. $\square$

Preuve $\boxed{3}$ du TFA : *Une autre variante*[7], *plus simple que les deux précédentes, nécessite le résultat suivant*[8] *: si une fonction est holomorphe sur un disque, sauf peut-être en son centre où cependant elle se prolonge continuement, alors elle se prolonge holomorphiquement sur tout le disque*[9].

On considère :

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

où notre polynôme P est supposé sans zéro sur $\mathbb{C}$; f est alors bien définie et est entière. La fonction :

$$\Psi(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

à priori holomorphe sur $\mathbb{C}^\star$, se prolonge continuement à l'origine en posant $\Psi(0) = f'(0)$. D'après le rappel ci-dessus, c'est alors une fonction entière et l'intégrale sur le cercle $\mathcal{C} = C(0, R)$ de Ψ est donc nulle (*théorème de Cauchy*), d'où :

$$0 = \int_{\mathcal{C}} \Psi(z)dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) - f(0)}{z} dz = \int_0^{2\pi} (f(Re^{i\theta}) - f(0))\, i\, d\theta .$$

---

7. B.L. Van der Waerden, Algebra, vol. I, Springer-Verlag, 1991.
8. Voir la conclusion où nous revenons sur ce résultat.
9. Pour une preuve analogue à celle de Van Der Waerden et évitant le recours à ce résultat, on pourra consulter l'ouvrage de D. Leborgne, *Calcul différentiel et complexe*, Que sais-je ? no. 2560, Presses Universitaires de France, 1996.

et par conséquent :

$$(\star) \qquad 2i\pi f(0) = \int_0^{2\pi} f(0) i d\theta = \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) i d\theta.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en choisissant R assez grand (d'après le *lemme de croissance*), on aura $| f(Re^{i\theta}) | < \varepsilon$ et :

$$\Big| \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) i d\theta \Big| < 2\pi\varepsilon$$

d'où, en utilisant $(\star)$:

$$| 2\pi i f(0) | < 2\pi\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

dont on déduit $f(0) = 0$, ce qui est absurde. $\square$

3. Par le développement en série entière

*Toute fonction entière $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ se développe en série entière sur tout le plan complexe ([**?**], th. 10.16) i.e. : $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^k,\ z \in \mathbb{C}$.*

Preuve $\boxed{4}$ du TFA : Ici, la démonstration [10] du TFA repose sur le fait suivant : si $P \in \mathbb{C}[z]$ est non constant sans zéro sur $\mathbb{C}$, $f := 1/P \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et on a le développement :

$$(5) \qquad f(z) = \frac{1}{P(z)} = \sum_{k\geqslant 0} b_k z^k, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

avec :

$$(\star) \qquad \exists\, C > 0,\ \exists\, R > 0 \text{ telsque } |b_k| > CR^k \text{ pourunnombreinfinide } k.$$

Avant d'établir cette dernière proposition, montrons comment le TFA en est un corollaire immédiat : par $(\star)$, le rayon de convergence ρ de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} b_k z^k$ est fini car $\rho \leqslant 1/R < +\infty$; d'où la contradiction avec (5). $\square$

Preuve de $(\star)$ *:* Puisque $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$ avec $a_d \neq 0$, un argument élémentaire de continuité nous permet de choisir $R > 0$ vérifiant :

$$(6) \qquad |a_0|R^d + |a_1|R^{d-1} + \ldots + |a_{d-1}|R \leqslant |a_d|$$

10. D.J. Vellman, Math. Mag., 70(1997), no.3.

b_0 étant lui aussi non nul, choisissons $C > 0$ de sorte que :

$$|b_0| > C = CR^0 \tag{7}$$

Par ailleurs, on a pour tout complexe z :

$$1 = P(z)f(z) = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d)(b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k + \cdots)$$

et, en particulier,

$$a_0 b_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_0 b_{d+k} + a_1 b_{d+k-1} + \ldots + a_d b_k = 0, \ \forall k \geqslant 1$$

