# Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}_{n \text{ fois}} \ni z = (z_1, \dots, z_n)$$ les coordonnées complexes standard

$\mathbb{C} \ni z_j = x_j + i y_j$ , $j = 1, \dots, n$

$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} \ni (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ les coordonnées réelles

l'espace euclidien réel de dimension $2n$

**Définition** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine (un ouvert)

Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe si

$f$ est continue et séparément holomorphe en chaque variable $z_j$, $j = 1, \dots, n$,

c-à-d : $z_j \longmapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$ est holomorphe quand lorsque $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots$ ont été fixés

**Notation** $\mathcal{O}(\Omega) := \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe} \}$ est un anneau

**Polydisques** Étant donnés $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ un point

et $R = (R_1, \dots, R_n)$ où $R_1, \dots, R_n > 0$ nombres,

on définit

$$D(c, R) := D(c_1, R_1) \times \dots \times D(c_n, R_n) \subset \mathbb{C}^n$$

le polydisque ouvert de centre $c$ et (multi)rayon $R = (R_1, \dots, R_n)$.

où $D(c_j, R_j) \subset \mathbb{C}$ est le disque de centre $c_j$ et rayon $R_j$ dans $\mathbb{C}$.

Le bord distingué de $D(c, R)$ :

$$\Gamma(c, R) := \Gamma(c_1, R_1) \times \dots \times \Gamma(c_n, R_n)$$ le produit des cercles correspondants

où $\Gamma(c_j, R_j) := \{ z_j \in \mathbb{C} \mid |z_j - c_j| = R_j \} \subset \mathbb{C}$ le cercle de centre $c_j$ et de rayon $R_j$ dans $\mathbb{C}$

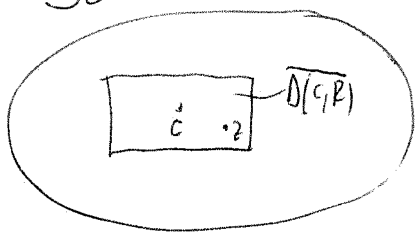
Observation

$$\Gamma(c,R) \subsetneq \partial D(c,R) = \bigcup_{j=1}^{n} \{ z \in \overline{D(c,R)} \mid |z_j - c_j| = R_j \}$$

la frontière topologique

si $n \geq 2$.

## La formule de Cauchy sur les polydisques




Si $\overline{D(c,R)} \subset \Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un polydisque fermé, contenu dans $\Omega$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe,

alors pour tout $z \in D(c,R)$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c,R)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

Démonstration Par récurrence sur $n \geq 1$.

$n=1$ : la formule de Cauchy à une variable complexe

$f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe d'une variable.

$\overline{D(c,R)} \subset \Omega$ un disque fermé

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(c,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \quad , \forall z \in D(c,R) \quad , \text{ où } \Gamma(c,R) \text{ est le cercle.}$$

$n-1 \to n$ : Fixons $z_n \in D(c_n, R_n)$. Alors pour tout $(z_1, \dots, z_{n-1}) \in D(c_1, R_1) \times \dots \times D(c_{n-1}, R_{n-1})$ on a, par la formule de Cauchy à $n-1$ variables.

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\Gamma(c_1,R_1) \times \dots \times \Gamma(c_{n-1}, R_{n-1})} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, z_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_{n-1} - z_{n-1})} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1}$$

Cauchy à une variable ; en fixant $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1} \in \Gamma(c_1, R_1) \times \dots \times \Gamma(c_{n-1}, R_{n-1})$, on a pour tout $z_n \in D(c_n, R_n)$ :

$$f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(c_n, R_n)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} \, d\zeta_n .$$

Donc,

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c_1, R_1) \times \dots \times \Gamma(c_{n-1}, R_{n-1})} \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_{n-1} - z_{n-1})} \left( \int_{\Gamma(c_n, R_n)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} \, d\zeta_n \right) d\zeta_1 \dots d\zeta_{n-1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c_1, R_1) \times \dots \times \Gamma(c_n, R_n)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n .$$

## Conséquences de Cauchy

Les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes se sont déduites de Cauchy.

2) Le développement en série de $f$ :

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{(\zeta_j - c_j) - (z_j - c_j)} = \frac{1}{\zeta_j - c_j} \, \frac{1}{1 - \frac{z_j - c_j}{\zeta_j - c_j}} = \frac{1}{\zeta_j - c_j} \sum_{\alpha_j = 0}^{+\infty} \left( \frac{z_j - c_j}{\zeta_j - c_j} \right)^{\alpha_j}$$

car $\left| \frac{z_j - c_j}{\zeta_j - c_j} \right| = \frac{|z_j - c_j|}{R_j} < 1 \quad \forall z_j \in D(c_j, R_j), \ \forall \zeta_j \in \Gamma(c_j, R_j)$, $\forall j = 1, \dots, n$.

$$= \sum_{\alpha_j = 0}^{+\infty} \frac{(z_j - c_j)^{\alpha_j}}{(\zeta_j - c_j)^{\alpha_j + 1}}$$ une série convergente.

Donc

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c_1, R_1) \times \dots \times \Gamma(c_n, R_n)} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \sum_{\alpha_1 = 0}^{+\infty} \frac{(z_1 - c_1)^{\alpha_1}}{(\zeta_1 - c_1)^{\alpha_1 + 1}} \dots \sum_{\alpha_n = 0}^{+\infty} \frac{(z_n - c_n)^{\alpha_n}}{(\zeta_n - c_n)^{\alpha_n + 1}} \, d\zeta_1 \dots d\zeta_n ,$$

$\forall z \in D(c, R)$

$$\boxed{f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (z-c)^\alpha} \quad \forall z \in D(c,R) \quad , \quad \text{où}$$

$$z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \quad , \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad ,$$

$$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c,R)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - c_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - c_n)^{\alpha_n+1}} = \frac{f^{(\alpha)}(c)}{\alpha!}$$

---

~~Deuxième cours~~:

Conséquences de la formule de Cauchy

1) Les dérivées de $f$

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c_1,R_1)} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \left( \int_{\Gamma(c_2,R_2) \times \cdots \times \Gamma(c_n,R_n)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_2 \cdots d\zeta_n \right) d\zeta_1$$

$$= \int_{\Gamma(c_1,R_1)} \frac{\varphi(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

$\Gamma(c_1,R_1) \ni \zeta_1 \longmapsto \varphi(\zeta_1) \in \mathbb{C}$ est continue

~~Par~~ ( On a (résultat connu en une variable) : $f$ est dérivable en $z_1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1, \ldots, z_n) = \int_{\Gamma(c_1,R_1)} \frac{\varphi(\zeta_1)}{(\zeta_1 - z_1)^2} d\zeta_1$$

( c-à-d on dérive sous le signe intégrale)

Donc $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ est holomorphe dans $D(c,R)$.

