Stabilité non linéaire d'une onde périodique par modulation de phase

Louis GARÉNAUX*

Résumé

Ceci est un compte rendu du travail que j'ai effectué pour le séminaire de master 2. L'objectif était de travailler sur [1], qui étudie un système d'équations type réaction-diffusion avec un terme non linéaire. Il montre que les solutions en ondes périodiques sont asymptotiquement stables. Les estimations sont obtenues en passant par la transformée de Bloch.

Sommaire

1 Introduction 1

2 Transformée de Bloch 2

3 Hypothèses 3

4 Problème linéaire 4

5 Problème non linéaire 6

1 Introduction

On considère un système d'équations de réaction-diffusion

$$w_t = w_{xx} + f(w),$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une non-linéarité de classe $\mathcal{C}^K$, et w de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$ est l'inconnue. Plus précisément, on s'intéresse à des solutions de cette équation qui sont des ondes périodiques progressives.
Pour $w(t,x)$ une telle solution se déplaçant à vitesse c, notant $u(t,x) \coloneqq w\left(\frac{t}{k_*}, \frac{x-ct}{k_*}\right)$ l'onde stationnaire associée, on a

$$k_* u_t = k_*^2 u_{xx} + f(u) + k_* c u_x. \tag{1}$$

Dans la suite, on se fixe une onde stationnaire $\bar{u}(x) \coloneqq u(t,x)$ dans $H^2_{\mathrm{per}}(0,1)$. On choisit le nombre d'onde k_* de telle sorte que $\bar{u}(x+1) = \bar{u}(x)$.

On souhaite obtenir un résultat d'équilibre asymptotique : étant donné u solution de (1) proche de $\bar{u}$, est-ce qu'en temps long $u(t,\cdot)$ converge vers $\bar{u}$? La démarche naturelle est de s'intéresser tout d'abord au problème linéarisé en $\bar{u}$

$$k_* v_t = k_* L v \coloneqq \left(k_*^2 \partial_{xx} + k_* \partial_x + b\right) v, \tag{2}$$

où $b : x \mapsto df(\bar{u}(x))$ est bornée et périodique, et où $L : L^2 \to L^2$ est un opérateur de domaine dense $\mathrm{Dom}(L) \coloneqq H^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.[1] Cette équation a du sens pour $v(t,\cdot) \in \mathrm{Dom}(L)$.

*Rapport de séminaire sous la direction de Luis-Miguel RODRIGUES

1. Remarquons que $L^* = k_*^2 \partial_{xx} - k_* \partial_x + b$, de domaine $H^2(\mathbb{R})$. De même $L^{**} = L$, ce qui implique que L est un opérateur fermé. Voir [5, Prop 2.34 p. 11]

Si l'opérateur L était à coefficients constants, on trouverait une expression de $v(t,\cdot)$ à partir de $v(0,\cdot)$ en utilisant la transformée de Fourier. Ici, le problème linéarisé (2) est à coefficients périodiques, on introduit un outil similaire pour le résoudre. On espère ensuite pouvoir remonter au non linéaire.

2 Transformée de Bloch

Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{F}g(\xi) \coloneqq \hat{g}(\xi) \coloneqq \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} g(x)\mathrm{d}x$ la transformée de Fourier de g. Pour $\xi \in [-\pi,\pi]$ et $x \in [0,1]$ on note alors

$$\check{g}(\xi,x) \coloneqq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{g}(\xi+2\pi j)e^{i2\pi jx}$$

la transformée de Bloch de g. On la notera aussi $\mathcal{B}g$, elle se prolonge en une fonction périodique en x.

Proposition 1. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\check{g} \in L^2([-\pi,\pi]_\xi \times [0,1]_x)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a la formule d'inversion de Bloch :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}\check{g}(\xi,x)\mathrm{d}\xi. \tag{3}$$

Démonstration. Soit pour commencer $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors par formule d'inversion de Fourier on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\xi+2\pi j)}\hat{g}(\xi+2\pi j)\mathrm{d}\xi.$$

Puisque $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut inverser la somme et l'intégrale, et on reconnaît l'expression voulue. Pour conclure la démonstration, on utilise la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ pour faire converger le côté gauche de l'égalité. On traite de même le côté droit en remarquant qu'une inégalité de Hölder donne $\|\check{g}(\cdot,x)\|_{L^1(-\pi,\pi)} \le \sqrt{2\pi}\,\|\check{g}(\cdot,x)\|_{L^2(-\pi,\pi)}$. □

On peut prolonger la transformée de Bloch en une isométrie $L^2(\mathbb{R}) \to L^2([-\pi,\pi]\times[0,1])$ à constante $\sqrt{2\pi}$ près, en suivant le même plan de démonstration que dans le cas Fourier. L'hypothèse sur $\check{g}$ dans la proposition précédente est donc superflue.

