Université Paul Sabatier Année 2024-2025
TD Math-Base **feuille n°** 3.1

Fonctions I : Limites et continuité

1 Notion de fonction

Définition 1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

Définition 2 (Opérations sur les fonctions)**.** Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut définir les fonctions suivantes :
— le **somme** de f et g est la fonction $f + g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$.
— le **produit** de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$.
— la **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda.f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$ pour tout $x \in U$.

Définition 3 (Majoration et minoration)**.** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
— f est **constante** sur U si $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $f(x) = a$.
— f est **majorée** sur U si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $f(x) \leq M$.
— f est **minorée** sur U si $\exists m \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $f(x) \geq M$.
— f est **bornée** sur U si $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $|f(x)| \leq M$.

Définition 4 (Fonctions monotones)**.** Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
— f est **croissante** sur U si $\forall x, y \in U$, $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
— f est **strictement croissante** sur U si $\forall x, y \in U$, $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
— f est **décroissante** sur U si $\forall x, y \in U$, $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
— f est **strictement décroissante** sur U si $\forall x, y \in U$, $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
— f est **monotone** sur U si elle est croissante ou décroissante.

Définition 5 (Parité)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $]-a, a[$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
— f est **paire** si $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$.
— f est **impaire** si $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition 6 (Parité)**.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $T \in \mathbb{R}$. La fonction f est **périodique** de période T si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$.

Exercice 1. Donner des exemples de fonction pour toutes ces définitions.

Exercice 2.
1. Soit $U =]-\infty, 0[$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. La fonction f est elle monotone ? Et si $U =]0, +\infty[$? Et si $U =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$?
2. Pour deux fonctions paires que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ?et de la composée ? Et pour deux fonctions impaires ? Et si l'une est paire et l'autre impaire ?
3. On note $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière de x. On note $\mathrm{frac}(x) = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x. Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \mathrm{frac}(x)$ et montrer quelle est périodique.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $|f|$ est majorée par $\frac{1}{2}$, étudier les variations de f (sans utiliser de dérivée) et tracer son graphe.
5. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(\pi f(x))$, où f est définie à la question précédente. Déduire de l'étude de f les variations, la parité, la périodicité de g et tracer son graphe.

2 Limites

2.1 Définition de limite

Définition 7 (Limite en un point)**.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ soit $x_0 \in I$ ou une de ces extrémités.

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f **a pour limite** l **en** x_0 si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

— On dit que f **a pour limite** $+\infty$ **en** x_0 si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq A$$

— On dit que f **a pour limite** $-\infty$ **en** x_0 si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq -A$$

Exercice 3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition, montrer que

$$x \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0, \qquad x^2 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0^2, \qquad \frac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Définition 8 (Limite en $+\infty$)**.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I = [a, +\infty[$.

— Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f **a pour limite** l **en** $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq B \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

— On dit que f **a pour limite** $+\infty$ **en** $+\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A$$

— On dit que f **a pour limite** $-\infty$ **en** $+\infty$ si

$$\forall A > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq B \Longrightarrow f(x) \leq -A$$

Exercice 4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En utilisant la définition, montrer que

$$x^2 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad 1 - \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Montrer que $x \longmapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Définition 9 (Limite à gauche et à droite)**.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I = [a, x_0[\cup]x_0, b]$.

— On appelle **limite à droite** en x_0 de f la limite de la fonction f restreinte à $]x_0, b]$.

— On appelle **limite à gauche** en x_0 de f la limite de la fonction f restreinte à $[a, x_0[$.

On le note respectivement

$$\lim_{\substack{x > x_0 \\ x \to x_0}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x < x_0 \\ x \to x_0}} f(x)$$

Exercice 5.

1. Etudier les limite à gauche et à droite de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en 0.
2. Etudier les limite à gauche et à droite de $x \longmapsto E(x)$ en $x_0 \in \mathbb{Z}$ (on rappelle que E est la fonction partie entière).

