

Stabilité asymptotique pour l'équation FKPP étendue.

Louis GARÉNAUX

juin 2019

Résumé

Ceci est un compte rendu de mon stage de master 2. ¹ Les objectifs étaient d'étudier [3] et [10], puis d'adapter le résultat principal du premier article à une équation introduite dans le second. L'objectif était donc de montrer la décroissance à vitesse $(1+t)^{-\frac{3}{2}}$ dans un espace L^∞ à poids pour des perturbations du front critique dans une équation FISHER-KPP étendue. Dans ce but, on construit et contrôle le semi-groupe linéaire en domaine de LAPLACE. On identifie également une vitesse critique, ainsi qu'un poids qui stabilise la dynamique linéaire.

Sommaire

Introduction	2
1 Équation non perturbée	2
1.1 Résultats connus	2
1.2 Résultat principal	3
1.3 Stabilisation spectrale	4
1.4 Passage en domaine de Laplace	5
1.5 Majorations temporelles et retour au non linéaire	7
1.6 Construction du noyau de Green	8
2 Équation perturbée : FKPPe	9
2.1 Un premier résultat	9
2.2 Étude spectrale	11
2.3 Choix du poids, vitesse critique	12
2.4 Valeurs propres matricielles	13
2.5 Bases de solutions	14
2.6 Fonction de Evans	18
2.7 Construction du noyau de Green	19
2.8 Majoration du noyau de Green	19
Annexes	22
A Étude polynomiale	22
B Forme de l'opérateur stabilisé	23

1. stage effectué à Toulouse sous la direction de Grégory FAYE

Introduction

Durant ce stage, je me suis intéressé à l'EDP scalaire FISHER–KPP étendue :

$$\partial_t u = -\varepsilon \partial_x^4 u + \partial_x^2 u + f(u), \quad (\text{FKPPE})$$

où $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, et $u(t, x) \in \mathbb{R}$. Cette équation d'évolution est composée d'un terme de diffusion $-\varepsilon \partial_x^4 + \partial_x^2$, avec ε paramètre destiné à être petit ; et d'un terme de réaction $f(u)$, avec f fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui satisfait aux hypothèses (H_f) pour $0 < x < 1$:

$$f(0) = 0 = f(1), \quad f(x) > 0, \quad f'(0) > 0 > f'(1), \quad f'(x) < f'(0). \quad (H_f)$$

Lorsque $\varepsilon = 0$, on obtient l'EDP de réaction-diffusion scalaire bien connue, introduite simultanément

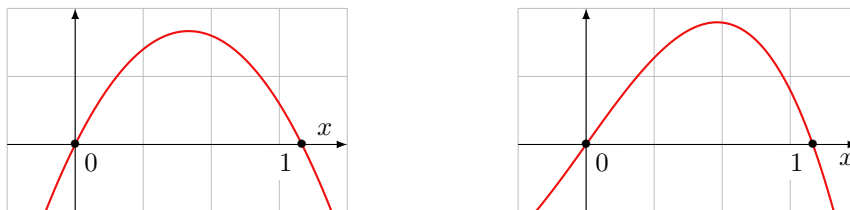


FIGURE 1 – Deux exemples de fonctions de réaction vérifiant (H_f) . À gauche la fonction logistique $f(x) = x(1-x)$, à droite $f(x) = x(1-x^2)$. Dans le premier cas, u solution de (FKPP) modélise la concentration d'une espèce chimique A qui suit une réaction du type $A + B \rightarrow 2A$, voir [2, Chapitre 1].

par FISHER, KOLMOGOROV, PETRUSKI et PISKUNOV dans [4, 8] :

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + f(u). \quad (\text{FKPP})$$

Dans la suite, on étudie des solutions sous forme d'onde progressive $u(t, x) = v(t, x - ct)$ se déplaçant à vitesse constante $c > 0$. La nouvelle inconnue v est alors solution de l'équation

$$\partial_t u = -\varepsilon \partial_x^4 u + \partial_x^2 u + c \partial_x u + f(u). \quad (1)$$

On va s'intéresser à l'existence d'équilibres pour l'équation (1), et à leur stabilité. Plus précisément, on commence par rappeler au §1 des résultats connus dans le cas $\varepsilon = 0$, en insistant sur un résultat de stabilité asymptotique avec convergence algébrique pour (FKPP) : [3]. Dans un second temps, on discute §2 du cas $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$: on présente un résultat de stabilité asymptotique obtenu dans [10], puis on adapte certains points de la démonstration [3] au cas $\varepsilon \neq 0$ dans le but d'obtenir la même vitesse de convergence algébrique pour (FKPPE).

1 Équation non perturbée

Dans ce paragraphe, on prend $\varepsilon = 0$. Au §1.1, on présente divers résultats bien connus, concernant la convergence d'une solution de (FKPP) suivant la condition initiale. Au §1.2 on présente le théorème principal de [3]. Dans les paragraphes §1.3 à §1.6 on donne un schéma de preuve pour ce résultat.

1.1 Résultats connus

On se place ici dans le cas où $\varepsilon = 0$. Pour motiver le changement de variable qui a conduit à l'équation (1) :

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + c \partial_x u + f(u), \quad (2)$$

rappelons que pour une vitesse c plus grande que la vitesse critique c_* , (2) admet une solution indépendante du temps, qui connecte 1 en $-\infty$ à 0 en $+\infty$, voir [8] ou [1, théorème 4.1 p56].

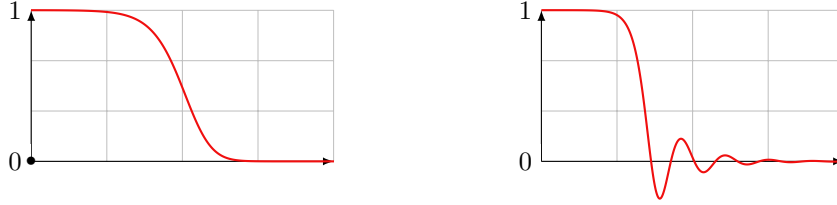


FIGURE 2 – Front solution de (3). À gauche, $c \geq c_*$, à droite, $c < c_*$.

Théorème 1 – KPP [8]. Pour $c \geq c_* := 2\sqrt{f'(0)}$, il existe un unique \bar{u}_c ,² vérifiant $0 \leq \bar{u}_c(x) \leq 1$ et solution de

$$0 = \partial_{xx}u + c\partial_xu + f(u), \quad (3)$$

tel que $\bar{u}_c(x)$ converge vers 1 (resp. 0) lorsque $x \rightarrow -\infty$ (resp. $+\infty$). De plus \bar{u}_c est décroissant.

Démonstration – Idée générale. Remarquons que l'EDO (3) admet les constantes 0 et 1 comme solutions. Linéariser l'EDO au voisinage de l'équilibre 1, puis chercher les valeurs propres de la matrices obtenue après avoir transformé le problème comme une EDO vectorielle d'ordre 1 conduit à chercher les racines de $X^2 + cX + f'(1)$. Puisque $f'(1) < 0$, ce polynôme admet deux racines réelles non nulles. De la même manière, linéariser au voisinage de 0 conduit à chercher les racines de $X^2 + cX + f'(0)$. Ce polynôme est à racine réelle exactement lorsque $c \geq c_*$. En travaillant dans le plan de phase, [8] obtient l'existence et l'unicité de \bar{u}_c . \square

Pour $c < c_*$, l'EDO (3) admet une solution qui connecte 1 à 0, mais sans être positive. Plus précisément, l'apparition de valeurs propres complexes fait osciller le front autour de 0 en $+\infty$,³ voir figure 2. Remarquons que le polynôme $X^2 + c_*X + f'(0)$ admet $\nu := -c_*/2$ comme racine double.

Toujours dans l'optique de motiver la formulation (2), on présente le théorème suivant.

Théorème 2 – KPP [8]. On note $u(t, x)$ la solution de (FKPP) avec condition initiale $u_0(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}$. Il existe une phase m telle que si $t_0 \rightarrow +\infty$, alors $u(t + t_0, x + m(t_0))$ converge uniformément vers $\bar{u}_*(x - c_*t)$. De plus $m'(t_0) \rightarrow c_*$.

On a noté \bar{u}_* le front critique solution de (3) pour $c = c_* = 2$. La convergence uniforme a lieu pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, avec $T \in \mathbb{R}$ fixé. Ce résultat affirme que pour une condition initiale particulière, la solution $u(t_0, x)$ de (FKPP) « converge » quand $t_0 \rightarrow +\infty$ vers l'onde progressive $\bar{u}_*(x - c_*t_0)$, voir figure 3. Ce résultat a été largement amélioré dans le cas $f(x) = x(1 - x)$, voir [2, §1.2]. On sait notamment que la phase s'écrit

$$m(t) = 2t - \frac{3}{2} \ln(t) + \mathcal{O}(1),$$

et que la convergence a lieu pour une classe de conditions initiales qui décroissent assez vite en $+\infty$. Plus généralement, la décroissance de la condition initiale sélectionne le front limite, et la vitesse de déplacement de l'onde.

1.2 Résultat principal

Dans le reste de §1, on se place dans le cas critique $c = c_* = 2$. Le front critique \bar{u}_* est un équilibre pour la dynamique de l'équation d'évolution (2).

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du paragraphe §1, on explique le contenu de [3]. Cet article démontre que le front critique \bar{u}_* est asymptotiquement stable : les perturbations $p \in L^\infty(\mathbb{R})$

2. \bar{u}_c est en fait unique à translation près : si $u(x)$ est solution de (3), alors $u(x + \tau)$ aussi.

3. Lorsque $c < c_*$, $(0,0)$ cesse d'être un équilibre hyperbolique pour devenir un foyer.

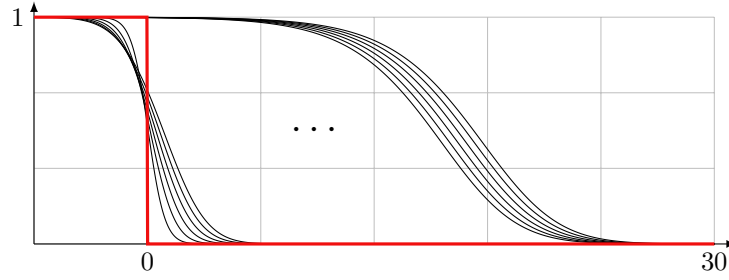


FIGURE 3 – Solution $u(t, x)$ de l'équation (FKPP). En rouge la condition initiale $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}$, en noir la solution à intervalle de temps réguliers. Dans un premier temps la condition initiale se déforme, puis lorsqu'elle a atteint la forme du front, elle se déplace vers la droite à vitesse constante.

décroissent en $(1+t)^{-\frac{3}{2}}$.⁴

Théorème 3 – FAYE–HOLZER [3]. Il existe $C, \delta > 0$ tels que si $u_0 = \bar{u}_* + \omega q_0$ condition initiale pour (2) vérifie $0 \leq u_0(x) \leq 1$ et

$$M_0 := \|q_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|(1+|x|)q_0\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \delta,$$

alors $u(t, x) = \bar{u}_*(x) + \omega(x)q(t, x)$ est définie pour tout temps, et

$$\left\| \frac{q(t, \cdot)}{1+|x|} \right\|_{L^\infty} \leq C \frac{M_0}{(1+t)^{3/2}}.$$

Ce taux de convergence avait déjà été obtenu par GALLAY dans [5]. L'article [3] présente une nouvelle preuve, qui semble s'adapter à d'autres problèmes. En particulier, on espère pouvoir obtenir un résultat similaire pour l'équation perturbée (FKPPE). On présente au paragraphe §2 ce qui a été fait dans cette direction.

1.3 Stabilisation spectrale

Le théorème 3 propose de prendre des perturbations de \bar{u}_* de la forme $p(t, x) = \omega(x)q(t, x)$, où ω est un poids exponentiellement décroissant en $\pm\infty$. Pour bien comprendre cette écriture, commençons par le choix naïf d'une perturbation $p(t, \cdot) \in H^2$.