On introduit en même temps que la transformée de Bloch les opérateurs de Floquet. Pour $\xi \in [-\pi,\pi]$ on note[2]

$$L_\xi g \coloneqq e^{-i\xi x}L(e^{i\xi x}g).$$

C'est un opérateur $L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ de domaine $H^2_{\mathrm{per}}(0,1)$.[3] Un calcul direct permet d'établir qu'à ξ fixé on a

$$L_\xi = k_*^2(i\xi+\partial_x)^2 + k_*(i\xi+\partial_x) + b(x).$$

Proposition 2. Soit $\xi \in [-\pi,\pi]$ fixé. Alors pour $g \in \mathrm{Dom}(L)$ on a

$$\mathcal{B}(Lg)(\xi,x) = L_\xi(\check{g}(\xi,\cdot))(x)$$

Démonstration. Pour $L = \partial_x$, un calcul simple permet de conclure.
Pour $L = b$, le côté droit de l'égalité s'écrit $e^{-i\xi x}b(x)e^{i\xi x}\check{g}(\xi,x) = b(x)\check{g}(\xi,x)$. On développe le côté gauche

$$\mathcal{B}(bg)(\xi,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{gb}(\xi+2\pi j)e^{i2\pi jx} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{b}_n\,\mathcal{F}(g\,e^{i2\pi n\cdot})(\xi+2\pi j)e^{i2\pi jx},$$

où $\hat{b}_n$ est le n-ème coefficient de Fourier de la fonction périodique b. On l'écrit

$$\mathcal{B}(bg)(\xi,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{b}_n\,\hat{g}(\xi+2\pi j-2\pi n)e^{i2\pi jx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{b}_n e^{i2\pi nx}\times\check{g}(\xi-2\pi n,x)e^{-i2\pi nx}.$$

2. Ici on voit L comme un opérateur défini sur $H^2(0,1)$.
3. $H^2_{\mathrm{per}}(0,1) \coloneqq \{g \in H^2(0,1) \mid g(0)=g(1), g'(0)=g'(1)\}$

Un changement de variable discret donne $\breve{g}(\xi - 2\pi n, x)e^{-i2\pi n x} = \breve{g}(\xi, x)$ que l'on peut sortir de la somme pour obtenir $\mathcal{B}(bg)(\xi, x) = b(x)\breve{g}(\xi, x)$. $\square$

Proposition 3. On note $\left(e^{tL}\right)_t$ le semi-groupe dont L est le générateur. Alors on a

$$\mathcal{B}(e^{tL}g)(\xi, x) = (e^{tL_\xi}\breve{g}(\xi, \cdot))(x).$$

Démonstration. On admet qu'on peut définir les semi-groupes associés à L et aux L_ξ.
Pour ξ fixé, il existe une unique solution de $v_t = L_\xi v$ avec condition initiale $v(0, x) = \breve{g}(\xi, x)$. Or d'après la proposition précédente, on a

$$\partial_t \mathcal{B}\left(e^{tL}g\right) = \mathcal{B}\left(\partial_t e^{tL}g\right) = \mathcal{B}(Le^{tL}g) = L_\xi \mathcal{B}\left(e^{tL}g\right).$$

$\square$

Ce qui précède nous assure que la solution de l'équation (2) s'écrit après inversion de Bloch

$$(S(t)g)(x) \coloneqq \left(e^{tL}g\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} e^{tL_\xi}\breve{g}(\xi, \cdot)(x)\mathrm{d}\xi. \tag{4}$$

Faisons un rapide parallèle avec le cas plus simple où L serait à coefficients constants. On aurait remplacé la transformée de Bloch par celle de Fourier, pour obtenir une expression similaire à (4).

$$S(t)g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}(e^{t\ell}\hat{g})(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{5}$$

où $\ell \coloneqq \mathcal{F}L$ est le symbole obtenu après passage en Fourier. Dans des cas simples comme l'équation de la chaleur, on sait calculer la transformée de Fourier inverse de $e^{t\ell} = e^{-t\xi^2}$, et donc expliciter l'intégrale dans (5).