Plus généralement, en une variable on a :

si $g(z) = \displaystyle\int_{P(c_1,R_1)} \frac{\varphi(\zeta_1)}{(\zeta_1 - z_1)^m}\, d\zeta_1$, avec $P(c_1,R_1) \ni \zeta_1 \longmapsto \varphi(\zeta_1) \in \mathbb{C}$ continue,

alors $g$ est dérivable en $z_1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1, \ldots, z_n) = m \int_{P(c_1,R_1)} \frac{\varphi(\zeta_1)}{(\zeta_1 - z_1)^{m+1}}\, d\zeta_1 .$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial z_1}$ est holomorphe dans $D(c,R)$

(on dérive sous le signe intégral)

En répétant ceci, on obtient

<u>Théorème</u> Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

alors $f$ est indéfiniment dérivable en $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ et toutes ses dérivées partielles

$$f^{(\alpha)}(z) := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}(z) \quad \text{sont holomorphes dans } \Omega.$$

De plus, pour tout polydisque fermé $\overline{D(c,R)} \subset \Omega$, on a :

$$f^{(\alpha)}(z) = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2\pi i)^n} \int_{P(c,R)} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{\alpha_n+1}}\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n, \quad \forall z \in D(c,R)$$

(c-à-d on dérive sous le signe intégrale dans Cauchy).

---

2) <u>Théorème</u> Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Pour tout polydisque $\overline{D(c,R)} \subset \Omega$, $f$ a un développement en série

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha (z-c)^\alpha = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0}^{+\infty} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} (z_1 - c_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n - c_n)^{\alpha_n}, \quad z \in D(c,R)$$

qui est absolument convergente dans $D(c,R)$.

Les coefficients sont donnés par :

$$a_\alpha = \frac{f^{(\alpha)}(c)}{\alpha!} = \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}(c) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c,R)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - c_1)^{\alpha_1+1} \dots (\zeta_n - c_n)^{\alpha_n+1}}$$

Démonstration

$$|a_\alpha| \leq \frac{M}{R_1^{\alpha_1} \dots R_n^{\alpha_n}} \quad , \text{ où } \quad M := \max_{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \underbrace{\Gamma(c,R)}_{\text{compact}}} |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)| < +\infty$$

$$1 = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(c,R)} \frac{1}{(\zeta_1 - c_1) \dots (\zeta_n - c_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

Conséquences

Corollaire $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe $\Leftrightarrow$ $f$ est $\mathbb{C}$-analytique.

Théorème (prolongement analytique)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert connexe.

Si $\exists z_0 \in \Omega$ t.q. $f^{(\alpha)}(z_0) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, alors $f \equiv 0$ sur $\Omega$.

En particulier, si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes, $\Omega$ connexe, avec coïncident au voisinage d'un point $c \in \Omega$, alors $f \equiv g$ sur $\Omega$.

Démonstration

Soit $\Omega_0 := \{ z \in \Omega \mid f(z) = 0, \ f^{(\alpha)}(z) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \} \subset \Omega$. ouvert par le théorème précédent.

$\Omega_1 := \Omega \setminus \Omega_0 \subset \Omega$ ~~fermé~~ ouvert

$$\left.\begin{array}{l} \Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \quad \text{ouverts} \\ \Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset \end{array}\right| \overset{\Omega}{\underset{\text{connexe}}{\Rightarrow}} \Omega = \Omega_0 \quad \text{ou} \quad \Omega = \Omega_1$$

mais $z_0 \in \Omega_0 \Rightarrow \Omega = \Omega_0$.

**Théorème** (les inégalités de Cauchy)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert.

Alors, $\forall z_0 \in \Omega$, $\forall R = (R_1, \dots, R_n)$ tq. $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$, $f$ vérifie

$$|f^{(\alpha)}(z_0)| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} \sup_{\Gamma(z_0,R)} |f| \quad , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

où $R^\alpha := R_1^{\alpha_1} \dots R_n^{\alpha_n}$

**Théorème** (le principe du maximum)

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert connexe

Si $\exists\, a \in \Omega$ tq. $|f(z)| \leq |f(a)|$ $\forall z \in B(a,r) \subset\subset \Omega$

alors $f(z) = f(a)$ $\forall z \in \Omega$.

Idée: $0 \leq \int_{B(a,r)} (|f(a)| - |f(z)|)\, d\lambda(z) = c|f(a)| - \int_{B(a,r)} |f(z)|\, d\lambda(z) \leq 0$

$\Rightarrow f(z) = f(a)$ $\forall z$


**Démonstration**

$$f^{(\alpha)}(z_0) = \alpha!\, a_\alpha = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(z_0,R)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_{0,1})^{\alpha_1+1} \dots (\zeta_n - z_{0,n})^{\alpha_n+1}}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n$$

$$|f^{(\alpha)}(z_0)| \leq \frac{\alpha!}{\cancel{(2\pi)^n}} \sup_{\Gamma(z_0,R)} |f| \; \frac{1}{R_1^{\alpha_1+1} \dots R_n^{\alpha_n+1}} \cancel{(2\pi)^n} R_1 \dots R_n = \frac{\alpha!}{R^\alpha} \sup_{\Gamma(z_0,R)} |f|$$

**Corollaire 1** (le théorème de Liouville)

Si $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est holomorphe et bornée, alors $f$ est constante.

**preuve** Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n$ quelconque. et $M := \sup_{\mathbb{C}^n} |f| < +\infty$.

$$|f^{(\alpha)}(z_0)| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} M \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$$

$\forall R = (R_1, \dots, R_n)$, $R_1, \dots, R_n > 0$.

On fixe $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et on fait $R_j \to +\infty$ $\forall j = 1, \dots, n$. $\Rightarrow f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ $\forall z_0 \in \mathbb{C}^n$ $\forall \alpha$ $\Rightarrow f$ constante.

Corollaire 2

Plus généralement, si

$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe

et si $|f(z)| \leq A\,(1+|z|)^B$ $\forall z \in \mathbb{C}^n$, où $A, B \geq 0$ sont des constantes,

alors $f$ est un polynôme de degré $\leq B$.