Soit $u = \bar{u}_* + p$ solution de (2). Alors p vérifie

$$\partial_t p = \partial_x^2 p + c_* \partial_x p + f(\bar{u}_* + p) - f(\bar{u}_*) = \tilde{L}p + \tilde{\mathcal{N}}(p),$$

où l'opérateur fermé⁵ $\tilde{L} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ de domaine dense $H^2(\mathbb{R})$, est donné par

$$\tilde{L}p := \partial_x^2 p + c_* \partial_x p + f'(\bar{u}_*(x))p,$$

et où $\tilde{\mathcal{N}}(p) := f(\bar{u}_* + p) - f(\bar{u}_*) - f'(\bar{u}_*)p = \mathcal{O}(\|p\|^2)$. On cherche à savoir si la dynamique linéaire $\partial_t = \tilde{L}$ est stable. Si c'est le cas on espère en déduire que la dynamique non linéaire $\partial_t = \tilde{L} + \tilde{\mathcal{N}}$ l'est également.

On obtient la dynamique linéaire par une étude du spectre de \tilde{L} .⁶ Pour cette première approche, on se contente de décrire le spectre essentiel en laissant de côté le spectre discret. Comme démontré

4. Ici L^∞ est un espace à poids, voir (4).

5. Voir [7, Lemme 3.1.2 p.40].

6. C'est la même démarche que le théorème de LYAPUNOV pour les EDO.

dans [7, Théorème 3.1.11 p.48], $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{L})$ est délimité par le spectre des opérateurs asymptotiques

$$\tilde{L}_+ = \partial_x^2 + c_* \partial_x + f'(0), \quad \tilde{L}_- = \partial_x^2 + c_* \partial_x + f'(1),$$

obtenus via $x \rightarrow \pm\infty$.⁷ Ces opérateurs sont à coefficients constants, et peuvent donc être définis comme multiplicateurs de FOURIER. Leurs spectres sont :

$$\sigma(\tilde{L}_+) = \{-\xi^2 + ic_*\xi + f'(0) : \xi \in \mathbb{R}\}, \quad \sigma(\tilde{L}_-) = \{-\xi^2 + ic_*\xi + f'(1) : \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{L})$ est situé entre ces deux courbes, voir figure 4. Il contient des complexes de partie réelle strictement positive, la dynamique linéaire est donc instable : il existe des $p_0 \in H^2$ tels que $p(t, x)$, solution de $\partial_t p = \tilde{L}p$, explose en temps long.

On doit se restreindre quant aux perturbations que l'on étudie. Soit ω poids exponentiellement décroissant, *i.e.* une fonction \mathcal{C}^∞ positive, vérifiant $\omega(0) = 1$ et

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{\nu x} & \text{si } x \geq 1, \\ e^{\beta x} & \text{si } x \leq -1, \end{cases} \quad (4)$$

où $\nu \leq 0$ et $\beta \geq 0$ seront choisis par la suite. On suppose que $p(t, x)$ s'écrit $\omega(x)q(t, x)$ avec $q(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R})$. Ainsi $q := p/\omega$ vérifie

$$\partial_t q = Lq + \mathcal{N}(q),$$

avec $\mathcal{N}(p) := \frac{f(\bar{u}_* + p\omega) - f(\bar{u}_*)}{\omega} - f'(\bar{u}_*)p = \mathcal{O}(\|p\|^2)$, et

$$\begin{aligned} L &:= \omega^{-1} \tilde{L} \omega =: \partial_x^2 + \zeta_1(x) \partial_x + \zeta_0(x), \\ &= \partial_x^2 + \left(c_* + 2 \frac{\omega'}{\omega} \right) \partial_x + \left(f'(\bar{u}_*) + c_* \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Pour $x \geq 1$ on calcule $\zeta_1(x) = 2\nu + c_*$, et $\zeta_0(x) = \nu^2 + c_*\nu + f'(\bar{u}_*(x))$. Le choix particulier de c_* assure que $X^2 + c_*X + f'(0)$ possède $-c_*/2$ comme racine double. Ainsi $\nu := -c_*/2$ vérifie

$$\nu^2 + c_*\nu + f'(0) = 0, \quad 2\nu + c_* = 0.$$

Pour $x \geq 1$ on a donc $\zeta_1(x) = 0$ et $\zeta_0(x) = f'(\bar{u}_*(x)) - f'(0)$. Finalement, les opérateurs asymptotiques sont donnés par

$$L_+ := \partial_x^2, \quad L_- := \partial_x^2 + (c_* + 2\beta) \partial_x + (f'(1) + c_*\beta + \beta^2).$$

On choisit $0 < \beta < -\frac{c_*}{2} + \sqrt{\frac{c_*^2}{4} - f'(1)}$ pour garantir $f'(1) + c_*\beta + \beta^2 < 0$, de sorte que $\sigma(L_-)$ soit entièrement composé de complexes dont la partie réelle est négative, voir figure 4. Avec ce choix de ω , $\sigma_{\text{ess}}(L) \setminus \{0\}$ est inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}$. Le choix de ν est optimal : on ne peut pas translater le spectre plus à gauche.

1.4 Passage en domaine de Laplace

Pour transformer cette étude spectrale en résultat de stabilité, on va réécrire le problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_t q = Lq, \\ q(0, x) = q_0(x). \end{cases} \quad (5)$$

⁷ Remarquez que les coefficients de \tilde{L} sont exponentiellement localisés.

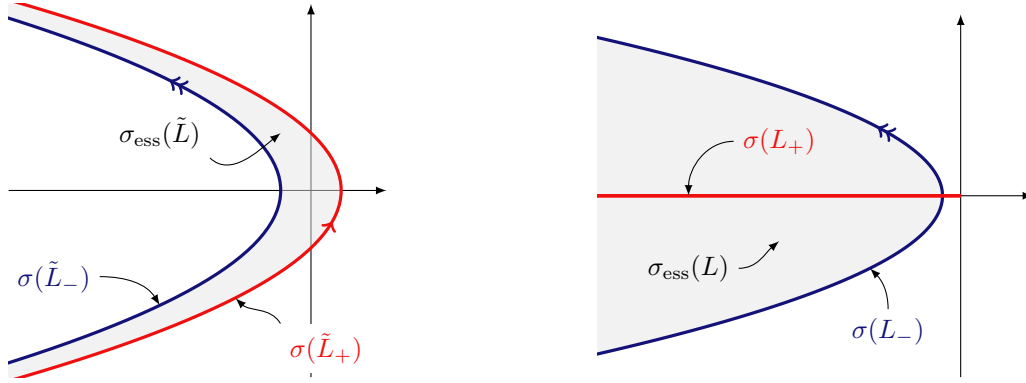


FIGURE 4 – Spectre essentiel des opérateurs linéaires avant et après conjugaison par un poids. Ceci permet de stabiliser la dynamique linéaire : $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{L})$ intersecte $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geq 0\}$, tandis que $\sigma_{\text{ess}}(L)$ est situé à gauche de l’axe imaginaire pur. Cependant $\sigma_{\text{ess}}(L)$ vient toucher cet axe en 0.

en domaine de LAPLACE. Pour s’affranchir de la condition initiale, on commence par écrire la solution de (5) à l’aide d’un noyau intégral : $q(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x, y) p_0(y) dy$, où pour $y \in \mathbb{R}$, $G(t, \cdot, y)$ vérifie le problème

$$\begin{cases} (\partial_t - L)G = 0, \\ G(0, x, y) = \delta_y(x), \end{cases}$$

avec δ_y le DIRAC en y . Alors $G_\lambda(x, y)$, la transformée de LAPLACE en temps⁸ de $G(t, x, y)$, vérifie l’équation

$$(\lambda - L)G_\lambda = \delta_y. \quad (6)$$

L’objectif qu’on se fixe est de construire explicitement une fonction de GREEN $G_\lambda(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R})$ en résolvant (6), on explique la démarche au §1.6. Une fois ceci fait, si $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$ est un contour qui entoure le spectre de L , voir figure 5, on a la formule d’inversion de LAPLACE

$$G(t, x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} G_\lambda(x, y) d\lambda, \quad (7)$$

sous réserve que l’intégrale converge. On veut utiliser cette dernière formule pour contrôler $G(t, x, y)$ en temps long. Dans l’intégrale, les λ tels que $\text{Re } \lambda < 0$ vont apporter une décroissance exponentielle en t . Le fait que $\sigma_{\text{ess}}(L)$ vienne toucher 0 va forcer Γ à passer strictement à droite de l’axe imaginaire, il nous faut contrôler au mieux G_λ pour de tels λ . Plus précisément, on va découper notre étude en trois cas : soient $0 < M_s < M_l$, et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(L)$. Alors :

- Si $0 < |\lambda| < M_s$, on considère λ comme un paramètre qui perturbe l’équation $L = \delta_y$, pour construire explicitement G_λ , et montrer des majorations de la forme

$$G_\lambda(x, y) = e^{-|\mu(\lambda)||x-y|} \theta(\lambda, x, y),$$

où θ est, dans le pire des cas,⁹ uniformément borné en x, y et holomorphe en $\sqrt{\lambda}$. Cette majoration va se répercuter sur les comportements en temps long de G et faire apparaître un terme en $t^{-\frac{3}{2}}$;

- Si $M_s < |\lambda| < M_l$, on se contente de borner G_λ uniformément en x, y ;

⁸. Par définition, $G_\lambda(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t, x, y) dt$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que cette expression fait sens.

⁹. Il faut distinguer 6 cas, suivant la position relative de x, y et 0. Voir [3, lemme 3.2]

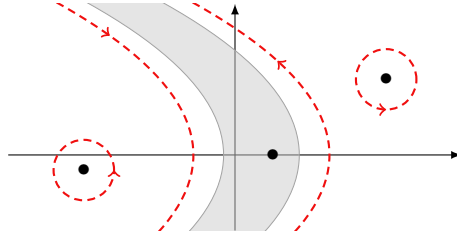


FIGURE 5 – Un exemple de contour Γ permettant d’appliquer la formule d’inversion de LAPLACE à la dynamique $\partial_t = T$ pour un opérateur T . La zone grisée représente $\sigma_{\text{ess}}(T)$, les points représentent les valeurs propres de T . Γ doit entourer le spectre essentiel mais aussi le spectre discret. On construit Γ comme la réunion des 4 contours orientés en pointillé.

- Si $M_t < |\lambda|$, on utilise un argument de rescaling pour construire explicitement G_λ ,¹⁰ et montrer une majoration de la forme

$$|G_\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}.$$

Cette majoration va permettre de contrôler $G(t, x, y)$ pour des temps courts. On en a également besoin pour assurer la convergence de l’intégrale (7) en temps longs.

1.5 Majorations temporelles et retour au non linéaire

Les majorations précédentes sur G_λ permettent d’obtenir le résultat suivant.

Proposition 4. Avec les notations et hypothèses du théorème 3, il existe des constantes $\kappa, r, C, K > 0$ telles que pour $t \leq 1$ ou $|x - y| \geq Kt$ on a

$$|G(t, x, y)| \leq Ct^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{\kappa t}}, \quad (8)$$

tandis que pour $t \geq 1$ et $|x - y| \leq Kt$ on a

$$|G(t, x, y)| \leq Ct^{-\frac{3}{2}} (1 + |x - y|) e^{-\frac{|x-y|^2}{\kappa t}} + e^{-rt}. \quad (9)$$

Chacune de ces deux majoration repose sur un choix judicieux de contour d’intégration Γ , voir figure 6. L’idée est de tourner autour de 0 à l’aide d’un contour parabolique, puis d’aller à l’infini en ligne droite.

Pour que ces contours soient utilisables, il faut cependant déterminer le spectre discret. Puisque L est un opérateur différentiel d’ordre 2 dont les coefficients convergent exponentiellement, c’est un opérateur de STURM–LIOUVILLE. Son spectre discret est composé de valeurs propres simples, réelles et strictement positives. On peut alors montrer qu’il n’existe pas de telle valeur propre.