On remarque alorsque cette dernière égalité et l'inégalité (6) impliquent :

$$|b_k| > CR^k \Rightarrow \exists\, 1 \leqslant i \leqslant d \text{ tel que } |b_{k+i}| > CR^{k+i} \tag{8}$$

En effet, si pour un k fixé et pour tout i entier variant de 1 à d, on suppose que $|b_{k+i}| \leqslant CR^{k+i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
|b_k| &= \frac{|a_0 b_{d+k} + a_1 b_{d+k-1} + \ldots + a_{d-1} b_{k+1}|}{|a_d|} \\
&\leqslant \frac{|a_0 b_{d+k}| + |a_1 b_{d+k-1}| + \ldots + |a_{d-1} b_{k+1}|}{|a_d|} \\
&\leqslant \frac{|a_0| CR^{d+k} + |a_1| CR^{d+k-1} + \ldots + |a_{d-1}| CR^{k+1}}{|a_d|} \\
&\leqslant CR^k \qquad \text{par}\,(6)
\end{aligned}$$

Le résultat $(\star)$ est ainsi démontré par les inégalités (7) et (8) (la première servant d'amorce). $\square$

4. Par le théorème de Liouville

*Le **théorème de Liouville** ([**?**], th. 10.23) affirme que toute fonction entière bornée est constante.*

Preuve $\boxed{5}$ du TFA : Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré supérieur ou égal à 1 et sans zéro dans le plan complexe. La fonction $f := 1/P$ est entière et $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$ (lemme de croissance) et, par continuité, f est bornée sur $\mathbb{C}$; le *théorème de Liouville* entraîne que f est constante, ce qui est absurde, puisque P est supposé non constant. $\square$

Cette preuve est la plus rapide et c'est celle que l'on rencontre le plus fréquemment. On notera d'ailleurs que le *théorème de Liouville* est un corollaire immédiat des *inégalités de Cauchy* que l'on peut très facilement obtenir avec les outils du premier cycle[11].

---

11. J.M. Monier, Exercices 2$^{\text{e}}$ année, MP, exercice 5.5.28, Vuibert.

5. Par le principe du maximum

Principe du Maximum *([?], th.10.24) : Toute fonction holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}$ dont le module présente un maximum local est constante sur ce domaine.*

Quitte à considérer $1/f$, un corollaire immédiat est le **Principe du Minimum** *: si $|f|$ présente en un point $a \in \Omega$ un minimum local, alors ou bien $f(a) = 0$, ou bien f est constante sur Ω.*

Preuve $\boxed{6}$ du TFA : Toujours par le *lemme de croissance*, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$: il existe donc $a \in \mathbb{C}$ tel que $|P(a)| \leqslant |P(z)|, \forall\, z \in \mathbb{C}$. Si $P(a) \neq 0$, en appliquant le *Principe du Maximum* à $1/P$ sur un disque centré en a, on obtient la contradiction désirée. □

Preuve $\boxed{7}$ du TFA : Soit $P(z) = a_d z^d + \ldots + a_0$, un polynôme non constant de degré d. Puisque $a_d \neq 0$, on peut trouver $x > 0$ tel que $|P(0)| < |a_d|\, x^d$, et (*lemme de croissance*), quitte à prendre $x > 0$ suffisamment grand, on aura aussi :

$$|P(0)| < \max_{|z|=x} |P(z)|.$$

Le minimum de $|P|$ sur la boule $\overline{B(0,x)}$ est donc atteint en un point a de la boule ouverte $B(0,x)$ et, via le *Principe du Minimum* : $P(a) = 0$. □

Remarque : Il vaut la peine ici de citer l'article de D. Vaggione[12] qui donne une démonstration élémentaire du *Principe du Maximum* pour les fractions rationnelles sur un disque (ce qui est largement suffisant pour obtenir le TFA). Tout repose sur le petit lemme fort astucieux qui suit :

- ***Lemme :*** Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une fonction telle que $f(D(a,\varepsilon))$ soit inclus dans un demi-plan dont le bord contient l'origine. Pour $k \geqslant 1$, si $\lim\limits_{z\to a} f(z)/(z-a)^k$ existe, elle est nulle.