3 Hypothèses

Variété des équilibres Un problème à envisager est que notre équilibre $\bar{u}$ n'est pas isolé. Dans ce cas, une perturbation $u(t, x)$ peut elle-même être un équilibre, qui ne convergera pas vers $\bar{u}$. Par un décompte de degrés de liberté, [4] on devine que l'ensemble des ondes stationnaires est de dimension 2, paramétré par un déphasage et une vitesse de propagation. Plus clairement, on suppose que notre problème satisfait aux hypothèses suivantes. [5]

(*H1*) La non-linéarité f est de classe $\mathcal{C}^K$ avec $K \geq 3$,

(*H2*) Quitte à translater en espace, l'ensemble des ondes stationnaires solutions de (1) (où k_* est remplacé par k pour conserver une période 1) est une variété lisse de dimension 1 paramétrée par k : $M = \{\bar{u}^k\}$ avec $\bar{u}^{k_*} = \bar{u}$. On note $c(k)$ la vitesse de l'onde progressive associée à $\bar{u}^k$.

Cette deuxième hypothèse va donc contraindre notre manière de décrire comment $\bar{u}$ est « asymptotiquement stable ».

Spectre de L et des L_ξ Une autre question importante est celle du spectre de L. Ici, il est à coefficients périodiques et la théorie de Floquet montre que son spectre est essentiel. Si on pouvait construire une fonction propre de L dans L^2, elle serait soit de norme constante (cas d'une partie réelle nulle), soit exploserait en $\pm\infty$. Voir [3, p. 67].
Au contraire, les L_ξ ont des spectres discrets puisqu'ils sont à résolvante compacte. [6]
De plus, on a [7]

$$\sigma(L) = \bigcup_{\xi \in [-\pi, \pi]} \sigma(L_\xi). \tag{6}$$

4. L'équation (2) ainsi que la périodicité de $\bar{u}$, voir [2].
5. Voir aussi [3, p. 86], même si l'opérateur considéré n'est pas périodique mais asymptotiquement constant.
6. L'injection $(H^2_{\mathrm{per}}(0,1), \|.\|_{L_\xi}) \to (L^2(0,1), \|.\|_{L^2})$ est compacte par théorème de Rellich.
7. Voir [3, pp. 69 et 240].

On peut donc écrire $\sigma(L)$ comme une union au plus dénombrable de courbes paramétrées par ξ.

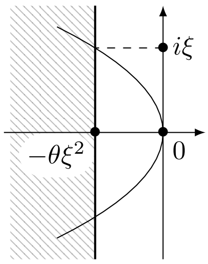
Pour qu'une solution de $v_t = Lv$ décroisse en temps long, il est donc naturel vu l'expression intégrale (4) de supposer que le spectre de L_ξ soit de partie réelle strictement négative. D'après (6), il faut que ce soit aussi le cas du spectre de L. Malheureusement, dériver (1) par rapport à x montre que $\bar{u}'$ est une fonction propre de L_0 pour la valeur propre 0.

On suppose donc les hypothèses suivantes de *stabilité spectrale de diffusion* vérifiées.

(*D1*) $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda < 0\} \cup \{0\}$,

(*D2*) Il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $\xi \in [-\pi, \pi]$ on ait $\sigma(L_\xi) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda \leq -\theta\xi^2\right\}$,

(*D3*) $\lambda = 0$ est valeur propre simple de L_0.



L'hypothèse (*D2*) assure que les courbes qui composent le spectre de L sont décollées de $i\mathbb{R}^*$.
L'hypothèse (*D3*) permet de contrôler la situation en 0.

Valeurs propres, fonctions propres On a déjà vu que L_0 admet $\lambda(0) \coloneqq 0$ comme valeur propre simple, de fonction propre $\phi(0, \cdot) \coloneqq \bar{u}'$. On admet qu'on peut définir $\lambda(\xi)$ et $\phi(\xi, \cdot)$, valeurs et fonctions propres de L_ξ, analytiques en ξ au voisinage de 0. Voir [4]. On note $[-\xi_0, \xi_0]$ un tel voisinage.