Un autre moyen de se débarrasser du problème du spectre ponctuel est de montrer qu’il est englobé par le contour spectral choisi figure 6. Puisque d’autres résultats de stabilité sont déjà connus, on sait que la dynamique est asymptotiquement stable. Ainsi, les potentielles valeurs propres sont forcément de partie réelle strictement négative. Quitte à changer le contour d’intégration en rapprochant les deux parties rectilignes de l’axe imaginaire pur, on peut supposer que tout le spectre ponctuel est englobé par le contour spectral proposé. Cet argument est encore valable dans le cas $\varepsilon \neq 0$, contrairement à la théorie de STURM–LIOUVILLE.

Notons que le contour Γ évolue en temps grand. Typiquement, il se rapproche de 0 pour (9). À contour fixé, on ne peut obtenir les majorations que pour des temps finis. Tout le problème de la

¹⁰. Voir [3, Lemme 3.1].

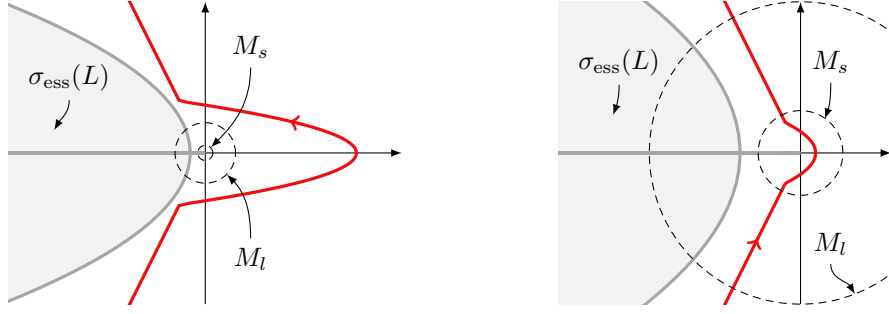


FIGURE 6 – Contours d’intégration pour notre opérateur L . Pour obtenir (8), le contour de gauche reste loin de 0 avec $M_l < \lambda$, tandis que pour obtenir (9), le contour de droite passe au plus près de 0, en évitant la branche de spectre essentiel. C’est à cet endroit, pour $0 < |\lambda| < M_s$ qu’apparaît le $t^{-\frac{3}{2}}$. Dans les deux cas, Γ se décompose en un contour parabolique et des contours affines.

proposition 4 est d’obtenir des majorations dont les constantes ne dépendent pas du contour choisi.

Une fois tout ce travail effectué, on retourne au problème non linéaire par une formulation de DUHAMEL : la solution $q(t, x)$ de $\partial_t q = Lq + \mathcal{N}(q)$ avec condition initiale $q_0(x)$ s’écrit

$$q(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x, y) q_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x, y) q(s, y) dy,$$

tant que cette expression a un sens. On montre que c’est le cas pour tout temps, et que l’on a décroissance dans l’espace à poids.

1.6 Construction du noyau de Green

Dans ce paragraphe, on revient sur la construction de G_λ . On rentrera plus dans les détails au §2 pour l’équation perturbée (FKPPE). On résout (6), dans le cas $0 < |\lambda| < M_s$, le cas $M_l < |\lambda|$ est similaire. Pour cela, on étudie l’équation sans le second membre δ_y .

Proposition 5. Pour $0 < M_s$ suffisamment petit, et $0 < \lambda < M_s$, il existe $(\varphi_i^+(x; \lambda))_{i=1,2}$ et $(\varphi_i^-(x; \lambda))_{i=1,2}$ deux bases de solutions de l’EDO

$$L\phi = \lambda\phi, \tag{10}$$

telles que les comportements de ϕ_i^\pm et $\partial_x \phi_i^\pm$ en $x \rightarrow \pm\infty$ sont

$$\partial_x^j \phi_i^\pm(x; \lambda) = e^{\mu_i^\pm(\lambda)x} \mu_i^\pm(\lambda)^j (1 + \mathcal{O}(e^{\pm\alpha x})), \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1,$$

où $\mu_1^\pm < 0 < \mu_2^\pm$ sont les valeurs propres de l’EDO asymptotique $L_\pm \phi = \lambda\phi$, et $\nu < \alpha < 0$.

L’argument principal de la démonstration est que les coefficients de L convergent exponentiellement vers ceux de L_\pm . Remarquons que L_\pm sont à coefficients constants, ce qui rend $L_\pm \phi = \lambda\phi$ bien plus simple à résoudre que (10). Ce résultat fournit en particulier ϕ_1^+ et ϕ_2^- dont les premières dérivées convergent exponentiellement vite, respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$. On définit alors $G_\lambda(x, y)$ par morceaux :

$$G_\lambda(x, y) := \begin{cases} \phi_1^+(x) F_1(y) & \text{si } y \leq x, \\ \phi_2^-(x) F_2(y) & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

où les F_i sont choisis de sorte que $G_\lambda(\cdot, y) \in H^1(\mathbb{R})$ ¹¹ soit continue en $x = y$, et que $\partial_x G_\lambda$ fasse un saut de hauteur 1 en $x = y$. Si un tel choix de G est possible, la dérivée seconde présente dans L fait naturellement apparaître un δ_y , et G_λ satisfait $(\lambda - L)G_\lambda = \delta_y$. Des calculs algébriques permettent d'obtenir les expressions de F_i . Finalement, on obtient

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{W_\lambda(y)} \times \begin{cases} \phi_1^+(x; \lambda)\phi_2^-(y; \lambda) & \text{si } y \leq x, \\ \phi_2^-(x; \lambda)\phi_1^+(y; \lambda) & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

avec $W_\lambda := \phi_1^+ \partial_x \phi_2^- - \partial_x \phi_1^+ \phi_2^- = \det(\Phi_1^+, \Phi_2^-)$, on a noté $\Phi_i^\pm := {}^t(\phi_i^\pm, \partial_x \phi_i^\pm)$. Savoir si $W_\lambda(y)$ s'annule est *a priori* une question difficile, c'est équivalent à ce que λ soit valeur propre de L . Pour notre problème, et vu le choix du contour d'intégration Γ , il est donc d'une importance capitale que 0 ne soit pas valeur propre de L . Dans [3, Lemme 2.1], c'est démontré en se servant d'informations connues sur \tilde{L} , l'opérateur linéaire avant conjugaison par ω .

2 Équation perturbée : FKPPe

Intéressons nous maintenant au cas $\varepsilon \neq 0$, soit à la dynamique de l'équation (1) :

$$\partial_t u = -\varepsilon \partial_x^4 u + \partial_x^2 u + c \partial_x u + f(u).$$

Si ε est assez petit, on observe numériquement le même comportement que pour (FKPP) : dans le repère fixe, la solution se rapproche d'un front se déplaçant à vitesse constante. De plus si on perturbe ce front, la perturbation décroît rapidement, voir figure 7. Ceci est confirmé par les deux résultats du

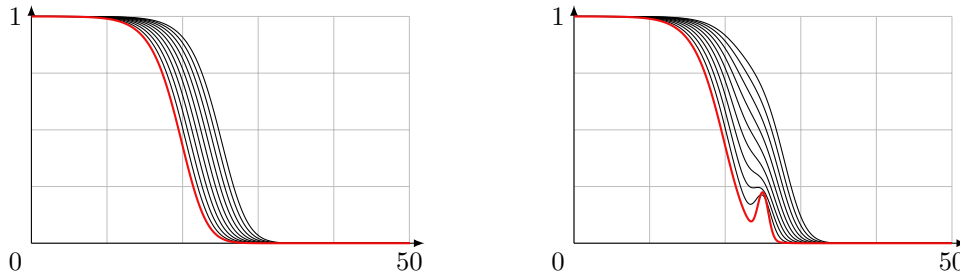


FIGURE 7 – Solution $u(t, \cdot)$ de (FKPPE), tracée à intervalle de temps réguliers, pour différentes conditions initiales u_0 en rouge. À gauche on prend $u_0 = \bar{u}_*$ le front qui apparaît naturellement en temps long, à droite $u_0 = \bar{u}_* + p_0$ une perturbation de ce front. À droite, on voit que la perturbation est rapidement absorbée.

§2.1. Dans les paragraphes 2.2 à 2.8, on adapte certains points de la preuve du théorème 3 au cas présent $\varepsilon \neq 0$. On voudrait obtenir un taux de convergence algébrique.

Dans ce but, on commence au §2.2 par une étude spectrale qui détermine le cadre dans lequel on travaille. On continue à cerner notre problème au §2.3 en explicitant la vitesse critique c_* . On construit ensuite le noyau de GREEN aux §2.4 à §2.7, avec l'introduction de la fonction de EVANS. Finalement, on obtient §2.8 une majoration du noyau construit pour les λ de module suffisamment grand.

2.1 Un premier résultat

Avec le choix $f'(0) = 1$,¹² [10] démontre l'existence de front, et la stabilité asymptotique de ceux-ci pour $c \geq c_*$.¹³

¹¹. Puisque ϕ_i^\pm vérifient $L\phi = \lambda\phi$, les $\partial_x^2 \phi_i^\pm$ ont la même (dé)croissance que les ϕ_i^\pm . Ainsi $G_\lambda(\cdot, y) \in H^2(\mathbb{R} \setminus \{y\})$.

¹². on peut se ramener à ce cas en dilatant l'espace et le temps.

¹³. Dans [10], l'équation est posée avec $x \in \mathbb{R}^n$, on garde $x \in \mathbb{R}$ pour être cohérent avec les notations précédentes.

Théorème 6 – Rottschäfer–Wayne [10]. Soit $c_0 > 0$ arbitrairement petit. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $c_0 < c < 1/c_0$, il existe \bar{u}_c solution de

$$0 = -\varepsilon \partial_x^4 u + \partial_x^2 u + c \partial_x u + f(u), \quad (11)$$

qui converge vers 0 (respectivement 1) lorsque $x \rightarrow +\infty$ (respectivement $-\infty$). De plus, il existe $c_*(\varepsilon) = 2 - \varepsilon + o(\varepsilon)$ vitesse critique, telle que pour $c \geq c_*(\varepsilon)$ on a $0 \leq \bar{u}_c \leq 1$. Pour $c \geq c_*(\varepsilon)$, le front \bar{u}_c est décroissant.

Ce premier théorème s'obtient en perturbant l'EDO vérifiée par le front \bar{u}_c dans le cas $\varepsilon = 0$. Plus précisément, après le changement de variables $\eta = \sqrt{\varepsilon} x$ et $(v_0, v_1, v_2, v_3)(\eta) := (u, u', u'', \sqrt{\varepsilon} u^{(3)})(\sqrt{\varepsilon} \eta)$, l'équation (11) se réécrit

$$\begin{cases} v'_0 = \sqrt{\varepsilon} v_1, \\ v'_1 = \sqrt{\varepsilon} v_2, \\ v'_2 = v_3, \\ v'_3 = v_2 + c v_1 + f(v_0), \end{cases} \quad \text{qui est de la forme } \begin{cases} w'_1 = \sqrt{\varepsilon} F(w_1, w_2), \\ w'_2 = G(w_1, w_2). \end{cases} \quad (12)$$

Pour $\varepsilon = 0$, la dynamique de ce système est donnée par $0 = \partial_x^2 u + c \partial_x u + f(u)$, pour laquelle il existe des solutions. La forme particulière de (12) assure que sa dynamique est \mathcal{C}^∞ en $\sqrt{\varepsilon}$ au voisinage de 0. Donc si $\delta > 0$ est fixé, il existe ε_0 tel que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une trajectoire pour la dynamique (12) qui part de $(1, 0, 0, 0)$ et qui passe à distance δ de $(0, 0, 0, 0)$. Or d'après les hypothèses (H_f) sur f , $(0, 0, 0, 0)$ est hyperbolique et doit donc attirer cette trajectoire jusqu'en $(0, 0, 0, 0)$, pourvu que δ soit assez petit.

Maintenant qu'on a l'existence de fronts, on présente le résultat de stabilité asymptotique.