  Preuve : Supposons que $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)}{(z-a)^k} = b \neq 0$. Quitte à considérer αf $(\alpha \in \mathbb{C})$ à la place de f (i.e. quitte à faire une rotation pour que le demi-plan admette pour frontière l'axe des ordonnées), on peut supposer que $f(D(a,\varepsilon)) \subset \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$. Soit alors $(z_n)_n$ une suite convergente de nombres complexes de limite a telle que $b(z_n - a)^k \in \mathbb{R}_-$, $\forall\, n \geqslant 1$, alors on a :

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{b(z_n-a)^k} = \operatorname{Re}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{b(z_n-a)^k}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\big(f(z_n)\big)}{b(z_n-a)^k} \leqslant 0$$

  ce qui est absurde. □

12. Colloq. Math., 73(1997), no.2, 193-194 et 77(1998), no.2, 321.

- ***Proposition : (Principe du Maximum pour les Fractions Rationnelles)*** Soit $R(z) = P(z)/Q(z)$ une fraction rationnelle où P et Q sont premiers entre eux. S'il existe $a \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall\, z \in D(a, \varepsilon)$, $Q(a) \neq 0$ et $|R(z)| \leqslant |R(a)|$, alors R est constante.

  Preuve : Supposons que R ne soit pas constant. Puisque $P_1(z) := Q(a)P(z) - P(a)Q(z)$ admet $z = a$ comme zéro, il existe un entier $k \geqslant 1$, un polynôme S tels que $P_1(z) := (z-a)^k S(z), S(a) \neq 0$. Alors :

$$\frac{R(z) - R(a)}{(z-a)^k} = \frac{P_1(z)}{Q(a)Q(z)(z-a)^k} = \frac{S(z)}{Q(a)Q(z)}$$

  d'où :

$$\lim_{z \to a} \frac{R(z) - R(a)}{(z-a)^k} = \frac{S(a)}{Q(a)^2} \neq 0\,.$$

  D'autre part, $|R(z)| \leqslant |R(a)|$, $\forall\, z \in D(a, \varepsilon)$, et par conséquent $f(z) := R(z) - R(a)$ vérifie les hypothèses du lemme, ce qui entraîne la contradiction recherchée. $\square$

6. Par le théorème de l'application ouverte

Le ***théorème de l'application ouverte*** *([**?**], pp 256) affirme, que toute application holomorphe non constante est ouverte (i.e. l'image par cette application de tout ouvert de $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$).*

Preuve $\boxed{8}$ **du TFA** : Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non constant. On sait que l'image réciproque de toute partie bornée est bornée (car $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$). Ainsi, si $w \in \overline{P(\mathbb{C})}$, il existe une suite $(w_n)_n \subset P(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers w et cette suite est bornée ; on peut donc extraire de sa préimage $P^{-1}(\ (w_n)_n\ )$ (relativement compacte dans $\mathbb{C}$) une sous-suite $(z_{n_k})_k \subset \mathbb{C}$ vérifiant $\lim\limits_k z_{n_k} = z$ et $P(z_{n_k}) = w_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. P étant continue, on obtient $P(z) = w$, i.e. $w \in P(\mathbb{C})$.

$P(\mathbb{C})$ est donc une partie fermée de $\mathbb{C}$: or, c'est aussi un ouvert non vide par le *théorème de l'application ouverte*. Finalement, par connexité de $\mathbb{C}$: $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, et, en particulier, $P^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$; autrement dit, P admet au moins une racine complexe. $\square$

7. Par le théorème de Rouché

Le ***théorème de Rouché*** *([**?**], th. 10.43) énonce que, γ étant un cercle inclus dans un ouvert convexe Ω du plan complexe, si $f,\, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifient :*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad \forall\, z \in \gamma$$

alors f et g ont le même nombre de zéros à l'intérieur de γ.