2.2 Propriétés

Proposition 1

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 2

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$. Si $\lim_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = l' \in \mathbb{R}$, alors

- $\lim_{x_0} \lambda.f = \lambda.l$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x_0} f + g = l + l'$.
- $\lim_{x_0} f \times g = l \times l'$.
- *si* $l \neq 0$ *alors* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$.

Proposition 3

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$.

- *Si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *et g minorée alors* $\lim_{x_0} f + g = +\infty$.
- *Si* $\lim_{x_0} f = -\infty$ *et g majorée alors* $\lim_{x_0} f + g = -\infty$.
- *Si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *et* $g \geq \alpha > 0$ *alors* $\lim_{x_0} f \times g = +\infty$.
- *Si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *et* $\lambda > 0$ *alors* $\lim_{x_0} \lambda f = +\infty$.
- *Si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *et* $\lambda < 0$ *alors* $\lim_{x_0} \lambda f = -\infty$.
- *Si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *ou* $-\infty$ *alors* $\lim_{x_0} \lambda \frac{1}{f} = 0$.

Proposition 4

Si $\lim_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_l g = l' \in \mathbb{R}$, *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = l' \in \mathbb{R}$.

Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $lim_{x_0} f = +\infty$ et $\lim_{x_0} g = -\infty$ alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f + g$ (cela dépend vraiment de f et de g). On raccourci cela en $+\infty - \infty$ est une forme indéterminée.

Voici une liste de formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; ∞^0.

Exemple 1. On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Proposition 5 ***Limite et inégalité***

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$.

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = l' \in \mathbb{R}$ *alors* $l \leq l'$.
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = +\infty$ *alors* $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- *Si* $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim_{x_0} f = l = \lim_{x_0} h$ *alors* $\lim_{x_0} g = l$.

Exercice 6.

1. Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{2x^2-x-2}{3x^2+2x+2}$ en 0 et en $+\infty$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
3. Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
4. Déteminer, si elle existe, $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ et $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

3 Continuité en un point

3.1 Definition

Définition 10. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si f admet une limite en x_0 et cette limite est $f(x_0)$. Autrement dit si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

Exemple 2. Les fonctions suivantes sont continues :
- les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$;
- les fonctions polynôme sur $\mathbb{R}$;
- le fonction racine carré sur $[0, +\infty[$;
- les fonctions sin, cos sur $\mathbb{R}$;
- la fonction $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$;
- la fonction $x \mapsto \exp(x)$ sur $\mathbb{R}$;
- la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$;

3.2 Propriétés

Proposition 6

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
- *$\lambda.f$ est continue en x_0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *$f + g$ est continue en x_0.*
- *$f \times g$ est continue en x_0.*
- *si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Proposition 7

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et g est continue en un point $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple 3. Les propositions précédentes permettent de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues : les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$, les polynômes sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes), les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas, $x \mapsto \sin(P(x))$ sur $\mathbb{R}$ ou P est un polynôme...

3.3 Prolongement par continuité

Définition 11. Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f **est prolongeante par continuité en** x_0 si f admet une limite finie en x_0 noté $l = \lim_{x_0} f$. On définit alors le prolongement par continuité par $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Exercice 7. Donner le prolongement par continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

3.4 Suites et continuité

Proposition 8

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. La fonction f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration : $\Longrightarrow$On suppose f continue en x_0 est que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers x_0. On veut montrer que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

Pour ce δ, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq N \Longrightarrow |u_n - x_0| \leq \delta.$$

On en déduit que pour tout $n \geq N$, comme $|u_n - x_0| \leq \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Comme c'est vrai pour tout ϵ, on peut conclure que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

$\underline{\Longleftarrow}$ On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0.

Par hypothèse, f n'est pas continue en x_0. Donc

$$\exists \epsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_\delta \text{ tel que } |x_\delta - x_0| \leq \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon_0$$

On construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion suivante $\delta = \frac{1}{n}$ et on obtient un u_n (qui correspond à $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - f(x_0)| > \epsilon_0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x_0 mais la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$. ■

Remarque 1. On retiendra surtout l'implication : si f est continue sur I et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite l, alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. On l'utilisera intensivement pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$. Dans ce cas, si f est continue et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, alors $f(l) = l$.