Théorème 7 – Rottschäfer–Wayne [10]. Il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $c \geq c_*(\varepsilon)$ et $q_0 \in X^5$ vérifie $\|q_0\|_{X^3} \leq \delta$, alors la solution $u(t, x) = \bar{u}_c(x) + \omega(x)q(t, x)$ de (1), avec condition initiale $u_0(x) := \bar{u}_c(x) + \omega(x)q_0(x)$ est définie pour tout temps, et vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\omega q(t, \cdot)\|_{L^\infty} = 0.$$

Ici, le poids ω est exponentiellement décroissant en $+\infty$: pour $x \geq 1$, $\omega(x) = e^{\nu x}$, où $\nu < 0$ est racine de $-\varepsilon X^4 + X^2 + cX + 1$. Ce polynôme possède deux racines négatives,¹⁴ ν est choisi comme la plus grande des deux pour fournir un espace de perturbations stables plus important. Avec l'étude faite au §1.3, on comprend qu'annuler ce polynôme permet de stabiliser le spectre essentiel de la dynamique linéaire. Les espaces X^s sont alors définis par

$$X^s := H^s(\mathbb{R}) \cap H_\omega^s(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : \|u\|_{X^s}^2 := \|u\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H_\omega^s}^2 < +\infty \right\}.$$

Remarquons que ce résultat donne la stabilité de tous les fronts \bar{u}_c monotones. Pour cela, [10] montre que si $\|q_0\| \leq \delta$, alors les énergies suivantes sont décroissantes au cours du temps :

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}} a_0 |q(t, x)|^2 + a_1 |\partial_x q(t, x)|^2 + a_2 |\partial_x^2 q(t, x)|^2 + \frac{\varepsilon^{3/2}}{2} |\partial_x^3 q(t, x)|^2 dx,$$

$$F(t) := a_3 E(t) + \int_{\mathbb{R}} b_0 |\omega q|^2 + b_1 |\partial_x(\omega q)|^2 + b_2 |\partial_x^2(\omega q)|^2 + \frac{\varepsilon^{3/2}}{2} |\partial_x^3(\omega q)|^2 dx,$$

avec $a_i, b_i > 0$.

On aimerait améliorer ce résultat de convergence : on espère pouvoir montrer une décroissance algébrique explicite comme dans le théorème 3. Dans ce but, j'ai commencé à adapter la démonstration présentée au §1 pour l'équation (FKPPE) en me restreignant au cas $c = c_*(\varepsilon)$. Dans le reste du §2, je présente ces avancées.

¹⁴. Sous réserve que ε soit assez petit, voir par exemple figure 10.

2.2 Étude spectrale

Tout d'abord, vérifions que le choix de perturbations proposé par le théorème 7 est judicieux. Soit $u(t, x) = \bar{u}_*(x) + p(t, x)$ solution de (1). Alors p vérifie

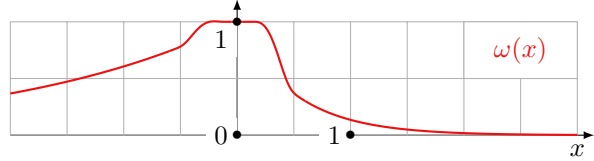
$$\partial_t p = -\varepsilon \partial_x^4 p + \partial_x^2 p + c \partial_x p + f(\bar{u}_* + p) - f(\bar{u}_*) := \tilde{L}p + \tilde{\mathcal{N}}(p),$$

où $\tilde{L} : H^4(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{\mathcal{N}}(p) = \mathcal{O}(\|p\|^2)$ sont donnés par

$$\tilde{L} := -\varepsilon \partial_x^4 + \partial_x^2 + c \partial_x + f'(\bar{u}_*), \quad \tilde{\mathcal{N}}(p) := f(\bar{u}_* + p) - f(\bar{u}_*) - f'(\bar{u}_*)p.$$

Le spectre essentiel de \tilde{L} est représenté figure 8, la dynamique de $\partial_t = \tilde{L}$ est instable. On note donc ω fonction \mathcal{C}^∞ positive, vérifiant $\omega(0) = 1$ et

$$\omega(x) = \begin{cases} e^{\nu x} & \text{si } x \geq 1, \\ e^{\beta x} & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$



où $\nu < 0 < \beta$ sont des réels à déterminer.¹⁵ Dans les démonstrations qui suivent, on peut se contenter de prendre $\beta = 0$, ce que l'on fait. L'hypothèse $0 < \beta$ semble nécessaire pour traiter le retour au problème non linéaire.¹⁶ Donc $\omega(x) = 1$ pour $x \leq -1$. Alors $q = p/\omega$ vérifie

$$\partial_t q = Lq + \mathcal{N}(q),$$

avec $\mathcal{N}(q) := \frac{f(\bar{u}_* + \omega q) - f(\bar{u}_*)}{\omega} - f'(\bar{u}_*)q = \mathcal{O}(\|q\|^2)$, et

$$\begin{aligned} L &:= \omega^{-1} \tilde{L} \omega, \\ &:= -\varepsilon \partial_x^4 + \sum_{j=0}^3 \zeta_j(x) \partial_x^j, \\ &= -\varepsilon \partial_x^4 - 4\varepsilon \frac{\omega'}{\omega} \partial_x^3 + \left(1 - 6\varepsilon \frac{\omega''}{\omega}\right) \partial_x^2 + \left(c_* + 2\frac{\omega'}{\omega} - 4\varepsilon \frac{\omega^{(3)}}{\omega}\right) \partial_x \\ &\quad + \left(f'(\bar{u}_*) + c_* \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega} - \varepsilon \frac{\omega^{(4)}}{\omega}\right). \end{aligned}$$

Les opérateurs asymptotiques L_\pm sont donnés par

$$\begin{aligned} L_+ &:= -\varepsilon \partial_x^4 - 4\varepsilon \nu \partial_x^3 + (1 - 6\varepsilon \nu^2) \partial_x^2 + Q'(\nu) \partial_x + Q(\nu), \\ L_- &:= -\varepsilon \partial_x^4 + \partial_x^2 + c_* \partial_x + f'(1), \end{aligned}$$

où $Q(X) = -\varepsilon X^4 + X^2 + c_* X + f'(0)$. Plus généralement, les coefficients de L_+ sont liés aux dérivées successives de Q , voir l'annexe B page 23. Remarquons que les coefficients $\zeta_j(x)$ de l'opérateur L convergent à vitesse exponentielle vers ceux de L_\pm ,¹⁷ donc $\sigma_{\text{ess}}(L)$ est délimité par les courbes $\sigma(L_\pm)$. Plus précisément, l'indice de Fredholm de $L - \lambda$ augmente de ± 1 lorsque λ traverse la courbe orientée $\sigma(L_\pm)$ de la droite vers la gauche, voir [7, remarque 3.1.15 p. 51].

Pour stabiliser $\sigma_{\text{ess}}(L)$, il faut donc choisir ν tel que $Q(\nu) \leq 0$. On discute de ce choix au paragraphe suivant. Une fois le spectre essentiel stabilisé, on reprend la démarche du §1.4 empruntée à [6], dont la première étape est de construire $G_\lambda(\cdot, y) \in H^3(\mathbb{R})$ solution de

$$(\lambda - L)G_\lambda = \delta_y.$$

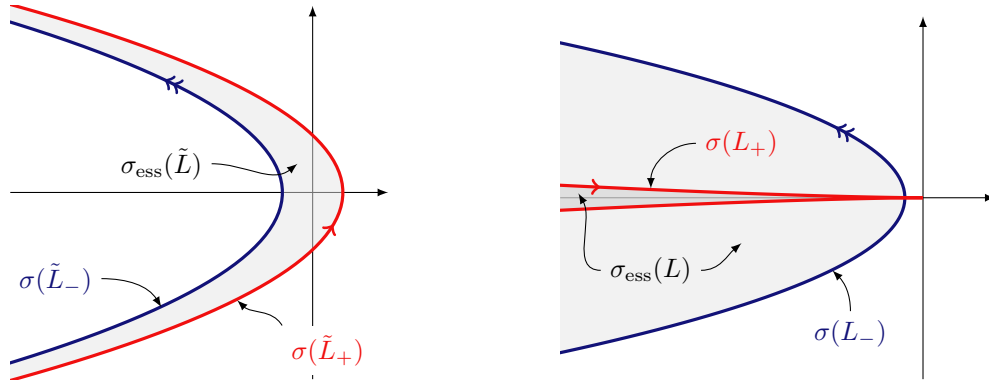


FIGURE 8 – Spectre de la dynamique linéaire avant (à gauche) et après (à droite) stabilisation par un poids exponentiellement décroissant en $+\infty$.

Ceci est fait en détail dans les paragraphes §2.4 à §2.8.

2.3 Choix du poids, vitesse critique

Ici, on cherche à identifier la valeur de ν . Pour cela, on commence par discuter de la vitesse critique c_* . [10] identifie c_* comme une valeur de c pour laquelle les valeurs propres matricielles de l'ODE $0 = -\varepsilon \partial_x^4 + \partial_x^2 + c \partial_x + f'(0)$ deviennent complexes. Ainsi pour $c = c_*$, le polynôme

$$Q(X) := -\varepsilon X^4 + X^2 + c_* X + f'(0)$$

admet une racine double : on cherche x solution du système

$$\begin{cases} 0 = -\varepsilon x^4 + x^2 + c_* x + f'(0), \\ 0 = -4\varepsilon x^3 + 2x + c_*. \end{cases}$$

En injectant la deuxième équation dans la première on élimine l'inconnue c_* , et on obtient quatre choix : $x \in \{\pm x_1, \pm x_2\}$, avec

$$x_1 := \frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 12\varepsilon f'(0)}} \quad \text{et} \quad x_2 := \frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 12\varepsilon f'(0)}}.$$

Pour chacun, la valeur de c_* est donnée par la relation $c = 4\varepsilon x^3 - 2x$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a les développements limités

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}} - \frac{\sqrt{3\varepsilon}}{2} f'(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt{f'(0)} + \varepsilon \frac{3}{2} f'(0)^{3/2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Donc $x_1 \rightarrow +\infty$ et $4\varepsilon x_1^3 - 2x_1 = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \varepsilon^{-1/2} + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \rightarrow -\infty$. Au contraire x_2 converge. On note donc

$$\nu := -x_2 = -\frac{1}{\sqrt{6\varepsilon}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 12\varepsilon f'(0)}}, \quad (13)$$

15. La valeur de ν est décidé par l'étude spectrale qui va suivre, voir l'équation (13). β peut être choisi aussi proche de 0 que possible.

16. Dans [3], un décroissance en $-\infty$ est nécessaire pour absorber un polynôme.

17. Puisque \bar{u}_* décroît exponentiellement en $\pm\infty$. Pour voir ceci, il suffit de retourner à la construction de \bar{u}_* dans le portrait de phase, et voir que les équilibres $(0, 0, 0, 0)$ et $(1, 0, 0, 0)$ sont hyperboliques.

qui vérifie

$$\nu(\varepsilon) = -\sqrt{f'(0)} - \varepsilon \frac{3}{2} f'(0)^{3/2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

La vitesse critique associée à ce choix est donnée par

$$c_*(\varepsilon) := 4\varepsilon \nu^3 - 2\nu = 2\sqrt{f'(0)} - \varepsilon f'(0)^{3/2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (14)$$

Le développement de $c_*(\varepsilon)$ coïncide avec celui proposé par [10], et est bien une perturbation de la vitesse critique $c_*(0) = 2\sqrt{f'(0)}$ pour (FKPP). Avec ce choix de vitesse, ν est racine double de Q . D'une part, on a $Q(\nu) \leq 0$ donc $\sigma_{\text{ess}}(L) \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}$, d'autre part il n'existe pas de choix de x proche de ν tel que $Q(x) < 0$. On ne peut donc pas espérer stabiliser entièrement $\sigma_{\text{ess}}(L)$.

Enfin, il s'avère que ν est la plus grande racine négative de Q ,¹⁸ ce qui laisse un espace de perturbation le plus grand possible.