4 Problème linéaire

On décompose l'opérateur de solution à l'aide d'une fonction plateau α, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\alpha(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq \frac{\xi_0}{2}$ et $\alpha(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq \xi_0$. On commence par noter

$$S^{\mathrm{p}} \coloneqq \bar{u}' s^{\mathrm{p}}(t) \qquad \text{où} \qquad s^{\mathrm{p}}(t)g(x) \coloneqq \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}\alpha(\xi)e^{\lambda(\xi)t}\langle\tilde{\phi}(\xi, \cdot), \check{g}(\xi, \cdot)\rangle_{L^2(0,1)}\mathrm{d}\xi,$$

où $\tilde{\phi}$ est choisi tel que $\Pi^{\mathrm{p}}(\xi)\check{g}(\xi, \cdot) \coloneqq \phi(\xi, \cdot)\langle\tilde{\phi}(\xi, \cdot), \check{g}(\xi, \cdot)\rangle_{L^2(0,1)}$ soit la projection sur l'espace propre $\operatorname{Vect}\{\phi(\xi, \cdot)\}$.

On note ensuite $\tilde{S}(t)$ le terme correctif de sorte qu'on ait

$$2\pi S(t) = S^{\mathrm{p}}(t) + \tilde{S}(t).$$

On décompose ce deuxième terme en trois parties :

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t)g(x) \coloneqq \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}(1 - \alpha(\xi))\left(e^{tL_\xi}\check{g}(\xi, \cdot)\right)(x)\mathrm{d}\xi + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}\alpha(\xi)\left(e^{tL_\xi}\tilde{\Pi}(\xi)\check{g}(\xi, \cdot)\right)(x)\mathrm{d}\xi \\ + \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x}\alpha(\xi)e^{\lambda(\xi)t}\left(\phi(\xi, x) - \phi(0, x)\right)\langle\tilde{\phi}(\xi, \cdot), \check{g}(\xi, \cdot)\rangle_{L^2(0,1)}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

où on a noté $\tilde{\Pi}(\xi) \coloneqq \mathrm{id} - \Pi(\xi)$ la projection parallèlement à l'espace propre. Remarquons que la troisième partie a permis de faire apparaître un $\bar{u}'$ dans S^{p}.

On va traiter différemment chacun de ces deux termes pour établir les majorations qui nous intéressent.

Proposition 4 – Inégalité de Hausdorff-Young généralisée. Soit $p \in [2, +\infty]$, et q son exposant conjugué. On note $C = (2\pi)^{-\frac{1}{q}}$. Alors pour tout $u \in L^p(\mathbb{R})$ on a $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\,\|\check{u}\|_{L^q([-\pi,\pi],L^p(0,1))}$.

En particulier pour $g(\xi,\cdot)$ fonction 1-périodique, on a

$$\left\|\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\xi x} g(\xi,\cdot)\mathrm{d}\xi\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\,\|g\|_{L^q([-\pi,\pi],L^p(0,1))}.$$

Démonstration. Rappelons qu'on note

$$\|\check{u}\|_{L^q([-\pi,\pi],L^p(0,1))} := \left(\int_{-\pi}^{\pi} \|\check{u}(\xi,\cdot)\|_{L^p(0,1)}^q\,\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Il suffit de montrer le résultat pour $p=2$ et $p=\infty$ pour conclure par convexité. [8]
Pour $p=\infty$, une inégalité de Hölder appliquée à la formule d'inversion de Bloch (3) donne $2\pi\,\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|\check{u}\|_{L^1([-\pi,\pi],L^\infty(0,1))}$.
Pour $p=2$, on a égalité : comme rappelé plus haut, la transformée de Bloch est une isométrie de L^2 à constante $\sqrt{2\pi}$ près. [9]

Pour la deuxième inégalité, on remarque que par inversion de Bloch il existe $u\in L^2(\mathbb{R})$ tel que $g=\check{u}$, auquel on applique la première inégalité. □

Dans ce qui suit, on note $a\lesssim b$ s'il existe une constante C telle que pour tout $x\in \mathrm{Dom}(a)\cap \mathrm{Dom}(b)$, on ait $a(x)\le C\,b(x)$.