Preuve Soit $z_0 \in \mathbb{C}^n$ quelconque.

$$|f^{(\alpha)}(z_0)| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} \sup_{\Gamma(z_0,R)} |f| \leq \frac{\alpha!}{R^\alpha} A \sup_{z\in\Gamma(z_0,R)} (1+|z|)^B < \frac{A\,\alpha!}{R^\alpha}(1+|R|)^B \quad , \forall R_j > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$$

$|z_j| < R_j$, $j = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ $|z|^2 < \sum_{j=1}^n R_j^2 := |R|^2$

~~Si~~ Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ t.q. $\alpha_j > B$, $\dfrac{(1+|R|)^B}{R_j^{\alpha_j}} \xrightarrow[R_j \to \infty]{} 0$ si $R_1, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, \dots$ sont fixés.

Donc $f^{(\alpha)}(z_0) = 0$ $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ t.q. $\alpha_j > B$ pour un certain $j = 1, \dots, n$

$f$ ~~des~~ est donc un polynôme de degré $\leq B$.

---

La topologie de l'espace $\mathcal{O}(\Omega)$ $\stackrel{\text{def}}{=}$ la topologie de la convergence uniforme sur toutes les compactes $K \subset\subset \Omega$.

(c-à-d la topologie induite par $C^0(\Omega, \mathbb{C})$).

~~Alors $\mathcal{O}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ est fermé.~~

$D^\alpha : \mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega)$

$f \longmapsto D^\alpha f := f^{(\alpha)}$ la dérivée par rapport à $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

Inégalités de Cauchy $\Rightarrow$ $D^\alpha$ est un opérateur continu (c-à-d si $f_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} f$ uniformément sur tous les compacts $K \subset\subset \Omega$

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ est fermé $\Rightarrow D^\alpha f_j \longrightarrow D^\alpha f$ — " — $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

Attention ! Ceci n'est pas vrai dans $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ : les fonctions $C^\infty$ ne vérifient pas nécessairement les inégalités de Cauchy.

La topologie de $C^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ :

$$f_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} f \quad \text{dans } C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \overset{\text{déf.}}{\iff} \left. \begin{cases} f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f \\ D^\alpha f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} D^\alpha f \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \end{cases} \right\} \text{uniformément sur les compacts } K \subset\subset \Omega$$

---

$\Rightarrow$ Si $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$ est une suite uniformément bornée sur tous les compacts $K \subset\subset \Omega$

$\overset{\text{déf.}}{\iff}$ $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $\mathcal{O}(\Omega)$,

alors $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est localement équicontinue (sur tous les compacts $K \subset\subset \Omega$).

Théorème de Montel

Si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}(\Omega)$ est une suite localement uniformément bornée,

alors $\exists \left(f_{j_\nu}\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

Preuve Appliquer Ascoli.

L'opérateur de Cauchy - Riemann

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées complexes standard de $\mathbb{C}^n$

$$z_j := x_j + i y_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Alors $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ définissent des coordonnées réelles sur $\Omega$.

**Définition** 1) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ ~~d'une~~ fonction, et soit

$$f = u + iv$$

où $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions réelles.

$f$ est dite $C^1$, $C^k$, $C^\infty$, etc $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $u, v$ $C^1$, $C^k$, $C^\infty$, etc comme fonctions réelle des variables réelles $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$.

2) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $C^1$.

On définit
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)\end{aligned}}$$
où $z_j = x_j + iy_j$.

et $\begin{cases} dz_j := dx_j + i dy_j \\ d\bar z_j = dx_j - i dy_j \end{cases}$

**Théorème** Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert, une fonction de classe $C^1$

Alors, $f$ est holomorphe $\iff$ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z_j}(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$
$\forall j = 1, \dots, n$.

**Preuve** $f$ est holomorphe $\iff$ $\forall j = 1, \dots, n$,

$z_j \longmapsto f(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) \in \mathbb{C}$ est holomorphe ~~com~~ en une variable $\forall j = 1, \dots, n$.

$\iff \dfrac{\partial f(\cdot, \dots, z_j, \dots)}{\partial \bar z_j} \equiv 0$ $\forall j = 1, \dots, n$. (par les relations de Cauchy-Riemann en une variable).

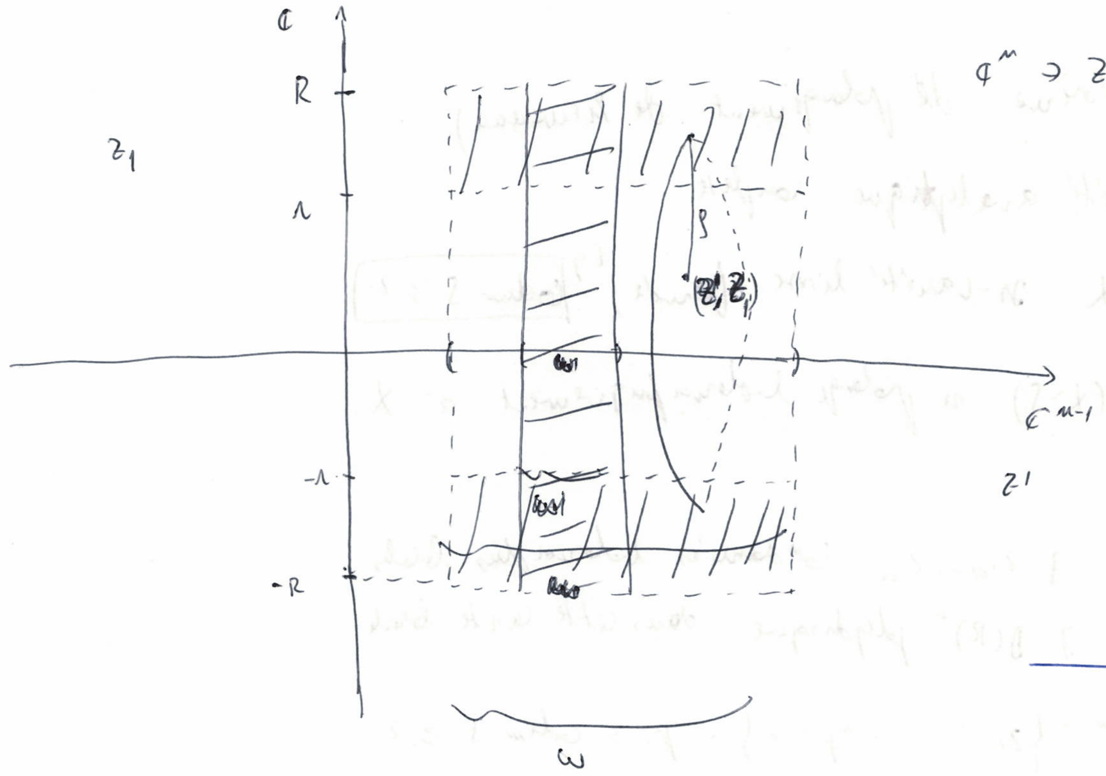
**Notation** $\bar\partial f := \dfrac{\partial f}{\partial \bar z_1} d\bar z_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial \bar z_n} d\bar z_n$ $(0,1)$-forme.