2.4 Valeurs propres matricielles

Soit $0 < |\lambda| < M_s$. On veut construire $\mathcal{B}_\pm = \{\phi_i^\pm, 1 \leq i \leq 4\}$, deux bases de solutions de l'équation $L\phi = \lambda\phi$, avec des comportements exponentiels en $\pm\infty$. Avec $\Phi := {}^t(\phi, \partial_x\phi, \partial_x^2\phi, \partial_x^3\phi)$, l'EDO se réécrit

$$\partial_x \Phi = A(x; \lambda) \Phi, \quad A(x; \lambda) := \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{\zeta_0(x) - \lambda}{\varepsilon} & \frac{\zeta_1(x)}{\varepsilon} & \frac{\zeta_2(x)}{\varepsilon} & \frac{\zeta_3(x)}{\varepsilon} \end{array} \right).$$

Commençons par étudier $L_\pm \phi = \lambda\phi$, ou encore

$$\partial_x \Phi = A_\pm(\lambda) \Phi, \quad A_\pm(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x; \lambda).$$

Par le choix de ν fait au paragraphe précédent on a

$$\begin{aligned} L_+ &= -\varepsilon \partial_x^4 - 4\varepsilon\nu \partial_x^3 + (1 - 6\varepsilon\nu^2) \partial_x^2, \\ L_- &= -\varepsilon \partial_x^4 + \partial_x^2 + c_* \partial_x + f'(1). \end{aligned}$$

Proposition 8. Il existe $M_s, \varepsilon_0 > 0$ assez petits, tels que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(L)$ vérifie $0 < |\lambda| < M_s$, alors $A_\pm(\lambda)$ possède 4 valeurs propres $\mu_i^\pm(\lambda)$, $1 \leq i \leq 4$ telles que

$$\text{Re } \mu_1^\pm(\lambda) < \text{Re } \mu_2^\pm(\lambda) < 0 < \text{Re } \mu_3^\pm(\lambda) < \text{Re } \mu_4^\pm(\lambda). \quad (15)$$

De plus, le vecteur propre associé à μ_i^\pm est $v_j^\pm(\lambda) := {}^t(1, \mu_i^\pm, \mu_i^{\pm 2}, \mu_i^{\pm 3})$.

Démonstration. Le fait que les $A_\pm(\lambda)$ soient des matrices compagnons assure la forme particulière des vecteurs propres.

1. Construction des μ_i^- .

On cherche les racines du polynôme

$$P_-(X; \lambda) := -\varepsilon X^4 + X^2 + c_* X + \alpha_1 - \lambda = Q(X) + \alpha_1 - \alpha_0 - \lambda.$$

Pour $\lambda = 0$ et ε_0 assez petit, l'étude de Q faite à l'annexe §A page 22 fournit quatre racines simples $\mu_i^-(0)$ que l'on range par ordre croissant :

$$\mu_1^-(0) < \mu_2^-(0) < 0 < \mu_3^-(0) < \mu_4^-(0).$$

¹⁸. Voir figure 10.

Le théorème des fonctions implicites (TFI) appliqué à P_- fournit donc $\mu_i^-(\lambda)$ pour λ au voisinage de 0. Pour M_s suffisamment petit on a donc (15). Enfin, les μ_i^- sont \mathcal{C}^∞ en λ .

2. Construction des μ_i^+ .

On cherche les racines du polynôme

$$P_+(X; \lambda) := -\varepsilon X^4 - 4\varepsilon\nu X^3 + (1 - 6\varepsilon\nu^2) X^2 - \lambda.$$

Lorsque $\lambda = 0$, on obtient 0 comme racine double. Les deux autres racines sont réelles non nulles.¹⁹ Notons $\mu_i^+(0)$ pour $1 \leq i \leq 4$ ces quatre valeurs propres matricielles rangées par ordre croissant :

$$\mu_1^+(0) < \mu_2^+(0) = 0 = \mu_3^+(0) < \mu_4^+(0).$$

Remarquons que pour $\lambda \in \sigma(L_+)$, le polynôme P_+ admet une racine de la forme $i\xi$, et (15) ne peut pas tenir. On utilise le théorème des fonctions implicites (TFI) pour construire $\mu_i^+(\lambda)$.

Les racines $\mu_1^+(0)$ et $\mu_4^+(0)$ sont simples, donc $P_+(\mu_{1,4}^+; 0) = 0$ et $\partial_X P_+(\mu_{1,4}^+; 0) \neq 0$. Le TFI appliqué à P_+ fournit donc $\mu_i^+(\lambda)$, pour $i \in \{1, 4\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ au voisinage de 0. Elles sont \mathcal{C}^∞ en λ .

Cet argument ne fonctionne pas immédiatement pour μ_2^+ et μ_3^+ . Pour $\lambda \notin \mathbb{R}_-$, on fait le changement de variable $X := Y\sqrt{\lambda}$ et on note

$$F(Y; \sqrt{\lambda}) := -\varepsilon\lambda Y^4 - 4\varepsilon\nu\sqrt{\lambda} Y^3 + (1 - 6\varepsilon\nu^2) Y^2 - 1 = \frac{P_+(Y\sqrt{\lambda}; \lambda)}{\lambda}.$$

Pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := 1/6\nu^2$, on note $Y_0 := (1 - 6\varepsilon\nu^2)^{-1/2} > 0$. Alors $F(-Y_0; 0) = 0$, et $\partial_Y F(-Y_0; 0) = -2\sqrt{1 - 6\varepsilon\nu^2} \neq 0$. Le TFI appliqué à F définit $Y(\sqrt{\lambda})$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ proche de 0. On note alors $\mu_2^+(\lambda) := Y(\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}$. Le choix de F assure que $\mu_2^+(\lambda)$ est racine de $P_+(\lambda)$.

On construit μ_3^+ en remarquant que Y_0 est également racine simple de F en $\lambda = 0$. $\mu_3^+(\lambda) := \tilde{Y}(\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}$, avec $\tilde{Y}(0) = Y_0 = -Y(0)$.

Alors pour $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(L)$ et $0 < |\lambda| < M_s$ avec M_s suffisamment petit, on a²⁰

$$\text{Re } \mu_1^+(\lambda) < \text{Re } \mu_2^+(\lambda) < 0 < \text{Re } \mu_3^+(\lambda) < \text{Re } \mu_4^+(\lambda)$$

De plus les μ_i^+ sont des fonctions \mathcal{C}^∞ en $\sqrt{\lambda}$. □

2.5 Bases de solutions

On peut à présent résoudre $L\phi = \lambda\phi$ pour $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(L)$ tel que $0 < |\lambda| < M_s$. On note P la matrice de passage dont les colonnes sont les v_i^+ . C'est une matrice de VANDERMONDE.

Proposition 9. Sous les mêmes hypothèses que la proposition 8, il existe $\phi_i^\pm(\cdot; \lambda)$, $1 \leq i \leq 4$ base de solutions de $L_\pm\phi = \lambda\phi$, telle que les premières dérivées de ϕ_i^\pm s'écrivent :

$$\partial_x^j \phi_i^\pm(x; \lambda) = e^{\mu_i^\pm(\lambda)x} \mu_i^\pm(\lambda)^j (1 + e^{\alpha_\pm x} \kappa_{i,j}^\pm(x; \lambda)), \quad 0 \leq j \leq 3,$$

où $\nu < \alpha_+ < 0 < \alpha_- < \mu_3^-(0)$, et où $\kappa_{i,j}^\pm$ borné en $\pm\infty$ est holomorphe en $\sqrt{\lambda}$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(L)$, $|\lambda| \leq M_s$.

En particulier, cette proposition fournit $\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-$ et ϕ_4^- qui convergent à vitesse exponentielle en $+\infty$ ou en $-\infty$. Remarquons que pour un tel choix de α_\pm , on a $\bar{u}_*(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha_\pm x})$ en $\pm\infty$.

Démonstration. On ne traite que le cas de ϕ_1^+ et ϕ_2^+ , les autres sont similaires.

¹⁹. On calcule explicitement leurs expressions : $-2\nu \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2\nu^2}$.

²⁰. Le seul point non clair est que $\text{Re } \mu_2^+ \leq 0 \leq \text{Re } \mu_3^+$. Puisque $Y_0 > 0$, c'est au moins vrai pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$ assez petit. C'est donc encore vrai pour λ à droite de $\sigma(L_+)$: dans le cas contraire $\text{Re } \mu_2^+$ ou $\text{Re } \mu_3^+$ s'annule, et P_+ a une racine de la forme $i\xi$.

1. Construction de ϕ_1^+

Soit $x_0 \geq 1$ dont on fixera la valeur et soit $I := [x_0, +\infty[$. On note $\Phi := {}^t(\phi, \partial_x \phi, \partial_x^2 \phi, \partial_x^3 \phi)$, pour transformer le problème $L\phi = \lambda\phi$ avec $x \in I$ en

$$\partial_x \Phi = A(x; \lambda) \Phi = A_+(\lambda) \Phi + R(x) \Phi,$$

où $R(x) := A(x; \lambda) - A_+(\lambda)$ est exponentiellement localisé. Cette décomposition va forcer Φ à converger vers 0 à vitesse $e^{\mu_1^+(\lambda)x}$. On fait le changement de variable $\psi(x) := e^{-\mu_1^+(\lambda)x} \phi(x)$ et on note $\Psi(x) := e^{-\mu_1^+(\lambda)x} \Phi(x)$. Alors

$$\partial_x \Psi = B_+(\lambda) \Psi + R(x) \Psi,$$

où $B_+(\lambda) := A_+(\lambda) - \mu_1^+(\lambda) \text{Id}$. On construit une solution Ψ qui converge vers $v_1^+(\lambda)$.

Pour plus de clarté, on abandonne provisoirement la dépendance en λ . La relation de CHASLES $\int_{x_0}^x = \int_{x_0}^{+\infty} - \int_x^{+\infty}$ permet, sous réserve que chaque intégrale soit définie, d'écrire la formule de DUHAMEL comme

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= e^{B_+(x-x_0)} \Psi(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds - \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds, \\ &= \sum_{i=1}^4 e^{(\mu_i^+ - \mu_1^+)x} \Pi_i^+ \gamma - \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds, \\ &= \Pi_1^+ \gamma - \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds + \sum_{i=2}^4 e^{(\mu_i^+ - \mu_1^+)x} \Pi_i^+ \gamma. \end{aligned} \quad (16)$$

avec $\gamma := e^{-B_+x_0} \Psi(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} e^{-B_+s} R(s) \Psi(s) ds$, et où on a noté Π_i^+ chaque projection sur le sous-espace propre $\text{Vect}(v_i^+(\lambda))$.

L'intérêt de la formulation (16), où la condition initiale est exprimée à travers un comportement à l'infini, est que l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds$ a la même localisation exponentielle que R , comme on le voit plus loin. Si on choisit $\Psi(x_0)$ tel que $\gamma = v_1^+$,²¹ alors Ψ vérifie l'équation intégrale

$$\Psi(x) = v_1^+ - \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds. \quad (17)$$

Vu le choix de ω , on a pour $x \geq 1$:

$$R(x) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\zeta_0(x)}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{f'(\bar{u}_*(x))}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \mathcal{O}(e^{\alpha+x}).$$

Ainsi le terme de droite dans (17) ne dépend que de $\psi(x) = e^{-\mu_1^+x} \phi(x)$, pas des dérivées de ϕ , et la première composante de l'équation vectorielle (17) est découplée :

$$\psi(x) = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{+\infty} h(x-s) \zeta_0(s) \psi(s) ds, \quad (18)$$

où $h(x)$ est le coefficient (1, 4) de la matrice $e^{B_+x} = P e^{Dx} P^{-1}$, avec $D := \text{diag}(\mu_i^+ - \mu_1^+)$ matrice diagonale. En particulier, $h(x)$ est une combinaison linéaire des $e^{(\mu_i^+ - \mu_1^+)x}$. On peut obtenir une expression

²¹. On suppose ici qu'un tel choix est possible. La suite du raisonnement montre que c'est le cas.

de P^{-1} à l'aide des polynômes de LEGENDRE, ou calculer les coefficients de la comatrice, voir [9]. Ceci permet d'obtenir

$$h(x) := \sum_{i=1}^4 e^{(\mu_i^+ - \mu_1^+)x} \prod_{j \neq i} (\mu_i^+ - \mu_j^+)^{-1}.$$

Cette expression explicite de h est holomorphe en $\sqrt{\lambda}$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(L)$ tel que $|\lambda| \leq M_s$. On doit chercher ψ sous la forme $1 + \theta$. Alors $\theta(x) := \psi(x) - 1$ vérifie

$$\theta(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{+\infty} h(x-s) \zeta_0(s) (\theta(s) + 1) ds =: T(\theta). \quad (19)$$