Proposition 5. Sous les hypothèses *(H1)*-*(H2)* et *(D1)*-*(D3)*, pour $t>0$, $p\in[2,\infty]$ et notant q l'exposant conjugué on a

$$\|\partial_x^l\partial_t^m s^{\mathrm{p}}(t)\partial_x^r g\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \min\left\{\begin{array}{l}(1+t)^{-\frac{1}{2q}-\frac{l+m+r}{2}}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ (1+t)^{-\frac{1}{2q}+\frac{1}{4}-\frac{l+m+r}{2}}\,\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\end{array}\right. . \tag{7}$$

De plus il existe $\eta>0$ tel que pour $r, l+2m\in[\![0,K+1]\!]$ on ait

$$\left\|\partial_x^l\partial_t^m \tilde{S}(t)\partial_x^r g\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim \min\left\{\begin{array}{l}(1+t)^{-\frac{1}{2q}-\frac{l+m}{2}}\,\|g\|_{L^1(\mathbb{R})\cap H^{l+2m+1}(\mathbb{R})}\\ e^{-\eta t}\,\|\partial_x^r g\|_{H^{l+2m+1}(\mathbb{R})} + (1+t)^{-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2}-\frac{l+m}{2}}\,\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\end{array}\right. . \tag{8}$$

Démonstration – [1].
1. Démonstration de (7)(i). On commence par le cas $l=m=r=0$. En développant $\check{g}$ on trouve

$$\begin{aligned}\left(s^{\mathrm{p}}(t)g\right)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}\alpha(\xi)e^{t\lambda(\xi)}e^{i\xi x}\langle\tilde{\phi}(\xi),\check{g}(\xi)\rangle_{L^2(0,1)}\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha(\xi)e^{t\lambda(\xi)}e^{i\xi x}\hat{g}(\xi+2\pi j)\langle\tilde{\phi}(\xi,\cdot),e^{i2\pi j\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha(\xi)e^{t\lambda(\xi)}e^{i\xi x}\hat{g}(\xi+2\pi j)\hat{\tilde{\phi}}_j(\xi)^*\mathrm{d}\xi,\end{aligned} \tag{9}$$

où on a noté $\hat{\tilde{\phi}}_j(\xi)$ le j-ème coefficient de Fourier de la fonction périodique $\tilde{\phi}(\xi,\cdot)$, et où $z^*:=\bar{z}$ est la conjugaison complexe.
Par formule d'inversion de Fourier $\|\hat{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\lesssim\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$, et par *(D2)* il existe $\eta>0$ tel que $\left|e^{t\lambda(\xi)}\alpha(\xi)^{1/2}\right|\le e^{-\eta t\xi^2}$. De plus par Cauchy-Schwarz

$$\alpha(\xi)^{1/2}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\tilde{\phi}}_j(\xi)| \le \alpha(\xi)^{1/2}\left(\sum_j(1+|j|^2)|\hat{\tilde{\phi}}_j(\xi)|^2\sum_j(1+|j|^2)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \alpha(\xi)^{1/2}\|\tilde{\phi}(\xi)\|_{H^1(0,1)}.$$

On applique l'inégalité de Hausdorff-Young (4) à l'expression (9), puis les trois majorations précé-

8. On applique le théorème de Riesz-Thorin.
9. Se démontre en suivant la preuve du théorème de Plancherel.

dentes pour obtenir

$$
\begin{aligned}
\|s^{\mathrm{p}}(t)g\|_{L^p(\mathbb{R})} &\lesssim \|\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha(\xi)e^{t\lambda(\xi)}e^{i\xi x}\hat{g}(\xi+2\pi j)\hat{\tilde{\phi}}_j(\xi)^*\|_{L^q([-\pi,\pi],L^p(0,1))} \\
&\lesssim \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\|e^{-t\eta\xi^2}\|_{L^q([-\pi,\pi]_\xi)} \sup_{|\xi|\le\xi_0}\|\tilde{\phi}(\xi,\cdot)\|_{H^1(0,1)}. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

On a majoré grossièrement l'intégrale en x par 1, et on fait porter celle en ξ sur l'exponentielle.