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $C^1$, alors :

$f$ est holomorphe $\iff$ $\bar\partial f = 0$ sur $\Omega$ $\iff$ $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z_j} = 0$ $\forall j = 1, \dots, n$ sur $\Omega$.

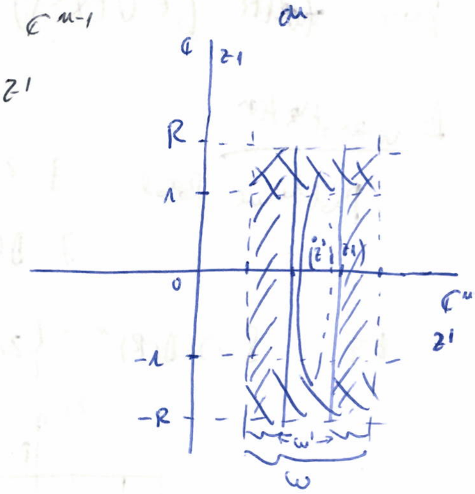
# Quelques propriétés spécifiques aux fonctions holomorphes à plusieurs variables

Supposons $n \geq 2$.




$\mathbb{C}^n \ni z = (z', z_1) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n}$

ou




Soit $\omega' \subsetneq \omega \subset \mathbb{C}^{n-1}$
ouvert   ouvert convexe

On considère

$$\Omega := \left( \left( D(R) \setminus \overline{D(r)} \right) \times \omega \right) \cup \left( D(R) \times \omega' \right)$$ la marmite de Hartogs

$$\tilde{\Omega} := D(R) \times \omega$$ la marmite pleine de Hartogs

où $0 \leq r < R$ et $D(R) \subset \mathbb{C}$ est le disque ouvert centré en $0$ de rayon $R > 0$.

**Théorème** Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet un prolongement holomorphe (unique!) $F \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ à $\tilde{\Omega}$.

**preuve** Par la formule de Cauchy, si le prolongement $F \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ existe, il ne peut être que

$$F(z_1, z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = \rho} \frac{f(\zeta_1, z')}{\zeta_1 - z_1} \, d\zeta_1 \quad , \quad z = (z_1, z') \in \tilde{\Omega},$$ pour n'importe quel $\rho$ tq. $\max\{|z_1|, r\} < \rho < R$

Alors $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$ et $\tilde{f} = f$ sur $D(R) \times \omega'$.
Par prolongement analytique $\Big\} \Rightarrow \tilde{f} = f$ sur $\Omega$ car $\Omega$ est connexe.

Corollaire (le théorème de prolongement de Riemann)

$X$ variété analytique complexe

$S \subset X$ sous-variété lisse fermée, tq $\boxed{\operatorname{codim} S \geq 2}$

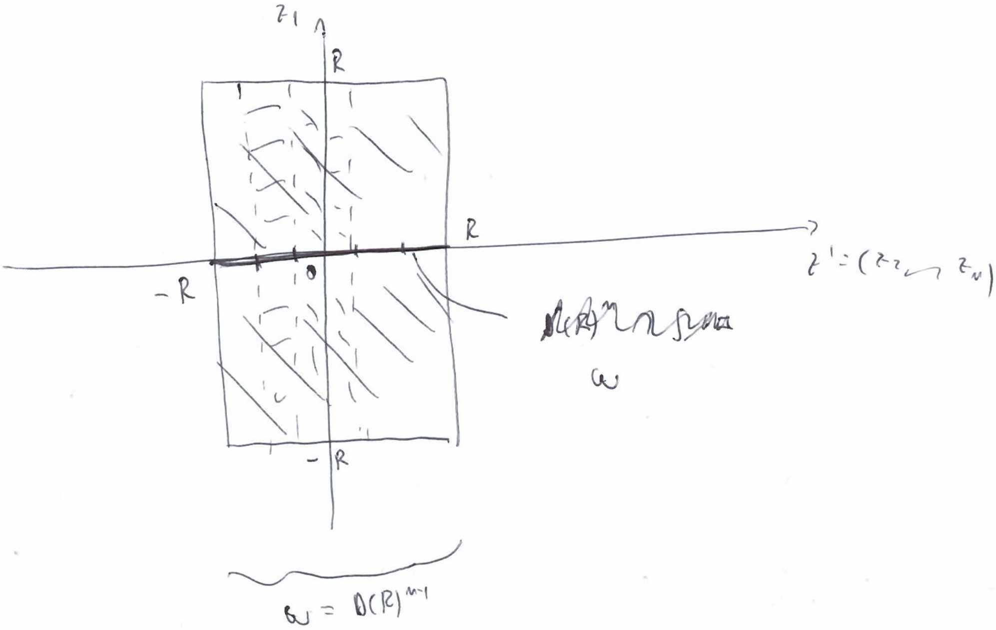
Alors toute $f \in \mathcal{O}(X \setminus S)$ se prolonge holomorphiquement à $X$.

Démonstration

Problème local : $\exists\, z_1, \ldots, z_n$ coordonnées holomorphes locales

$\exists\, D(R)^n$ polydisque dans cette carte locale

tq. $S \cap D(R)^n = \{z_1 = \cdots = z_p = 0\}$, $p := \operatorname{codim} S \geq 2$.




$\omega' = \omega \setminus \{z_2 = \cdots = z_p = 0\} \subsetneq \omega$

$D(R)^n \setminus S = \Big( (D(R) \setminus \{0\}) \times \omega \Big) \cup \Big( D(R) \times \omega' \Big)$ une marmite de Hartogs.

Donc $f$ s'étend à $\tilde{\Omega} = D(R)^n$.

Corollaire Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert, $n \geq 2$, $a \in \Omega$.

Alors $f$ se prolonge holomorphiquement au point $a = (a_1, a')$. Preuve Choisir $\omega' = \omega \setminus \{a'\}$ pour $\Omega = (D(R) \times \omega) \setminus \{a\}$, $r = 0$.

## Variétés analytiques complexes

**Définition** Une variété analytique complexe $X$ de dimension $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ est une variété différentiable munie d'un atlas holomorphe $(\tau_\alpha)_\alpha$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$:

$\exists\ X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\underset{\text{ouvert}}{\overset{\text{tq}}{U_\alpha \subset X}}$

$\exists\ \tau_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \underset{\text{ouvert}}{V_\alpha \subset \mathbb{C}^n}$ application biholomorphe

t.q.

$$\begin{tikzcd} V_\alpha \cap V_\beta \arrow[r, "\tau_\beta^{-1}"] \arrow[rr, bend right] & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[r, "\tau_\alpha"] & V_\alpha \cap V_\beta \end{tikzcd}$$

$\tau_{\alpha\beta} := \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}$

application de transition

est holomorphe $\forall\ \alpha, \beta$.