Preuve $\boxed{9}$ du TFA : Soit $P(z) = a_d z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ où $d \geqslant 1$. Écrivons $P(z) = f(z) + g(z)$ avec $f(z) = a_d z^d$ et $g(z) = a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. On a

$$\lim_{|z|\to+\infty} \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| = \lim_{|z|\to+\infty} \left|\frac{a_{d-1}}{z a_d} + \ldots + \frac{a_1}{a_d z^{d-1}} + \frac{a_0}{a_d z^d}\right| = 0$$

et on peut trouver $R > 0$ suffisamment grand pour que

$$|g(z)| \leqslant |f(z)|, \qquad \forall\, |z| = R\,.$$

Supposons P sans zéro sur le cercle $C(0, R)$, (sinon il n'y a rien à démontrer !), on peut alors appliquer le *théorème de Rouché* : f et $f + g = P$ ont le même nombre de zéros (i.e. d zéros, comptés avec leurs multiplicités dans le disque $D(0, R)$) et le tour est joué. $\square$

8. Par le principe de l'argument

*Pour une fonction f méromorphe sur $\mathbb{C}$ ne possédant qu'un nombre fini de zéros et de pôles, si $\gamma \subset \mathbb{C}$ est un cercle orienté ne rencontrant ni zéro ni pôle (voir [**?**] chap. 10 et la conclusion pour les notions de pôle et de fonction méromorphe) de f, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathcal{N} - \mathcal{P} \tag{4}$$

où $\mathcal{N}$ (respectivement $\mathcal{P}$) désigne le nombre de zéros (resp. pôles) de f dans le domaine borné délimité par γ.

Preuve $\boxed{10}$ du TFA : Soient $P(z) = a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z],\ d \geqslant 1$ et $r > 1$ assez grand (dont l'existence est assurée par le *lemme de croissance*) pour que $|P(z)| \geqslant 1,\ \forall\, |z| \geqslant r$. Pour un tel z, on peut écrire :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d}{z} + R(z)$$

où $R(z)$ est une somme de termes en $1/z^m$ avec $m \geqslant 2$. Dit autrement, le terme de droite est le développement en série de Laurent de f centré en l'origine pour $|z| \geqslant r$ et il est bien connu que cette dernière série est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus B(0, r)$. Ainsi, si on choisit pour γ le cercle $C(0, r + \epsilon)$, de

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z^\nu} = 0 \text{ si } \nu \geqslant 2 \text{ et } 1 \text{ pour } \nu = 1$$

et (4), vient aussitôt $\mathcal{N} = d$ (bien sûr $\mathcal{P} = 0$ car $P \in \mathbb{C}[z]$) ; i.e. P possède d racines sur $\mathbb{C}$. $\square$

9. Par le théorème de Picard

*Le très fameux **théorème de Picard** ([**?**], th. 16.22) affirme qu'une fonction entière ne peut omettre deux valeurs sans être constante (on notera que deux est optimal, par exemple la fonction entière non constante $f(z) = e^z$ n'omet que la valeur 0).*

Preuve $\boxed{11}$ **du TFA** : Soit [13] : $P(z) = a_d z^d + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme non constant. Supposons P sans zéro sur $\mathbb{C}$, alors P va aussi éviter une des valeurs $k^{-1},\ k \in \mathbb{N}$.