Finalement, une majoration grossière ainsi que le changement de variable $u = t^{1/2}\xi$ donnent

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-\eta\xi^2 t}\right)^q \mathrm{d}\xi \lesssim \min(1, t^{-1/2}),
$$

que l'on réinjecte dans (10) pour obtenir

$$
\|s^{\mathrm{p}}(t)g\|_{L^p(\mathbb{R})} \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2q}}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.
$$

Dans le cas où $r \neq 0$, on transforme dans (9) le $\mathcal{F}(\partial_x^r g)$ en $(i\xi)^r\hat{g}$. De même si $l, m \neq 0$, on voit sur l'expression (9) que $\partial_x^l\partial_t^m$ ne fait apparaître qu'un $\lambda(\xi)^m(i\xi)^l$. On utilise plutôt la majoration $\left|\xi^{r+l}\lambda(\xi)^m e^{t\lambda(\xi)}\alpha(\xi)^{1/2}\right| \lesssim |\xi|^{l+m+r}e^{-\eta t\xi^2}$, et le même changement de variable que précédemment donne $\|\,|\xi|^{l+m+r}e^{-\eta t\xi^2}\|_{L^q(-\pi,\pi)} \lesssim \min\left(1, t^{-\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}(l+m+r)}\right)$.

2. Démonstration de (7)(ii). On suit le même schéma de preuve. Pour $l = m = r = 0$ Hausdorff-Young (4) fourni

$$
\begin{aligned}
\|(s^{\mathrm{p}}(t)g)(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\lesssim \|\alpha(\xi)e^{-\eta t\xi^2}\,|\langle\tilde{\phi}(\xi),\check{g}(\xi)\rangle_{L^2(0,1)}|\,\|_{L^q([-\pi,\pi],L^p(0,1))} \\
&\lesssim \|e^{-\eta t\xi^2}\,|\langle\tilde{\phi}(\xi),\check{g}(\xi)\rangle_{L^2(0,1)}|\,\|_{L^q(-\pi,\pi)} \\
&\lesssim \|e^{-\eta t\xi^2}\,\|\check{g}(\xi)\|_{L^2(0,1)}\|_{L^q(-\pi,\pi)} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

par Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire. On force l'apparition de $\|\check{g}\|_{L^2([-\pi,\pi],L^2(0,1))} \lesssim \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$ en choisissant $r_1 \geq 1$ tel que $qr_1 = 2$. Pour r_2 tel que $1/r_1 + 1/r_2 = 1$ on a $r_2 q = \frac{2q}{2-q}$ et par Hölder

$$
\begin{aligned}
\|(s^{\mathrm{p}}(t)g)(x)\|_{L^p(\mathbb{R})} &\lesssim \|e^{-\eta t\xi^2}\|_{L^{r_2 q}(-\pi,\pi)}\|\check{g}\|_{L^{r_1 q}([-\pi,\pi],L^2(0,1))} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2r_2 q}}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2q}+\frac{1}{4}}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Pour les cas où $l, m, r \neq 0$, on procède comme dans l'étape précédente.

3. Les démonstration de (8)(i) et (8)(ii) sont détaillées dans [1]. □

Cette proposition contrôle les perturbations du problème linéaire. Comme dit précédemment, on veut regarder une solution de (1) à déphasage près. Pour pouvoir remonter au problème non linéaire, on doit aussi majorer les perturbations en déphasage. Sont obtenues dans [1] des majorations de $\|S(t)(\psi_0\bar{u}')\|_{L^p(\mathbb{R})}$ par des termes de la forme $h(t)\|\partial_x\psi_0\|_X$, où h tend vers 0 en temps long.

5 Problème non linéaire

Soit $\tilde{u}(t,x)$ solution de (1), perturbation de $\bar{u}$. On se fixe un déphasage $\psi(t,x)$ et on note

$$
u(t,x) := \tilde{u}(t, x-\psi(t,x)), \qquad \text{puis} \qquad v(t,x) := u(t,x) - \bar{u}(x) \qquad (12)
$$

l'erreur non linéaire associée. On mesure donc l'écart entre $\tilde{u}$ et $\bar{u}$ en déphasant $\tilde{u}$. Ce choix permet d'obtenir le résultat qui suit.