## Applications holomorphes

Soit $\underset{\text{ouvert}}{\mathbb{C}^n \supset \Omega} \xrightarrow{\ \phi\ } \mathbb{C}^m$ une application.

$$(z_1, \dots, z_n) \longmapsto \phi(z_1, \dots, z_n) := (\phi_1(z), \dots, \phi_m(z))$$

$\phi_1, \dots, \phi_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ fonctions.

**Définition** $\phi$ est dite continue, $C^1$, $C^k$, $C^\infty$, holomorphe dans $\Omega$

$\overset{\text{déf}}{\iff}$ $\phi_1, \dots, \phi_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sont toutes continues, $C^1$, $C^k$, $C^\infty$ ou holomorphes respectivement.

---

Soit $\phi : \underset{\cup\,\mathbb{C}^n}{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}^m$ holomorphe.

La matrice

$$\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial z_h}\right)_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le h \le n}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial z_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial z_n} \end{pmatrix} \overset{\text{not}}{=} \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}$$

est appelée la matrice Jacobienne de $\phi$

Si $m = n$, ~~son~~ déterminant

$$J(z) := \det \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}$$

est appelé le <u>jacobien</u> de $\phi$.

Passage en coordonnées réelles :

$$z_k := x_k + i y_k \quad , k = 1, \dots, n$$

$$\phi_j := u_j + i v_j \quad , j = 1, \dots, m$$

Alors $\phi : (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \longmapsto (u_1, v_1, \dots, u_m, v_m) = \phi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$

<u>Proposition</u> Le jacobien réel (c-à-d. par rapport à $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ et $(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)$) ~~est~~ et le jacobien complexe de $\phi$ sont reliés par la formule :

$$\det \frac{\partial(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)}{\partial(x_1, y_1, \dots, x_n, y_m)} = |J(z)|^2 \qquad \forall z \in \Omega. \qquad \text{si } \phi \text{ est holomorphe.}$$

<u>Preuve</u> $\phi_1, \dots, \phi_m$ holomorphes $\Rightarrow$ $(*)\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_j}{\partial \bar z_k} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \bar\phi_j}{\partial z_k} = 0 \end{cases} \quad \forall j, k.$

$$u_j = \frac{\phi_j + \bar\phi_j}{2} \quad , v_j = \frac{\phi_j - \bar\phi_j}{2i}$$

$$\left|\begin{matrix} \cdot & 0 \\ 0 & \cdot \end{matrix}\right|$$

Calculs simples montrent que :

$$\det \frac{\partial(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m)}{\partial(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)} = \det \frac{\partial(\phi_1, \bar\phi_1, \dots, \phi_m, \bar\phi_m)}{\partial(z_1, \bar z_1, \dots, z_n, \bar z_n)} \overset{(*)}{=} \det \frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \det \frac{\partial(\bar\phi_1, \dots, \bar\phi_m)}{\partial(\bar z_1, \dots, \bar z_n)}$$

$$= |J(z)|^2$$

<u>Définition</u> Une application $\underset{\text{ouvert}}{\mathbb{C}^n \supset U} \xrightarrow{\ \phi\ } \underset{\text{ouvert}}{V \subset \mathbb{C}^n}$ est dite une <u>biholomorphie</u> si $\phi$ est holomorphe, bijective et $V \xrightarrow{\phi^{-1}} U$ est holomorphe.

Théorème d'inversion locale holomorphe

$\mathbb{C}^n \supset \Omega \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^n$ application holomorphe ; $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$

$J : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ son jacobien.

Si $J(z_0) \neq 0$ pour un certain point $z_0 \in \Omega$, alors

$\exists\ \Omega \supset U \ni z_0$ voisinage de $z_0$ t.q. $\phi_{|U} : U \longrightarrow W$ est une bijection.

$\exists\ \mathbb{C}^n \supset W \ni \phi(z_0)$ voisinage de $\phi(z_0)$

De plus, l'application inverse $\phi^{-1} : W \longrightarrow U$ de $\phi_{|U}$ est holomorphe sur $W$.

( c-à-d $\phi$ est un biholomorphisme local sur son image au voisinage de $z_0$ si $J(z_0) \neq 0$)

Démonstration $\phi_j = u_j + i v_j$, $z_j = x_j + i y_j$, $j = 1, \dots, n$.

$\det \dfrac{\partial(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}(z_0) = |J(z_0)|^2 > 0$

le Jacobien réel

Théo de l'application inverse pour $C^1$ $\Longrightarrow$ $\exists\ \Omega \supset U \ni z_0$, $\exists\ \mathbb{C}^n \supset W \ni \phi(z_0) = w_0$ t.q.

$\phi_{|U} : U \longrightarrow W$ bijective et $\phi^{-1} : W \xrightarrow{C^1} U$

$(w_1, \dots, w_n) = w \longmapsto z = (z_1, \dots, z_n) = \phi^{-1}(w)$
$= (\psi_1(w), \dots, \psi_n(w))$

Notons $\phi^{-1} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\psi_1, \dots, \psi_n : W \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$.

Il reste à démontrer que $\phi^{-1}$ est holomorphe i.e. $\psi_1, \dots, \psi_n : W \longrightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes.

$z_j = \psi_j(w)$ où $w = \phi(z) = (\phi_1(z), \dots, \phi_n(z))$

Donc $z_j = \psi_j(\underbrace{\phi_1(z), \dots, \phi_n(z)}_{\shortparallel\ w})$

**Corollaire** Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, avec $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert, $n \geq 2$, alors $f$ ne peut pas avoir des zéros isolés. (Contrairement au cas où $n=1$).

**Preuve** Supposons $\exists\, a \in \Omega$ t.q. $f(a) = 0$ et $f(z) \neq 0$ $\forall z \in B(a,r) \setminus \{a\}$ où $\overline{B(a,r)} \subset \Omega$.

Alors $g : B(a,r) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ est holomorphe sur $B(a,r) \setminus \{a\}$.