Comme $\text{Re}(\mu_i^+ - \mu_1^+) > 0$ et vu la forme de h , la décroissance $\zeta_0(s) = \mathcal{O}(e^{\alpha+s})$ implique

$$\int_x^{+\infty} h(x-s) \zeta_0(s) ds = \mathcal{O}(e^{\alpha+x}).$$

Ainsi $T_{\alpha+} := e^{-\alpha+x} T e^{\alpha+x}$ vérifie pour $\kappa \in L^\infty(I)$

$$T_{\alpha+}(\kappa)(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathcal{O}(1) - \int_x^{+\infty} e^{-\alpha+(x-s)} h(x-s) \zeta_0(s) \kappa(s) ds \right) \in L^\infty(I),$$

et l'équation (19) se réécrit $T_{\alpha+}(e^{-\alpha+x}\theta)(x) = e^{-\alpha+x}\theta(x)$. Montrons que $T_{\alpha+}$ définit une application contractante. Pour $\kappa, \tilde{\kappa} \in L^\infty(I)$ et pour presque tout $x \in I$ on a

$$|T_{\alpha+}(\kappa)(x) - T_{\alpha+}(\tilde{\kappa})(x)| \leq \|\kappa - \tilde{\kappa}\|_{L^\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{+\infty} e^{-\alpha+(x-s)} |h(x-s) \zeta_0(s)| ds. \quad (20)$$

Vu la forme de h et puisque $\zeta_0(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha+x})$, l'intégrale dans (20) est un $\mathcal{O}(e^{\alpha+x})$. En particulier, il existe $x_0(\varepsilon)$ tel que $T_{\alpha+} : L^\infty(I) \rightarrow L^\infty(I)$ soit contractante. Par théorème de BANACH-PICARD, $T_{\alpha+}$ admet un unique point fixe $\kappa_1^+ \in L^\infty(I)$. Puisque $T_{\alpha+}$ est holomorphe par rapport au paramètre $\sqrt{\lambda}$, c'est également le cas de κ_1^+ . On obtient le premier élément de notre base de solutions comme

$$\phi_1^+(x) := e^{\mu_1^+ x} (1 + e^{\alpha+x} \kappa_1^+(x)).$$

En réinjectant son expression dans l'équation intégrale (17), on obtient ses dérivées. Chacun des $\psi_k := e^{-\mu_1^+ x} \partial_x^k \phi$ vérifie une équation intégrale de la forme (18), où seul le terme de gauche fait apparaître ψ_k . Dans le terme de droite de cette équation, 1 est remplacé par μ_1^{+k} et h est de la forme

$$h(x) := \sum_{i=1}^4 \mu_i^{+k} e^{(\mu_i^+ - \mu_1^+)x} \prod_{j \neq i} (\mu_i^+ - \mu_j^+)^{-1}.$$

Finalement, on a l'expression annoncée

$$\Phi_1^+(x; \lambda) = e^{\mu_1^+(\lambda)x} (v_1^+(\lambda) + e^{\alpha+x} K_1^+(x; \lambda)).$$

Pour finir on étend la définition de Φ_1^+ à tout \mathbb{R} , en utilisant le flot de l'EDO $\partial_x \Phi = A(x; \lambda) \Phi$.

2. Construction de ϕ_2^+

On reprend la plupart des idées du paragraphe précédent. Après avoir vectorialisé le problème $L\phi = \lambda\phi$ en $\partial_x \Phi = A(x; \lambda) \Phi$, on fait le changement de variable

$$\Psi(x) := e^{-\mu_2^+ x} \Phi(x).$$

Alors $\partial_x \Psi = B_+(\lambda) \Psi + R(x) \Psi$, avec cette fois $B_+(\lambda) = A_+(\lambda) - \mu_2^+(\lambda)$. Pour écrire la formule de DUHAMEL, on projette sur les espaces propres puis, suivant le signe de $\mu_i^+ - \mu_2^+$ on découpe les intégrales en passant par $+\infty$ ou 0 :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Pi_1^+ \left(e^{B_+ x} \tilde{\gamma} + \int_0^x e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds \right) \\ &\quad + (1 - \Pi_1^+) \left(e^{B_+ x} \gamma - \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds \right), \\ &= \Pi_2^+ \gamma + \Pi_1^+ \int_0^x e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds - (1 - \Pi_1^+) \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds \\ &\quad + e^{(\mu_1^+ - \mu_2^+)x} \Pi_1^+ \tilde{\gamma} + \sum_{i=3}^4 e^{(\mu_i^+ - \mu_2^+)x} \Pi_i^+ \gamma. \end{aligned} \quad (21)$$

Où les conditions initiales γ et $\tilde{\gamma}$ sont données par

$$\gamma := e^{-B_+ x_0} \Psi(x_0) + \int_{x_0}^{+\infty} e^{-B_+ s} R(s) \Psi(s) ds, \quad \tilde{\gamma} := e^{-B_+ x_0} \Psi(x_0) - \int_0^{x_0} e^{-B_+ s} R(s) \Psi(s) ds,$$

de sorte que si $\gamma = v_2^+$ et $\tilde{\gamma} \perp v_1^+$, on ait

$$\Psi(x) = v_2^+ + \Pi_1^+ \int_0^x e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds - (1 - \Pi_1^+) \int_x^{+\infty} e^{B_+(x-s)} R(s) \Psi(s) ds. \quad (22)$$

Le découpage effectué en (21) permet que chaque intégrale dans (22) ait la même localisation exponentielle que R . La première ligne de l'équation vectorielle (22) est découpée :

$$\psi(x) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \tilde{h}(x-s) \zeta_0(s) \psi(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{+\infty} h(x-s) \zeta_0(s) \psi(s) ds,$$

où $|\tilde{h}(x)| \leq C e^{\operatorname{Re}(\mu_1^+ - \mu_2^+)x}$, et $h(x)$ est une combinaison linéaire des $e^{(\mu_i^+ - \mu_2^+)x}$, $i \in \{2, 3, 4\}$. On cherche ψ sous la forme $1 + \theta$. Alors $\theta(x) := \psi(x) - 1$ vérifie

$$\theta(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \tilde{h}(x-s) \zeta_0(s) (1 + \theta(s)) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{+\infty} h(x-s) \zeta_0(s) (1 + \theta(s)) ds =: T(\theta)(x). \quad (23)$$

Les expressions de h , \tilde{h} et la décroissance $\zeta_0(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha_+ x})$ assurent que

$$\int_0^x \tilde{h}(x-s) \zeta_0(s) ds - \int_x^{+\infty} h(x-s) \zeta_0(s) ds = \mathcal{O}(e^{\alpha_+ x}),$$

de sorte que $T_{\alpha_+} := e^{-\alpha_+ x} T e^{\alpha_+ x}$ vérifie pour $\kappa \in L^\infty(I)$

$$\begin{aligned} T_{\alpha_+}(\kappa)(x) &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\mathcal{O}(1) + \int_0^x e^{-\alpha_+(x-s)} \tilde{h}(x-s) \zeta_0(s) \kappa(s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_+(x-s)} h(x-s) \zeta_0(s) \kappa(s) ds \right) \in L^\infty(I), \end{aligned}$$

et l'équation (23) s'écrit $T_{\alpha_+}(e^{-\alpha_+ x} \theta)(x) = e^{-\alpha_+ x} \theta(x)$. Pour $\kappa_1, \kappa_2 \in L^\infty(I)$, et presque tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} |T_{\alpha_+}(\kappa_1)(x) - T_{\alpha_+}(\kappa_2)(x)| &\leq \|\kappa_1 - \kappa_2\|_{L^\infty} \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^x e^{-\alpha_+(x-s)} |\tilde{h}(x-s) \zeta_0(s)| ds \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{+\infty} e^{-\alpha_+(x-s)} |h(x-s) \zeta_0(s)| ds \right). \end{aligned}$$

Le même argument que précédemment permet de choisir $x_0(\varepsilon)$ tel que $T_{\alpha_+} : L^\infty(I) \rightarrow L^\infty(I)$ soit contractante. Il existe un unique κ_2^+ point fixe de T_{α_+} , et

$$\phi_2^+(x; \lambda) := e^{\mu_2^+(\lambda)x} (1 + e^{\alpha+x} \kappa_2^+(x; \lambda))$$

est solution de $L\phi = \lambda\phi$. On réinjecte son expression dans (22) pour obtenir ses dérivées :

$$\Phi_2^+(x; \lambda) = e^{\mu_2^+(\lambda)x} (v_2^+(\lambda) + e^{\alpha+x} K_2^+(x; \lambda)).$$

Enfin, on prolonge Φ_2^+ sur \mathbb{R} via le flot de l'EDO.

3. Les cas restants

De la même manière, on peut construire $\phi_{3,4}^+$. L'étape importante est le découpage de la formulation de DUHAMEL : il suffit de séparer les $\mu_i^+ - \mu_{3,4}^+ < 0$ des $\mu_i^+ - \mu_{3,4}^+ \geq 0$. La construction des ϕ_i^- se fait de la même façon, en séparant suivant le signe de $\mu_i^- - \mu_j^-$.²² \square

Remarquons que la construction de ϕ_i^\pm est valide dès que l'intégrale $\int_x^{\pm\infty}$ qui apparaît dans la démonstration est définie. Il est suffisant que $h(s)\zeta_0(s)$ soit à décroissance exponentielle *i.e.* que les condition de « trou spectral » soient vérifiées :

$$\nu < \operatorname{Re}(\mu_{i+1}^+ - \mu_i^+), \quad \operatorname{Re}(\mu_{i-1}^- - \mu_i^-) < \mu_3^-(0). \quad (24)$$

Ces conditions sont vérifiées dès que les $\operatorname{Re} \mu_i^\pm$ sont rangés par ordre croissant. Pour les λ tels que (24) soit vérifiée, il est possible de définir les $\phi_i^\pm(x; \lambda)$, même si les $\operatorname{Re} \mu_i^\pm(\lambda)$ ne sont plus ordonnés. Dans ce cas, on ne peut pas obtenir le comportement asymptotique démontré ci-dessus.

D'autre part, on peut construire $\phi_i^\pm(x; 0)$, mais les $\phi_{2,3}^\pm(\cdot; 0)$ n'ont pas la décroissance voulue. En effet B_+ possède alors 0 comme racine double, un bloc de JORDAN apparaît lors du calcul de e^{B+x} .

2.6 Fonction de Evans

Pour $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ éléments de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on note $D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ le wronskien associé, c'est à dire le déterminant de la matrice $n \times n$ dont le coefficient (i, j) est $\partial_x^j \varphi_i$:

$$D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(y) := \det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & & & \\ \partial_x^{n-1} & & & \end{pmatrix} \cdot (\varphi_1, \dots, \varphi_n)(y) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_x^{n-1} \varphi_1 & \dots & \partial_x^{n-1} \varphi_n \end{vmatrix} (y). \quad (25)$$

Soit $0 < |\lambda| \leq M_s$. On note en particulier $w_\lambda(y)$ la matrice associée aux $\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-$, puis $W_\lambda(y) := \det w_\lambda(y) = D(\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-)(y)$. On choisit ces 4 solutions de $L\phi = \lambda\phi$ car elles décroissent en $+\infty$ ou en $-\infty$, et vont donc permettre de construire G_λ . Comme on l'a déjà vu au §1 et comme on le verra plus loin, on a besoin de savoir si W_λ s'annule. Par définition des ϕ_i^\pm ,

$$\partial_y w_\lambda = A(y; \lambda) w_\lambda.$$

Le calcul classique de la différentielle du déterminant donne $d \det(X) \cdot H = \operatorname{Tr}({}^t \operatorname{Com}(X) H)$, donc

$$\partial_y W_\lambda = \operatorname{Tr}({}^t \operatorname{Com}(w_\lambda) \partial_y w_\lambda) = \operatorname{Tr}(A(y; \lambda) w_\lambda {}^t \operatorname{Com}(w_\lambda)) = \operatorname{Tr}(A) W_\lambda, \quad (26)$$

où $\operatorname{Tr}(A) = -4 \frac{\omega'}{\omega}$. Puisque $\omega(0) = 1$, la résolution de l'EDO (26) donne pour $y \in \mathbb{R}$

$$W_\lambda(y) = \frac{W_\lambda(0)}{\omega(y)^4}.$$

De sorte que W_λ est soit identiquement nulle, soit ne s'annule jamais. Ceci motive à noter $E(\lambda) := W_\lambda(0)$ la fonction de EVANS. Ajoutons que $E(\lambda) = 0$ *ssi* λ est valeur propre de L .²³

^{22.} Lorsque l'on construit ϕ_i^- , pour les j tels que $\mu_j^- - \mu_i^- \leq 0$ on utilise $\int_x^{x_0} = \int_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^x$; pour les j tels que $\mu_j^- - \mu_i^- > 0$ on utilise $\int_x^{x_0} = \int_x^0 - \int_{x_0}^0$.

