Suites réelles

1 Définition

Définition 1. Une **suite** est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème terme de la suite. La suite u est généralement noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n). Attention, il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_n qui est le n-ème terme de la suite et qui est un réel.

Exemple 1. On peut définir les suites $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Définition 2 (Suite majorée, minorée, bornée)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée, c'est à dire si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Définition 3 (Suite croissante, décroissante)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement croissante** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 1.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Il est donc utile d'étudier cette différence pour préciser la monotonie.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positif, elle est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. Il est donc utile d'étudier ce quotient pour préciser la monotonie de suites strictement positive.

Exercice 1.
1. La suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Est-elle bornée ?
2. La suite $\left(\frac{n\sin(n!)}{1+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ?
3. Réécrire les phrases suivantes en une phrase mathématique. Ecrire ensuite la négation mathématique de chacune des phrases.
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 7.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas strictement croissante.
4. Est-il vrai qu'une suite croissante est minorée ? Majorée ?
5. Soit $x > 0$ un réel. Montrer que la suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

2 Limites

2.1 Définitions

Définition 4 (Limite finie)**.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour **limite** $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } |u_n - l| \leq \epsilon$$

Définition 5 (Limite infinie)**.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour **limite** $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } u_n \geq A$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour **limite** $-\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \text{ on a } u_n < -A$$

Remarque 2.
- Noter que le choix de N dans les définition dépend de ϵ ou A.
- On note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Définition 6. Une suite est **convergente** si elle admet une limite finie. Elle est **divergeante** sinon, c'est à dire soit la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou bien elle n'admet pas de limite.

Proposition 1

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Démonstration : Supposont que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux limites l_1 et l_2, on peut supposer $l_1 < l_2$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \frac{l_2-l_1}{2}$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_1$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $l_1 - \epsilon \leq u_n \leq l_1 + \epsilon$. De même, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l_2$, donc il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $l_2 - \epsilon \leq u_n \leq l_2 + \epsilon$.

Notons $N = \max(N_1, N2)$, on a alors pour ce N :

$$l_1 - \epsilon \leq u_N \leq l_1 + \epsilon \text{ et } l_2 - \epsilon \leq u_N \leq l_2 + \epsilon$$

Ainsi

$$u_N \leq l_1 + \epsilon < \frac{l_1 + l_2}{2} < l_2 - \epsilon \leq u_N$$

On en déduit une contradiction. ■

Proposition 2

Une suite est divergente s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n_1 \geq N$ et $n_2 \geq N$ tels que $|u_{n_1} - u_{n_2}| \geq A$.

2.2 Propriétés sur les limites

Proposition 3

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n\to\infty} u_n - l = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |u_n - l| = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |l|$

Exercice 2.
1. Utiliser la définition pour montrer les équivalence et implications ci-dessus.
2. Est ce que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |l| \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$?

Proposition 4

Toute suite convergente est bornée.

Exercice 3.
1. Utiliser la définition pour montrer la propriété.
2. Est ce que la réciproque est vraie ?

Proposition 5

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \times v_n) = 0$.

Exercice 4.
1. Utiliser la définition pour montrer la propriété.
2. Est ce que la réciproque est vraie ?

Proposition 6 ***(Opérations sur les limites)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda l$.*
2. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l'$ alors*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$$

3. *Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ où $l \in \mathbb{R}$ et $l \neq 0$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.*

Proposition 7 ***(Opérations sur les limites)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = 0$.
2. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée alors* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.
3. *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est minorée par* $\lambda > 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \times v_n) = +\infty$.
4. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *et* $u_n > 0$ *pour* n *assez grand alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

2.3 Formes indéterminées

Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite, il faut faire une étude au cas par cas.

"$+\infty - \infty$" : cela signifie si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, il faut faire une étude au cas par cas pour déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n$ comme le prouve les exemples suivants :
- $\lim\limits_{n\to\infty} e^n - \ln(n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n - n^2 = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) - n = 0$

"$0 \times \infty$" :
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \times e^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \ln(n) = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times (n+1) = 0$

"$\frac{\infty}{\infty}$","$\frac{0}{0}$","1^∞...

2.4 Limite et inégalités

Théorème 8

1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites convergentes telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. *Alors*
$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$
2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites telles que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. *Alors*
$$\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$$
3. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *trois suites telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$.

3 Théorèmes de convergence

Théorème 9

Toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Définition 7. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si
1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$.

Théorème 10

Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.*

4 Suite géométrique

4.1 Limite

Proposition 11

On fixe un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = a^n$.

1. *Si $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.*
2. *Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.*
3. *Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*
4. *Si $a \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Exercice 5.

1. Montrer 1 par récurrence.
2. Soit $a = 1 + b$ avec $b > 0$. Montrer que $a^n \geq 1 + nb$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le deuxième point.
3. En posant $b = \frac{1}{a}$, montrer 3.
4. Montrer que si $a \leq -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

4.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 12

Soit a un réel, $a \neq 1$. En notant $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Exercice 6. Pour montrer l'égalité, multiplier $\sum_{k=0}^{n} a^k$ par $1 - a$.

4.3 Suites telles que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l < 1$

Proposition 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel l tel que pour tout entier n à partir d'un certain rang on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l < 1.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Exercice 7.

1. Montrer que $\frac{u_n}{u_0} \leq l^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la proposition.
2. Utiliser le résultat pour montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$.
3. Utiliser le résultat pour montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Quelques corrections sur :

https://www.math.univ-toulouse.fr/∼msablik/enseignement.html

Langage mathématique (Solutions)

Correction 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel l. En appliquant la définition avec $\epsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a $l - 1 \leq u_n \leq l + 1$ et donc $|u_n| \leq |l| + 1$. On pose $M = \max(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}, |l| + 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $|u_n| \leq M$.
2. La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 1 mais elle n'a pas de limite.

Correction 4