Corollaire de Hartogs $\Rightarrow g = \frac{1}{f}$ se prolonge holomorphiquement à $a$. Contradiction.

$$0 = \frac{\partial z_j}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \psi_j(w)}{\partial \bar{w}_l} \cdot \frac{\partial \bar{\phi}_l}{\partial \bar{z}_k} \iff 0 = \left(\frac{\partial \psi_j(w)}{\partial \bar{w}_l}\right)_{1 \leq j,l \leq n} \cdot \overbrace{\left(\frac{\partial \bar{\phi}_l}{\partial \bar{z}_k}\right)_{1 \leq l,k \leq n}}^{\text{inversible}}$$

Mais $\det \left(\frac{\partial \bar{\phi}_l}{\partial \bar{z}_k}\right)_{l,k=1,\dots,n} (z) = \overline{J}(z) \neq 0$ sur $U$, on obtient

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \bar{w}_l}(w) = 0, \quad \forall j,l = 1,\dots,n,\ \forall w \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_n \text{ sont holomorphes.}$$

## Ensembles des zéros des fonctions holomorphes

**1 variable :**

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$, $a \in \Omega$. $\Rightarrow \exists !$ représentation locale

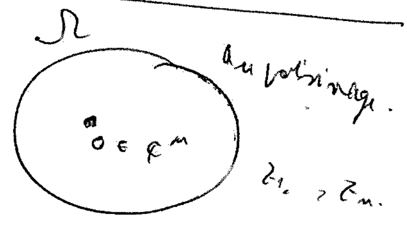
$f(z) = (z-a)^n u(z)$, avec $u(a) \neq 0$, $u$ holomorphe au voisinage de $a$.

$n = \operatorname{ord}_a f$ l'ordre d'annulation de $f$ en $a$ ($n$ peut être $0$)

Conséquence : $\{z \in \Omega \subset \mathbb{C} \,/\, f(z) = 0\}$ est discret.

This is never true in several variables.

---




$z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$

$z = (z', z_n)$

**Définition** Un polynôme de Weierstrass en $z_n$ est un polynôme de la forme

$$P(z', z_n) = z_n^s + a_1(z') z_n^{s-1} + \dots + a_s(z')$$

où les coefficients $a_k(z')$ sont des fonctions holomorphes en $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ sur un voisinage $|z'| < r'$ de $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $a_k(0) = 0$, $\forall k = 1, \dots, s$.

En particulier, $P(0, z_n) = z_n^s$ s'annule à l'ordre $s$ en $0 \in \mathbb{C}$.

## Théorème de préparation de Weierstrass

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un voisinage $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ de $0 \in \mathbb{C}^n$.

Supposons que $f(0, z_n) \not\equiv 0$.

Alors $\exists\, \Omega' \subset \Omega$ ouvert voisinage de $0$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $f$ s'écrit de manière unique

comme

$$f = g\, h \quad \text{sur } \Omega',$$

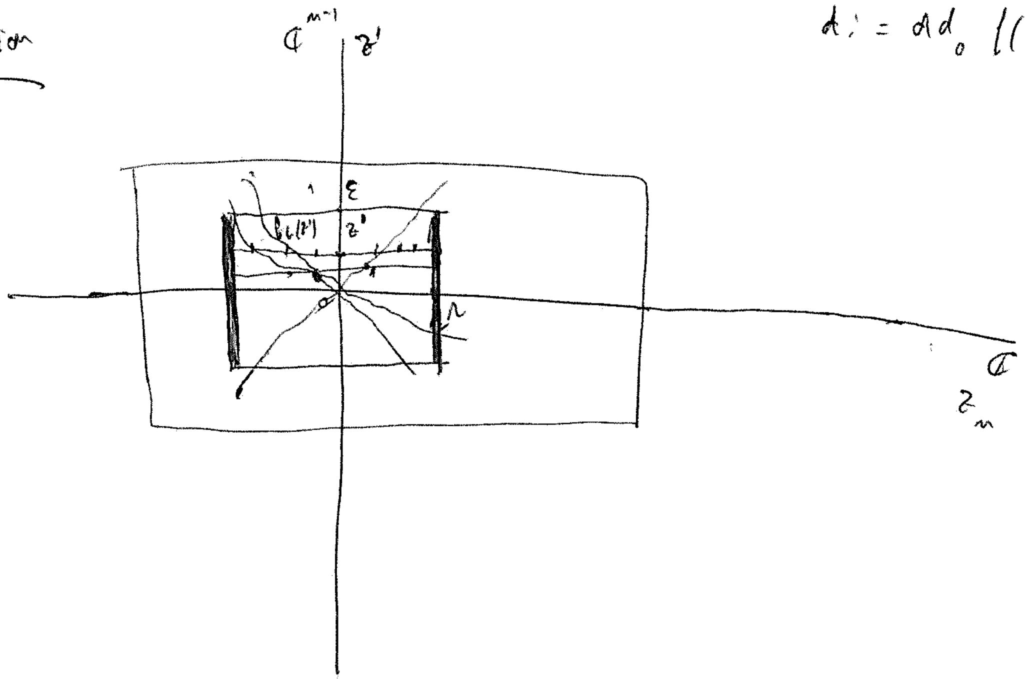
où $g(z', z_n) = z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z')$ est un polynôme de Weierstrass de degré $d = \operatorname{ord}_0 f(0, z_n)$ en $z_n$

et $h(0) \neq 0$, ~~[illegible]~~ $h \in \mathcal{O}(\Omega')$.

<u>Démonstration</u>

<u>Existence</u>

$d := \mathrm{ord}_0 f(0, z_n)$




$f(0, z_n) \not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, r > 0$ tq. $|f(0,z_n)| \geq \delta > 0$ pour $|z_n| = r$. (par compacité du cercle $\Gamma(0,r) \subset \mathbb{C}$).

$$\left.\begin{array}{l} z' \longmapsto f(z', z_n) \quad \text{continue} \\ z_n \in \Gamma(0,r) \\ \quad \text{compact} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tq. } |f(z', z_n)| \geq \frac{\delta}{2} \text{ pour } \begin{cases} |z'| \leq \varepsilon \\ |z_n| = r \end{cases}$$

$\forall z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ tq. $|z'| < \varepsilon$, soient $b_1(z'), \ldots, b_d(z')$ les racines de $f(z', z_n) = 0$ pour $|z_n| < r$:

$$f(z', b_k(z')) = 0, \quad k = 1, \ldots, d$$

Théorème des résidus appliqué à la fonction holom d'une variable $z_n \longmapsto f(z', z_n)$:

$$b_1(z')^q + \cdots + b_d(z')^q = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z_n| = r} \frac{z_n^q \frac{\partial f}{\partial z_n}(z', z_n)}{f(z', z_n)}\, dz_n, \quad \forall z' \in \mathbb{C}^{n-1}, |z'| < \varepsilon.$$

$\forall q \in \mathbb{N}$.