En effet, dans le cas contraire, on peut trouver, pour tout entier k, au moins un complexe z_k tel que $P(z_k) = k^{-1}$. Mais par le *lemme de croissance*, la suite $(z_k)_k$ est bornée et possède donc une valeur d'adhérence $\zeta = \lim_p z_{k_p}$. Ainsi, par continuité de P :

$$P(\zeta) = \lim_p P(z_{k_p}) = 0\,.$$

Ceci est exclu : P doit donc éviter une des valeurs $k^{-1},\ k \in \mathbb{N}$ (et même toutes à partir d'un certain rang). P, évitant les deux valeurs 0 et k^{-1}, est donc constant par *le théorème de Picard* : contradiction et P admet nécessairement au moins une racine dans $\mathbb{C}$. □

Preuve $\boxed{12}$ **du TFA** : Soit [14] (toujours par le *lemme de croissance*) $R > 0$ tel que :

$$|z| \geqslant R \qquad \Rightarrow \qquad |P(z)| \geqslant 1\,.$$

Par ailleurs, si $P \in \mathbb{C}[z]$ non constant, est sans zéro sur $\mathbb{C}$:

$$\inf_{|z| \leqslant R} |P(z)| = \alpha > 0$$

i.e.

$$P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus D\big(0, \inf(1,\alpha)\big)\,.$$

P évite donc bien plus qu'un point, et par le *théorème de Picard*, il est constant : contradiction. □

10. Par le logarithme complexe

*Toute fonction entière f sans zéro sur $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $f = e^g$ où $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ([**?**], 15.9).*

13. R.P. Boas R.P. , Amer. Math. Monthly, 42(1935), no. 8.
14. P. Kemp & A. Abian, Far East J. Math. Sci., 5(1997), no.4, 623-626.

Preuve $\boxed{13}$ **du TFA** : Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $d \geqslant 1$ sans zéro sur $\mathbb{C}$; il existe donc $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $P = e^g$. De plus, $P' = g'e^g = g'P$ et on a :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = g'(z),\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Par le *lemme de croissance* (P est non constant)

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{P'(z)}{P(z)} = \lim_{|z|\to+\infty} g'(z) = 0$$

Cela entraîne que g' est identiquement nulle (c'est une fonction constante - elle est bornée et on applique *Liouville* - s'annulant à l'infini). Par conséquent, g est constante sur $\mathbb{C}$ et P également, d'où la contradiction. $\square$

11. Et par la formule de la moyenne

Pour toute fonction f holomorphe et sans zéro sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et tout disque $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, on a, selon la ***formule de la moyenne*** *([**?**], 11.10) :*

$$\log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z_0 + Re^{i\theta})|\, d\theta\ .$$

Preuve $\boxed{14}$ **du TFA** : Soit à nouveau $P(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$, non constant et sans zéro sur $\mathbb{C}$. On peut donc appliquer la *formule de la moyenne* à P sur tout disque $D(0, R)$, ce qui nous donne

$$\log|P(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(Re^{i\theta})| d\theta\ .$$

Quitte à choisir $R > 0$ assez grand, par le *lemme de croissance*, on obtient :

$$\log|P(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|P(Re^{i\theta})| d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big(\frac{|a_d|R^d}{2}\big) d\theta = \log\big(\frac{|a_d|R^d}{2}\big)$$

Le premier terme est fini alors que le dernier tend vers $+\infty$ avec R : c'est absurde et P a forcément au moins un zéro sur $\mathbb{C}$. Le TFA est encore une fois démontré. $\square$

12. Conclusion

On a remarqué l'importance du *lemme de croissance*. il est la clef de pratiquement toutes les preuves ci-dessus. On peut essayer de comprendre ce phénomène en observant que dans l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ la condition "$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$" caractérise exactement les polynômes non constants. En effet, soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$ et soit $g(z) := f(1/z)$. g est clairement holomorphe sur $\mathbb{C}^\star$, possède une singularité à l'origine et admet le développement en série de Laurent à l'origine : $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$. Mais la classification des singularités isolées est bien connue ([**?**], th. 10.21) : ou bien (*singularité artificielle*) il n'y aucune puissance négative de z et g est bornée sur un voisinage épointé de la singularité, ou bien (*pôle* ou *singularité non essentielle*) il n'y a qu'un nombre fini de puissances négatives et $|g|$ tend vers l'infini lorsque z tend vers la singularité, ou bien encore (*singularité essentielle*) il y a une infinité de termes négatifs et l'image de tout disque épointé par la fonction est dense dans $\mathbb{C}$; en particulier $|g|$ n'a pas de limite si z tend vers la singularité. Pour ce qui nous intéresse, $\lim_{z\to 0} |g(z)| = \lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$; l'origine est donc un pôle de g : il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0, \forall n \geqslant N$ et f est bien un polynôme.