^{23.} Pour le sens direct, $E(\lambda) = 0$ assure que la famille $(\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-)$ est liée, ce qui permet de construire $\phi \in H^4(\mathbb{R})$ (on obtient $\partial_x^4 \phi \in L^2(\mathbb{R})$ par $L\phi = \lambda\phi$) solution de $L\phi = \lambda\phi$.

2.7 Construction du noyau de Green

Soit $\lambda \notin \sigma(L)$ vérifiant $0 < |\lambda| \leq M_s$. Alors $E(\lambda) \neq 0$ et on va pouvoir construire $G_\lambda(\cdot, y) \in H^3(\mathbb{R})$, solution de l'équation :

$$(\lambda - L)G_\lambda = \delta_y. \quad (27)$$

En particulier, cette solution vérifie $LG_\lambda = \lambda G_\lambda$ sur $] -\infty, y[$ et sur $]y, +\infty[$, ce qui encourage à chercher G_λ sous la forme

$$G_\lambda(x, y) := \begin{cases} \phi_1^+(x)F_1(y) + \phi_2^+(x)F_2(y) & \text{si } y \leq x, \\ \phi_3^-(x)F_3(y) + \phi_4^-(x)F_4(y) & \text{si } x \leq y. \end{cases}$$

Une façon d'assurer que (27) soit vérifiée est d'imposer la continuité en $x = y$ de $\partial_x^j G_\lambda$ pour $0 \leq j \leq 2$, puis d'assurer que $\partial_x^3 G_\lambda$ fasse un saut de $-1/\varepsilon$ en $x = y$. Cette condition de saut

$$[G_\lambda, \partial_x G_\lambda, \partial_x^2 G_\lambda, \partial_x^3 G_\lambda]_y = (0, 0, 0, -1/\varepsilon) =: {}^t\sigma(\varepsilon),$$

en $x = y$ s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x \\ \partial_{xx} \\ \partial_{xxx} \end{pmatrix} \cdot (\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-)(x = y) \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -F_3 \\ -F_4 \end{pmatrix} (y) = \sigma(\varepsilon).$$

On reconnaît à gauche la matrice $w_\lambda(y)$, donc le vecteur inconnu $F := {}^t(F_1, F_2, -F_3, -F_4)$ vérifie l'équation $w_\lambda(y)F(y) = \sigma(\varepsilon)$. On applique la règle de CRAMER pour obtenir

$$\begin{aligned} F_1(y) &= \frac{D(\phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-)}{\varepsilon W_\lambda}(y), & F_2(y) &= -\frac{D(\phi_1^+, \phi_3^-, \phi_4^-)}{\varepsilon W_\lambda}(y), \\ F_3(y) &= -\frac{D(\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_4^-)}{\varepsilon W_\lambda}(y), & F_4(y) &= \frac{D(\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-)}{\varepsilon W_\lambda}(y), \end{aligned}$$

avec la notation (25). On note N_i le déterminant au numérateur de F_i pour finalement avoir :

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{\varepsilon W_\lambda(y)} \begin{cases} \phi_1^+(x)N_1(y) - \phi_2^+(x)N_2(y) & \text{si } y \leq x, \\ -\phi_3^-(x)N_3(y) + \phi_4^-(x)N_4(y) & \text{si } x \leq y. \end{cases} \quad (28)$$

2.8 Majoration du noyau de Green

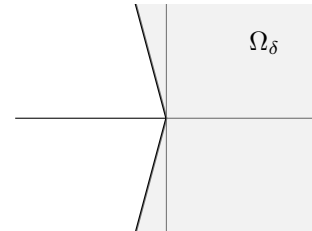
On veut obtenir des majorations de la fonction de GREEN en domaine de LAPLACE. Le contour d'intégration ne doit pas intersecter le spectre de L , on peut donc se restreindre au domaine

$$\Omega_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}(\lambda) \geq -\delta|\operatorname{Im} \lambda|\},$$

où dans la suite, $\delta > 0$ est choisi suffisamment petit pour que $\Omega_\delta \cap \sigma(L) = \emptyset$. Ceci implique que Ω_δ ne contient pas de valeurs propres, voir la discussion au paragraphe §1.5.

Soient $M_l > M_s > 0$ deux réels. On sépare notre étude en trois cas, suivant la localisation du paramètre spectral $\lambda \in \Omega_\delta \setminus \mathbb{R}_-$:

- si $M_l \leq |\lambda|$ avec M_l suffisamment grand, on s'attend à ce que les solutions de $(\lambda - L)G_\lambda = \delta_y$ se comportent comme les solutions de $(\lambda + \varepsilon \partial_x^4)G_\lambda = \delta_y$,



- si $M_s \leq |\lambda| \leq M_l$, on se contente de borner G_λ uniformément en x ,
- si $0 < |\lambda| \leq M_s$ avec M_s suffisamment petit, la construction de G_λ faite précédemment à l'aide des ϕ_i^\pm va permettre d'obtenir des majorations.

On présente le premier cas. On s'attend à ce que le troisième soit similaire. Soit $M_l > 0$ que l'on fixera plus loin. Soit $\lambda \in \Omega_\delta$ vérifiant $|\lambda| \leq M_l$. On commence par construire G_λ .

Proposition 10. Il existe $\delta, \eta > 0$ tels que si $\lambda \in \Omega_\delta$ vérifie $M_l \leq |\lambda|$, alors il existe $\phi_i^\pm(x; \lambda)$ bases de solutions de $L\phi = \lambda\phi$, dont le comportement en $\pm\infty$ des premières dérivées est donné par

$$\partial_x^j \phi_i^\pm(x; \lambda) = e^{\mu_i(\lambda)x} \mu_i(\lambda)^j (1 + e^{\alpha_\pm x} \kappa_{i,j}^\pm(x; \lambda)), \quad 0 \leq j \leq 3,$$

où les valeurs propres μ_i sont de modules $|\lambda/\varepsilon|^{1/4}$, et sont séparées par un trou spectral :

$$\operatorname{Re} \mu_1(\lambda), \operatorname{Re} \mu_2(\lambda) < -\eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4} < 0 < \eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4} < \operatorname{Re} \mu_3(\lambda), \operatorname{Re} \mu_4(\lambda).$$

Comme d'habitude, on a noté $\nu < \alpha_+ < 0 < \alpha_- < \mu_3^-(0)$ taux de croissance qui contrôlent \bar{u}_* en $\pm\infty$ et $\kappa_{i,j}^\pm$ borné pour $x \rightarrow \pm\infty$, holomorphe en $\sqrt[4]{\lambda}$.

Démonstration. Soit ϕ solution de $L\phi = \lambda\phi$. Après le changement de variable $\psi(x) := \phi(x|\lambda|^{-1/4})$, on met l'équation sous forme vectorielle. Alors $\Psi := {}^t(\psi, \partial_x \psi, \partial_x^2 \psi, \partial_x^3 \psi)$ vérifie

$$\partial_x \Psi = A(\lambda) \Psi + R(x; \lambda) \Psi, \quad A(\lambda) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-\lambda}{\varepsilon|\lambda|} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $R(x; \lambda) = \mathcal{O}\left(e^{\alpha_\pm |\lambda|^{-\frac{1}{4}} x}\right)$ exponentiellement localisé en $\pm\infty$.²⁴ De la même façon que dans le cas $0 < |\lambda| \leq M_s$ on peut construire en reprenant la démonstration de la proposition 9 deux bases de solutions Ψ_i^\pm dont les comportements asymptotiques sont donnés par $A(\lambda)$, matrice de l'équation $(\lambda + \varepsilon|\lambda|\partial_x^4)\psi = 0$.²⁵ Ses valeurs propres sont les

$$\tilde{\mu}_i(\lambda) = z \frac{\sqrt[4]{\lambda}}{(\varepsilon|\lambda|)^{\frac{1}{4}}}, \quad z \in \left\{ e^{-\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{-\frac{i\pi}{4}} \right\}.$$

ordonnées suivant $\operatorname{Re} \tilde{\mu}_1, \operatorname{Re} \tilde{\mu}_2 < 0 < \operatorname{Re} \tilde{\mu}_3, \operatorname{Re} \tilde{\mu}_4$. On obtient

$$\partial_x^j \psi_i^\pm(x; \lambda) = e^{\tilde{\mu}_i(\lambda)x} \tilde{\mu}_i(\lambda)^j \left(1 + e^{\alpha_\pm |\lambda|^{-1/4} x} \kappa_{i,j}^\pm(x; \lambda)\right), \quad 0 \leq j \leq 3,$$

puis le changement de variable inverse $\psi(x) =: \phi(x|\lambda|^{-1/4})$ donne en $\pm\infty$:

$$\Phi_i^\pm(x; \lambda) = e^{\tilde{\mu}_i(\lambda)|\lambda|^{1/4} x} \left(|\lambda|^{1/4} \tilde{\mu}_i\right)^j \left(1 + e^{\alpha_\pm x} \kappa_{i,j}^\pm(x; \lambda)\right),$$

On note donc $\mu_i(\lambda) = |\lambda|^{1/4} \tilde{\mu}_i(\lambda)$, et la forme particulière de z assure la condition de trou spectral, voir figure 9. \square

La proposition précédente construit en particulier $\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-$ et ϕ_4^- qui décroissent en $+\infty$ ou en $-\infty$, le paragraphe 2.7 permet de construire G_λ suivant (28). Le résultat suivant nous assure que $E(\lambda)$ ne s'annule pas sur Ω_δ , pour δ fournit par la proposition précédente.

Lemme 11. Il existe $M_l, C > 0$ tels que pour tout $\lambda \in \Omega_\delta$ vérifiant $M_l \leq |\lambda|$ on a $E(\lambda) \geq C|\lambda/\varepsilon|^{3/2}$.

²⁴. Les coefficients non nuls de R sont les $R_{4,i} = \frac{1}{\varepsilon} |\lambda|^{i/4-1} \zeta_i(x|\lambda|^{-1/4})$.

²⁵. C'est-à-dire $(\lambda + \varepsilon\partial_x^4)\phi = 0$.

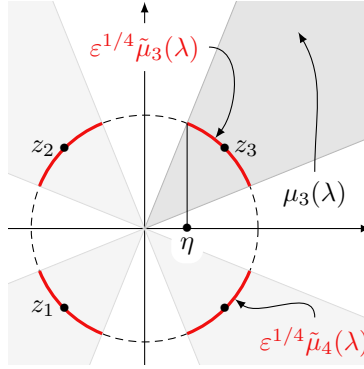


FIGURE 9 – Location des $\mu_i(\lambda)$ pour $\lambda \in \Omega_\delta$. Si δ est assez petit, $\varepsilon^{1/4}\tilde{\mu}_i(\lambda)$ est compris dans un arc qui ne rencontre pas l'axe imaginaire.