Exercice 8. Soit la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

4 Applications de la continuité

4.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 9

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration : On se place dans le cas où $f(a) < f(b)$ et on choisit y tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$.

Soit $A = \{x \in [a,b] : f(x) \leq y\}$. Comme $a \in A$, $A \neq \emptyset$, de plus A est majoré par b. On en déduit que A admet une borne supérieure noté $c = \sup A$. On va montrer que $f(c) = y$.

Montrons que $f(c) \leq y$: Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = c$. Par continuité de f, on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(c)$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in A$ donc $f(u_n) \leq y$. Par passage à la limite, on obtient que $f(c) \leq y$.

Montrons que $f(c) \geq y$: Si $c = b$, on a terminer car $y \leq f(b)$. Sinon pour $x \in]c,b]$, on a $f(x) > y$ car sinon $x \in A$ ce qui est contradictoire avec le fait que $x > c$. Or f est continue en c, donc la limite à droite de f en c est $f(c)$ et doit être supérieur à y. Donc $f(c) \geq y$. ■

Corollaire 10

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a,b[$ tels que $f(c) = 0$.

Corollaire 11

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 9. Le théorème des valeurs intermédiaires est-il vrai si f n'est pas continue ?

Exercice 10.
1. Montrer les trois corollaires précédent.
2. Est ce que si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a) < f(b)$, alors on a nécessairement $f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$?

Exercice 11.
1. Montrer qu'il existe $x \geq 0$ tel que $2^x + 3^x = 7^x$.
2. Monter qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = cos(x)$.

4.2 Fonctions continues sur un segment

Théorème 12

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue est bornée sur $[a, b]$ et atteins ses bornes. .

Démonstration : Montrons que f est bornée : Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = \{x \in [a, b] : f(x) \geq r\}$. Fixons r tel que $A_r \neq \emptyset$, comme $A_r \subset [a, b]$, le nombre $s = \sup A_r$ existe. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite qui tend vers s avec $x_n \in A_r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition $f(x_n) \geq r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que f est contininue, à la limite on a $f(s) \geq r$ et ainsi $s \in A_r$.

Supposons par l'absurd que f ne soit pas majorée. Pour tout $n \geq 0$, A_n est non vide. Notons $s_n = \sup A_n$. Comme si $f(x) \geq n + 1$ alors $f(x) \geq n$, on a $A_{n+1} \subset A_n$ et donc $s_{n+1} \leq s_n$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par a. Encore une fois f est continue donc $\lim_n f(s_n) = f(l)$ qui est fini. Mais $f(s_n) \geq n$ donc $\lim_n f(s_n) = +\infty$, ce qui est contradictoire. On en déduit que f est majorée.

Un raisonnement tout à fait similaire prouve que f est aussi minorée, donc bornée. Par ailleurs on sait déjà que $f([a, b])$ est un intervalle (c'est le théorème des valeurs intermédiaires), donc maintenant $f([a, b])$ est un intervalle borné. Il reste à montrer qu'il du type $[m, M]$ (et pas $]m, M[$ par exemple).

Montrons maintenant que $f([a, b])$ est un intervalle fermé. Notons $m = \inf f([a, b])$ et $M = \sup f([a, b])$. Supposons par l'absurde que $M \notin f([a, b])$. Alors pour tout $t \in [a, b]$, $M > f(t)$. La fonction $g : t \longrightarrow \frac{1}{M-f(t)}$ est bien définie et contininue (comme quotient de fonction qui le sont). D'après la partie précédente, elle est bornée, disons par un réel K. Comme $M = \sup f([a, b])$, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $f([a, b])$ tel que $\lim_n y_n = M$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f([a, b])$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) = y_n$ donc $\lim_n f(x_n) = M$. Ainsi

$$g(x_n) = \frac{1}{M - f(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Cela contredit le fait que g est bornée. Ainsi $M \in f([a, b])$. De même $m = \inf f([a, b]) \in f([a, b])$. On en conclut que $f([a, b]) = [m, M]$. ∎

Exercice 12. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) + m < g(x)$. Ce résultat est-il vrai si on remplace $[0, 1]$ par $\mathbb{R}$?