Proposition 6. Avec les notations (12), l'erreur non linéaire v vérifie

$$k_*(\partial_t - L)(v + \psi \bar{u}') = k_* \mathcal{N},$$

où le terme quadratique $k_*\mathcal{N} \coloneqq \mathcal{Q} + \mathcal{R}_x + (k_*\partial_t + k_*^2\partial_{xx})\mathcal{S} + \mathcal{T}$ est défini par

$$\mathcal{Q} \coloneqq f(v+\bar{u}) - f(\bar{u}) - df(\bar{u})v, \qquad \mathcal{R} \coloneqq -k_* v\psi_t - k_*^2 v\psi_{xx} + k_*^2(\bar{u}' + v_x)\frac{\psi_x^2}{1-\psi_x},$$
$$\mathcal{S} \coloneqq v\psi_x, \qquad \mathcal{T} \coloneqq -(f(v+\bar{u}) - f(\bar{u}))\psi_x.$$

Pour conclure sur le théorème 7, on a besoin de faire décroître $\mathcal{N}$. Si on choisi de déphaser $\bar{u}$, on fait apparaître dans $\mathcal{N}$ des termes contenant le déphasage ψ, qu'on ne peut pas faire tendre vers 0. Le choix de déphaser u ne fait apparaître que des dérivées de ψ. Par des majoration non linéaires, il est possible de les faire tendre vers 0 en temps long.

L'étude linéaire permet de contrôler $v + \psi\bar{u}'$. Un choix judicieux de ψ, puis les majorations linéaires et non linéaires permettent de construire globalement la solution u et le déphasage ψ. On obtient à terme le théorème suivant.

Théorème 7. On suppose que *(H1)*-*(H2)* et *(D1)*-*(D3)* sont vérifiées. Soit $\tilde{u}_0$ et ψ_0 conditions initiales telles que

$$E_0 \coloneqq \|\tilde{u}_0(\cdot - \psi_0(\cdot)) - \bar{u}(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})\cap H^K(\mathbb{R})} + \|\partial_x\psi_0\|_{L^1(\mathbb{R})\cap H^K(\mathbb{R})}$$

soit suffisamment petit. Alors il existe $\tilde{u}(t,x)$ solution globale de (1) et un déphasage $\psi(t,x)$, de conditions initiales respectives $\tilde{u}_0$ et ψ_0, tels que pour $p \in [2,\infty]$ et $t > 0$ on ait

$$\|\tilde{u}(t,\cdot - \psi(t,\cdot)) - \bar{u}(\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \|\nabla_{t,x}\psi(t,\cdot)\|_{W^{K+1,p}(\mathbb{R})} \lesssim E_0(1+t)^{-\frac{1}{2q}},$$
$$\|\tilde{u}(t,\cdot - \psi(t,\cdot)) - \bar{u}(\cdot)\|_{H^K(\mathbb{R})} \lesssim E_0(1+t)^{-\frac{1}{4}},$$

où q est l'exposant conjugué de p, et

$$\|\tilde{u}(t,\cdot) - \bar{u}(\cdot)\|_{L^\infty}, \quad \|\psi(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lesssim E_0.$$

En particulier, $\bar{u}$ est $L^\infty(\mathbb{R})$-stable par rapport à une perturbation initiale $v_0 \coloneqq \tilde{u}_0 - \bar{u}$ telle que $\|v_0\|_E \coloneqq \inf_{\partial_x h_0 \in L^1(\mathbb{R})\cap H^K(\mathbb{R})} E_0$ soit suffisamment petite.

Références

[1] M. A. Jonhson, P. Noble, L. M. Rodrigues, and K. Zumbrun. Nonlinear stablity of periodic reaction diffusion waves : nonlinear stability. 2012.

[2] M. A. Jonhson and K. Zumbrun. Nonlinear stability of spatially-periodic traveling-wave solutions of systems of reaction-diffusion equations.

[3] T. Kapitula and K. Promislow. *Spectral and dynamical stability of nonlinear waves.* Springer-Verlag New York, 2013.

[4] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* Springer, 1995.

[5] N. Raymond. Notes de cours : Element of spectral theory. https://nraymond.perso.math.cnrs.fr/spectral-theory.pdf.