Démonstration. Par définition, $E(\lambda) = D(\phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-)(0)$ est un déterminant de taille 4. Vu la proposition précédente, c'est une perturbation d'un déterminant de VANDERMONDE : pour $|\lambda| \rightarrow +\infty$ on a

$$E(\lambda) = (1 + o(1)) \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (\mu_j(\lambda) - \mu_i(\lambda)).$$

La forme particulière des z assure $|z_i - z_j| \in \{2, \sqrt{2}\}$ pour $i \neq j$. On en déduit $|\mu_i(\lambda) - \mu_j(\lambda)| = C_{i,j}|\lambda/\varepsilon|^{1/4}$. Ainsi il existe M_l suffisamment grand tel que pour $M_l \leq |\lambda|$ on ait $1 + o(1) \geq 1/2$, donc $E(\lambda) \geq 8|\lambda/\varepsilon|^{6/4}$. \square

On veut maintenant obtenir une majoration de G_λ .

Proposition 12. Il existe $\eta, \delta, M_l, C > 0$ tels que pour $\lambda \in \Omega_\delta$ vérifiant $M_l \leq |\lambda|$ on a

$$|G_\lambda(x, y)| \leq C \frac{\varepsilon^{-7/4}}{|\lambda|^{3/4}} e^{-\eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}|x-y|}.$$

Démonstration. On découpe la preuve suivant les positions relatives de x, y et 0. On présente les cas où $y \leq x$ de telle sorte que $|x - y| = x - y$. Les autres cas s'adaptent sans difficulté. On continue donc avec

$$G_\lambda(x, y) = \frac{1}{\varepsilon W_\lambda(y)} (\phi_1^+(x)N_1(y) - \phi_2^+(x)N_2(y)),$$

et on discute uniquement du terme $\phi_1^+(x)N_1(y)$, l'autre se traite identiquement.

— $y \leq 0 \leq x$: cas où x et y sont du « bon côté ».

Dans un premier temps, on a $\phi_1^+(x) = e^{\mu_1 x} \mathcal{O}(1)$, donc $|\phi_1^+(x)| \leq e^{-\eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}x}$. Pour contrôler $N_1(y) = D(\phi_2^+, \phi_3^-, \phi_4^-)(y)$, on doit écrire ϕ_2^+ dans la base $\mathcal{B}_- = (\phi_i^-)_i$:

$$N_1(y) = \sum_{i=1}^4 a_i D(\phi_i^-, \phi_3^-, \phi_4^-)(y).$$

Remarquons que les termes pour $i = 3, 4$ sont nuls. On a donc pour M_l assez grand

$$|N_1(y)| \leq C \sum_{i=1,2} |a_i| e^{\operatorname{Re}(\mu_i + \mu_3 + \mu_4)y} \operatorname{Vand}_3(\lambda),$$

où $\text{Vand}_3(\lambda)$ est le déterminant d'une matrice de VANDERMONDE de taille 3. On utilise la symétrie que partagent les μ_i : $\text{Re}(\mu_i + \mu_3 + \mu_4) \leq \text{Re} \mu_4 \leq \eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}$, pour obtenir

$$|N_1(y)| \leq C|\lambda/\varepsilon|^{3/4} e^{\eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}y}.$$

Finalement, on majore $1/|W_\lambda(y)| \leq C\omega(y)^4|\lambda/\varepsilon|^{-3/2} \leq C|\lambda/\varepsilon|^{-3/2}$ pour obtenir l'inégalité annoncée.

— $y \leq x \leq 0$: cas où x est du « mauvais côté ».

Comme précédemment on utilise $1/|W_\lambda(y)| \leq |\lambda/\varepsilon|^{-3/2}$. Cette fois, on décompose $\phi_1^+(x)$ dans la base B_- et on se contente d'une borne exponentielle.

$$|\phi_1^+(x)| \leq \sum_{i=1}^4 |a_i| |\phi_i^-(x)| \leq C e^{\text{Re} \mu_1 x} \leq C e^{-\eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}x}.$$

On majore $N_1(y)$ exactement comme dans le cas précédent.

— $0 \leq y \leq x$: cas où y est du « mauvais côté ».

On majore $\phi_1^+(x)$ de la même façon que dans le premier cas $y \leq 0 \leq x$. On décompose ensuite $N_1(y)$ dans la base B_- , on se contente d'une borne exponentielle :

$$|N_1(y)| \leq \sum_{i \neq j \in \{1,3,4\}} |a_i b_j| |D(\phi_2^+, \phi_i^+, \phi_j^+)(y)| \leq C \text{Vand}_3(\lambda) \sum_{i \neq j \in \{1,3,4\}} e^{\text{Re}(\mu_2 + \mu_i + \mu_j)y}.$$

Remarquons que pour $i \neq j \in \{1, 3, 4\}$ on a $\text{Re}(\mu_2 + \mu_i + \mu_j) \leq \text{Re}(\mu_4) \leq \eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}$, ce qui donne $|N_1(y)| \leq C|\lambda/\varepsilon|^{3/4} e^{\eta|\lambda/\varepsilon|^{1/4}y}$. On en déduit l'inégalité annoncée. \square

On s'attend à ce que ce schéma de preuve s'adapte dans le cas $0 \leq |\lambda| \leq M_s$, l'ingrédient clef étant que l'on peut appairer les valeurs propres $\mu_1^+, \mu_2^+, \mu_3^-$ et μ_4^- . En effet $\mu_1^+(\lambda)$ et $\mu_4^-(\lambda)$ sont du même ordre de grandeur $\varepsilon^{-1/2}$, tandis que $\mu_2^+(\lambda)$ et $\mu_3^-(\lambda)$ sont proches respectivement de 0 et $\mu_3^-(0) > 0$.

Annexes

A Étude polynomiale

On étudie ici le polynôme $Q(X) = -\varepsilon X^4 + X^2 + cX + f'(0)$. Pour le choix de c_* donné par (14), ν est racine double de Q . On peut donc écrire

$$Q = -\varepsilon(X - \nu)^2 \left(X^2 + 2\nu X - \frac{f'(0)}{\varepsilon\nu^2} \right),$$

et Q possède deux autres racines réelles.²⁶ On veut maintenant trouver les racines de

$$\tilde{Q}(X) := -\varepsilon X^4 + X^2 + cX + f'(1) = Q(X) + f'(1) - f'(0).$$

Les racines de

$$Q'(X) = -4\varepsilon X^3 + 2X + c = -4\varepsilon(X - \nu) \left(X^2 + \nu X + \frac{c}{4\varepsilon\nu} \right).$$

²⁶. On calcule explicitement leurs expressions : $-\nu \pm \sqrt{\nu^2 + f'(0)/\varepsilon\nu^2}$.

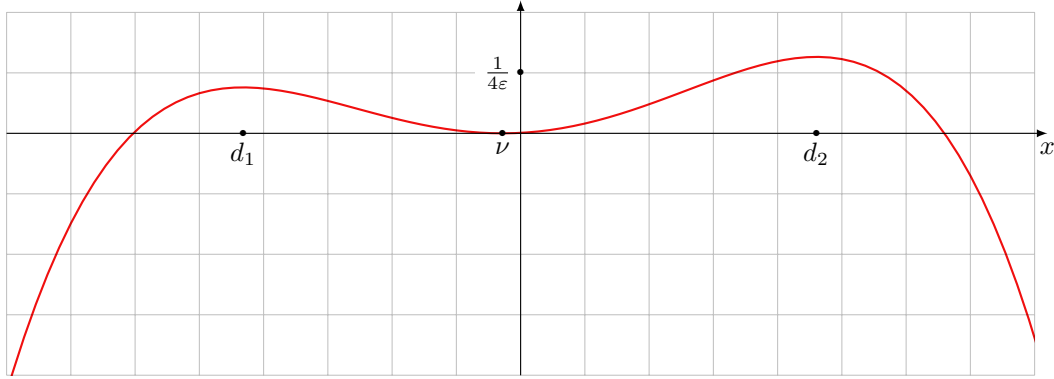


FIGURE 10 – Polynôme $Q(X)$. On peut voir sa racine double ν et ses deux autres racines. Les d_i et ν sont les racines de $Q'(X)$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $Q(d_i) \rightarrow +\infty$ ce qui assure l'existence de racines pour $\tilde{Q}(X)$.

sont ν , d_1 et d_2 .²⁷ Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on a $d_i = \pm \left(-\frac{c_*}{4\varepsilon\nu}\right)^{1/2} + \mathcal{O}(1)$, et en réutilisant les développements de ν et c_* on obtient

$$Q(d_i) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{c_*}{4|\nu|} - \left(\frac{c_*}{4|\nu|} \right)^2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2}) = \frac{1}{4\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2}) \rightarrow +\infty.$$

Ainsi $\tilde{Q}(X) = Q(X) + f'(1) - f'(0)$ possède quatre racines réelles que l'on note μ_i^- , elles vérifient²⁸

$$\mu_1^- < \mu_2^- < \nu < 0 < \mu_3^- < \mu_4^-.$$

B Forme de l'opérateur stabilisé

Proposition 13. Soit $P := \sum_{j=0}^d a_j X^j$ polynôme. On note $T := P(\partial_x) = \sum_{j=0}^d a_j \partial_x^j$ opérateur différentiel $H^d(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Pour $\omega(x) = e^{\nu x}$ poids exponentiel, on note

$$L_\omega^2(\mathbb{R}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \omega u \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

l'espace à poids associé. Alors l'opérateur $T_\omega : L_\omega^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_\omega^2(\mathbb{R})$ de domaine $H_\omega^d(\mathbb{R})$, défini par $T_\omega := \omega^{-1}T\omega$ a pour expression

$$T_\omega = \sum_{j=0}^d \frac{1}{j!} P^{(j)}(\nu) \partial_x^j.$$

En particulier, ν est racine de P avec multiplicité k ssi les k coefficients de plus bas degré de T_ω sont nuls.

Démonstration. C'est un simple calcul. Par la formule de LEIBNIZ on a

$$\omega^{-1}T\omega = \omega^{-1} \sum_{j=0}^d a_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \omega^{(i)} \partial_x^{j-i} = \sum_{j=0}^d a_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \nu^i \partial_x^{j-i} = \sum_{i=0}^d \sum_{j=i}^d a_j \binom{j}{i} \nu^{j-i} \partial_x^i.$$

On a utilisé le fait que $\partial_x^i \omega = \nu^i \omega$, fait le changement de variable $i \leftarrow i - j$ puis inversé les deux sommes. En explicitant $\binom{j}{i}$ on calcule $\binom{j}{i} x^{j-i} = \frac{1}{i!} \partial_x^i (x^j)$, de sorte que $\sum_{j=i}^d a_j \binom{j}{i} \nu^{j-i} = \frac{1}{i!} P^{(i)}(\nu)$. \square

²⁷. Les expressions explicites des d_i sont données par $\frac{1}{2} \left(-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - \frac{c}{\varepsilon\nu}} \right)$

²⁸. Appliquer quatre fois le théorème des valeurs intermédiaires, en utilisant $\tilde{Q}(\nu) = f'(1) - f'(0) < 0$ et $\tilde{Q}(0) = f'(1) < 0$.

Références

- [1] D. ARONSON and H. WEINBERGER. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Advances in Mathematics*, 30(1) :33 – 76, 1978.
- [2] É. BRUNET. *Some aspects of the Fisher-KPP equation and the branching Brownian motion*. Habilitation à diriger des recherches, UPMC, Nov 2016.
- [3] G. FAYE and M. HOLZER. Asymptotic stability of the critical FISHER–KPP front using pointwise estimates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 70(1) :13, Nov 2018.
- [4] R. A. FISHER. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 7(4) :355–369, 1937.
- [5] T. GALLAY. Local stability of critical fronts in nonlinear parabolic partial differential equations. *Nonlinearity*, 7(3) :741–764, 1994.
- [6] P. HOWARD and K. ZUMBRUN. Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves. *Indiana university mathematics journal*, 47(3) :741–871, 1998.
- [7] T. KAPITULA and K. PROMISLOW. *Spectral and dynamical stability of nonlinear waves*. Springer-Verlag New York, 2013.
- [8] A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY, and N. PISKUNOV. Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow university bulletin of mathematics*, 1 :1–25, 01 1937.
- [9] E. RAWASHDEH. A simple method for finding the inverse matrix of VANDERMONDE matrix. 2018.
- [10] V. ROTTSCHÄFER and C. E. WAYNE. Existence and stability of traveling fronts in the extended FISHER-KOLMOGOROV equation. *Journal of Differential Equations*, 176(2) :532–560, Nov 2001.