Donc

$$\underset{\mathbb{C}^{n-1}}{\overset{\cap}{B(0,\varepsilon)}} \ni z' \longmapsto b_1(z')^q + \cdots + b_d(z')^q \in \mathbb{C} \quad \text{est holomorphe} \quad \forall q \in \mathbb{N}.$$

Soit $\sigma_1(z'), \ldots, \sigma_d(z')$ les polynômes symétriques élémentaires en $b_1(z'), \ldots, b_d(z')$ :

$$\begin{cases} \sigma_1(z') = b_1(z') + \cdots + b_d(z') \\ \sigma_2(z') = \sum_{\substack{j,h=1 \\ j\neq h}}^{d} b_j(z')\, b_h(z') = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{d} b_j(z')\right)^2 - \sum_{j=1}^{d} b_j(z')^2\right] \\ \vdots \\ \sigma_d(z') = b_1(z') \cdots b_d(z') \end{cases}$$

$\sigma_1(z'), \ldots, \sigma_d(z')$ peuvent s'exprimer comme polynômes en les sommes des puissances

$$b_1(z')^q + \cdots + b_d(z')^q \quad , \quad q \in \mathbb{N}.$$

Donc $\underset{\mathbb{C}^{n-1}}{B(0,\varepsilon)} \ni z' \longmapsto \sigma_h(z') \in \mathbb{C}$ est holomorphe $\forall\, h = 1, \ldots, d$.

En particulier

$\mathbb{C}^{n-1} \supset B(0,\varepsilon) \ni z' \longmapsto g(z', z_n) := z_n^d - \sigma_1(z')\, z_n^{d-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d(z') = (z_n - b_1(z')) \cdots (z_n - b_d(z'))$

est holomorphe

Évidemment $\mathbb{C} \supset D(0,1) \ni z_n \longmapsto g(z', z_n)$ est holomorphe.

Soit $h(z', z_n) := \dfrac{f(z', z_n)}{g(z', z_n)}$ est holomorphe sur $|z'| < \varepsilon$, $|z_n| < 1$, sur le complémentaire de

$B(0,\varepsilon) \times D(0,1) \ni (z', z_n)$ $\qquad V := \{ (z', z_n) \,/\, g(z', z_n) = 0 \} = \{ (z', z_n) \,/\, f(z', z_n) = 0 \}$.

$\mathbb{C}^n \supset (B(0,\varepsilon) \times D(0,1)) \setminus V$

Par ailleurs, $\forall\, z' \in B(0,\varepsilon)$ fixé, $D(0,1) \ni z_n \longmapsto h(z', z_n) \in \mathbb{C}$ n'a que des singularités effaçables, donc se prolonge holomorphiquement à $D(0,1)$ tout entier.

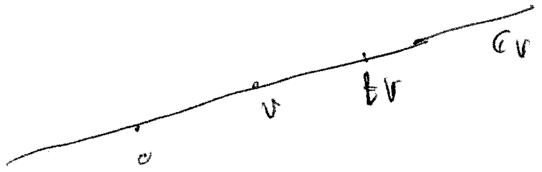
Cauchy : $h(z', z_n) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|u|=1} \dfrac{h(z', u)}{u - z_n}\, du \Rightarrow h(z', z_n)$ est aussi holomorphe en $z'$ !

Unicité : claire.

Observation : Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, où $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un voisinage de $0$,

et si $f \not\equiv 0$, alors

$f(0, z_n) \not\equiv 0$ pour presque tout choix de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ en $0$.



En effet, $\exists$ un ensemble dense de vecteurs $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq.

$$\mathbb{C} \ni t \xrightarrow{f|_{\mathbb{C}v}} f(tv) \in \mathbb{C} \qquad \not\equiv 0.$$

$$f(tv) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(v)}{k!} t^k \quad , \text{ où } f^{(k)}(v) := \frac{\partial^k f}{\partial v^k}(0)$$

$\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq. $f^{(k_0)}(v) \neq 0$. Choisir $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq. $f^{(k_0)}(v) \neq 0$

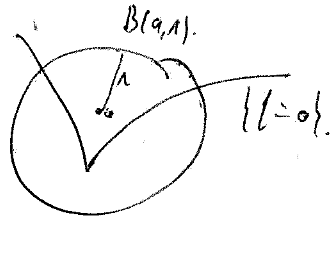
Conséquence $\{(z', z_n) \mid f(z', z_n) = 0\} = \{(z', z_n) \mid q(z', z_n) = z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z') = 0\}$

$$= \{(z', b_1(z')) / z'\} \cup \dots \cup \{(z', b_d(z')) / z'\}$$

Le lieu des zéros d'une fonction holomorphe $f(z', z_n)$ tq. $f(z', \cdot) \not\equiv 0$, se projette localement sur l'hyperplan $\{z_n = 0\}$ comme un recouvrement à un nombre fini de feuillets, ramifié au-dessus du lieu des zéros d'une fonction holomorphe.

(le discriminant de $q(z', \cdot)$, holomorphe en $z'$).

Corollaire (théorème d'extension de Riemann) Soit $f : B(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, $f \not\equiv 0$
$\quad\quad\;\;\, \cap$
$\quad\quad\;\;\, \mathbb{C}^n$

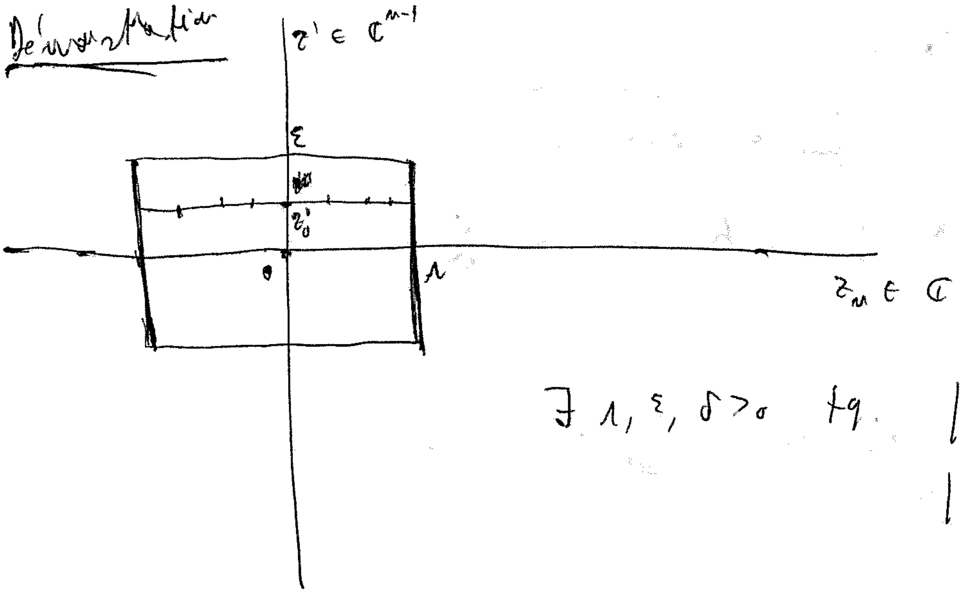


et soit $g : \overline{B(a,r)} \setminus \{f = 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et bornée

alors $g$ s'étend holomorphiquement en une fonction $\tilde{g} : B(a, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

tq. $\tilde{g}|_{B(a,r) \setminus \{f = 0\}} = g$.