Dessiner le graphe d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$, $f(\mathbb{R}) =]0, 1[$, $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$, $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1]$ et $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[$.

4.3 Fonctions monotones et bijection

Théorème 13

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J . De plus, elle a le même sens de variation que f.*

Considérons la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La fonction f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$: elle n'est pas même pas injective car un nombre et son opposé ont même carré. Cependant, en restreignant son ensemble de définition à $]-\infty, 0]$ d'une part et à $[0, +\infty[$ d'autre part, on définit deux fonctions strictement monotones :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

On remarque que $f(]-\infty, 0]) = f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Leur fonctions réciproques sont

$$f_1^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow &]-\infty, 0] \\ y & \longmapsto & -\sqrt{y} \end{array} \quad \text{et} \quad f_2^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ y & \longmapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

qui sont respectivement strictement décroissante et strictement croissante.

Lemme 14

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective sur I.

Démonstration : Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Si on avait $x < x'$ alors comme f est strictement monotone, on a $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$ suivant que f est strictement croissante ou strictement décroissante. Comme c'est impossible, on en déduit que $x \geq x'$. En faisant le même raisonnement en inversant le rôle de x et x', on obtient que $x \leq x'$ et donc $x = x'$. On en déduit que f est injective. ■

Démonstration (Preuve du théorème 13) : D'après le lemme précédent, f est injective sur I. En restreignant son ensemble d'arrivée à son image $J = f(I)$, on obtient que f établit une bijection de I dans J. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, l'ensemble J est un intervalle.

Supposons que f est strictement croissante.

Montrons que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient $y, y' \in J$ tels que $y < y'$. Notons $x = f^{-1}(y) \in I$ et $x' = f^{-1}(y') \in I$. Alors $y = f(x)$, $y' = f(x')$ et donc $y = f(x) < y' = f(x')$. Comme f est strictement croissante, $x < x'$ et donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Ainsi f^{-1} est strictement croissante.

Montrons que f^{-1} est continue sur J. On se limite au cas où I est de la forme $]a, b[$, les autres cas se montrent de la même manière. Soit $y_0 \in J$, on note $x_0 = f^{-1}(y_0) \in I$. Soit $\epsilon > 0$, on peut supposer que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. On cherche $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in J$ on ait

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \Longrightarrow f^{-1}(y_0) - \epsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \epsilon$$

On pose $\delta > 0$ tel que $f(x_0 - \epsilon) < y_0 - \delta$ et $f(x_0 + \epsilon) > y_0 + \delta$. Pour tout $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$. On a alors

$$\begin{array}{rcll} y_0 - \delta < y = f(x) < y_0 + \delta & \Longrightarrow & f(x_0 - \epsilon) < f(x) < f(x_0 + \epsilon) & \\ & \Longrightarrow & x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon & \text{car } f \text{ est croissante} \\ & \Longrightarrow & f^{-1}(y_0) - \epsilon < x < f^{-1}(y_0) + \epsilon & \text{car } f^{-1}(y_0) = x_0 \end{array}$$

■

Exercice 13.

1. En donnant des exemples appropriés, montrer que chacune des hypothèses "continue" et "strictement monotone" est nécessaire dans l'énoncé du théorème de la bijection.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et de f^{-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ définit une bijection de l'intervalle $[0, 1]$ vers un intervalle à préciser.
4. Existe-t-il une fonction continue $f : [0, 1[\longrightarrow]0, 1[$ qui soit bijective ? $f : [0, 1[\longrightarrow]0, 1[$ qui soit injective ? $f :]0, 1[\longrightarrow [0, 1]$ qui soit surjective ?
5. Pour $y \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $x + e^x = y$. Montrer qu'il existe une unique solution pour chaque $y \in \mathbb{R}$. Comment varie y en fonction de x ? Comment varie x en fonction de y ?

Université Paul Sabatier Année 2024-2025
TD Math-Base **feuille n°** 1

Langage mathématique (Solutions)