Un certain nombre de démontrations sont probablement passées à travers les mailles de notre filet, de nouvelles propositions sont les bienvenues. Toutefois pratiquement tous les théorèmes standard d'un cours basique de licence ont été utilisés, tous sauf peut être un : le *théorème des zéros isolés* ([**?**], th. 10.18) d'après lequel l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est sans point d'accumulation dans Ω (autement dit, c'est un ensemble discret, au plus dénombrable, éventuellement vide). On pourrait voir une raison de cette absence dans le fait que le TFA est un résultat d'*existence* de zéros tandis que le théorème des zéros isolés est un résultat sur la nature *ensembliste* des zéros d'une fonction entière et, de ce point de vue, il peut sembler naturel qu'un tel résultat ne se prête pas à une approche élémentaire du TFA.

Pour terminer, notons que le TFA admet comme corollaire immédiat l'égalité suivante (en appelant $Z(f)$ l'ensemble des zéros d'une fonction f) :

$$\{Z(P)\,;\ P \in \mathbb{C}[z] \setminus \mathbb{C}\,\} \;=\; \{A \subset \mathbb{C}\,;\ A \text{ non vide et fini}\,\}$$

et il est intéressant de remarquer comment cette "caractérisation" s'étend à $\mathcal{O}(\mathbb{C})$:

$$\{Z(f)\,;\ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{E}\,\} \;=\; \{A \subset \mathbb{C}\,,\ A \text{ non vide et discret}\,\}$$

où $\mathcal{E} = \{e^f, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\} \cup \{0\}$ joue, dans $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, l'analogue des constantes dans $\mathbb{C}[z]$, dans le sens où il décrit l'ensemble des fonctions f vérifiant soit $f = 0$, soit $Z(f) = \emptyset$. On démontre cette égalité à l'aide du *théorème des zéros isolés*, du *théorème de factorisation de Weierstrass* ([**?**], 15.9) et du logarithme complexe ([**?**], th. 13.11-h). Cette dernière égalité souligne par ailleurs le caractère contraignant de la $\mathbb{C}$-différentiabilité puisque l'on sait (théorème de Withney[15]) que si l'on exige seulement la $\mathbb{R}$-différentiabilité, n'importe quel fermé de $\mathbb{R}^2$ peut être vu comme $Z(f)$ pour une application f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Références

[1] Fine B. & Rosenberger G., *The fundamental Theorem of Algebra*, Undergraduade Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1997.

[2] Netto E. & Le Vasseur R. *Les Fonctions rationnelles*, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t.1, vol.2, fasc.1, pp. 1-232. Gauthier-Villars (1907) Paris.

[3] Pla i Carrera J. *The Fundamental Theorem of Algebra before Carl Friedrich Gauss*, Publ. Math., 3(1992),no.2B, 879-911.

[4] Petrova S.S. *Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre*, Historia Mathematica, 1(1974), 255-261.

[5] Remmert R. *Theory of Complex Functions*, Graduade Texts in Mathematics, 122, Springer-Verlag, 1991.

[6] Remmert R. *Le théorème fondamental de l'algèbre*, pp 91-117, in **"Les Nombres"**, Ouvrage Collectif, Vuibert (1990).

[7] Rudin W. *Analyse Réelle et Complexe*, Dunod (1998).

15. F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage des étudiants de la licence et de l'agrégation*, Cassini, 1999.