Démonstration




$\exists\, r, \varepsilon, \delta > 0$ t.q. $|f(0,z_n)| \geq \delta > 0$ pour $|z_n| = r$

$|f(z',z_n)| \geq \frac{\delta}{2} > 0$ pour $|z'| < \varepsilon$ et $|z_n| = r$

~~On choisit un système de~~ $\exists\, (z', z_n) \in \mathbb{C}^n$ système de coordonnées locales en $0 \in \mathbb{C}^n$

t.q. $z_n \longmapsto f(0,z_n) \not\equiv 0.$ $\Leftrightarrow$ $\{z'=0\} \not\subset \{f=0\}$.

Donc $f$ ne s'annule qu'à l'intérieur des disques $\{(z'_0, z_n) \,|\, |z_n| \leq r\}$.

Théorème d'extension de Riemann à une variable :

$$\exists\, \tilde{g} : \underset{\displaystyle \mathbb{C}^n}{\underset{\cap}{B(0,\varepsilon) \times D(0,r)}} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{extension de } g,$$

$\tilde{g}$ est holomorphe sur $(B(0,\varepsilon) \times D(0,r)) \setminus \{f=0\}$.

et $\forall\, z' \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}^{n-1}$, $D(0,r) \ni z_n \longmapsto \tilde{g}(z',z_n)$ holomorphe

Mais, Cauchy : $\displaystyle \tilde{g}(z',z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=r} \frac{\tilde{g}(z',u)}{u - z_n}\, du \Rightarrow \tilde{g}$ est aussi holomorphe en $z'$.

## Théorème de division de Weierstrass

Soit $P(z',z_n) = z_n^h + a_1(z') z_n^{h-1} + \dots + a_h(z')$ un polynôme de Weierstrass de degré $h$ en $z_n$.

Alors toute fonction ~~f~~ holomorphe

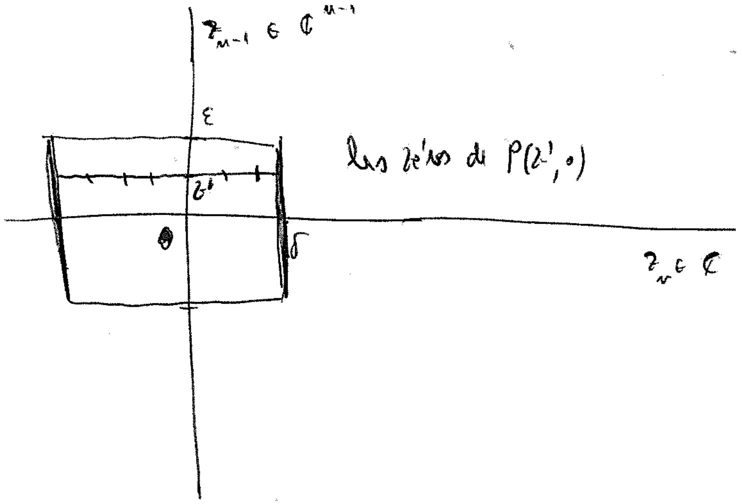
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad 0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert s'écrit de manière unique comme

$$f = P\,Q + r, \quad \text{sur tout voisinage } \Omega' \subset\subset \Omega \text{ de } 0 \in \mathbb{C}^n$$

où $R(z', z_n)$ est un polynôme de degré $< k$ en $z_n$, $Q(z', z_n)$, $R(z', z_n)$ sont holomorphes, et

$$\sup_{\Omega'} |Q| \leq C \sup_{\Omega'} |f|, \quad \sup_{\Omega'} |R| \leq C \sup_{\Omega'} |f|,$$ où $C > 0$ est indép. de $f$.

Démonstration




$\exists\, \varepsilon, \delta > 0$ suffisamment petits, t.q. $|P(z', z_n)| \geq c > 0 \quad \forall\, |z'| \leq \varepsilon$, $\forall\, |z_n| = \delta$.

$$B(0,\varepsilon) \times D(0,\delta) \ni (z', z_n) \longmapsto h(z', z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z', u)}{P(z', u)} \frac{du}{u - z_n}$$

est holomorphe

$\Rightarrow r := f - ph$ est holomorphe sur $B(0,\varepsilon) \times D(0,\delta)$. Pourquoi $r$ est-il un polynôme en $z_n$ de degré $< k$ ?

On a :

$$r(z', z_n) = f(z', z_n) - P(z', z_n)\, h(z', z_n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \left[ f(z', u) - P(z', z_n) \frac{f(z', u)}{P(z', u)} \right] \frac{du}{u - z_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\delta} \frac{f(z', u)}{P(z', u)} \cdot \underbrace{\frac{P(z', u) - P(z', z_n)}{u - z_n}}_{A(z', u, z_n)} du$$

Soit

$$Q(z', u, z_n) := \frac{P(z',u) - P(z',z_n)}{u - z_n}$$ est un polynôme en $z_n$ de degré $< k$.

$\Rightarrow$ $r(z', z_n)$ est un polynôme de degré $< k$ en $z_n$.

En effet, si $Q(z', u, z_n) = Q_1(z', u)\, z_n^{k-1} + \dots + Q_k(z', u)$,

alors $r(z', z_n) = a_1(z')\, z_n^{k-1} + \dots + a_k(z')$,

où $$a_i(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u| = \delta} \frac{f(z', u)}{P(z', u)}\, Q_i(z', u)\, du \quad , i = 1, \dots, k.$$

## Corollaire (le Nullstellensatz faible)

Si $f(z', z_n)$ est un germe holomorphe ~~irréductible~~ et $h(z', z_n) \in \mathcal{O}_n$ s'annule sur $\{(z', z_n) \mid f(z', z_n) = 0\}$ $\Rightarrow$ $\exists\, g(z', z_n)$ holomorphe t.q.

$$h = f \cdot g.$$

Obs Si $f$ n'est pas irréductible c'est faux. Ex: $f(z', z_n) = z_n^2$

**Démonstration** On peut supposer que $f$ est un polynôme de Weierstrass.

- Supposons que $f(z', z_n) = z_n^k + a_1(z')\, z_n^{k-1} + \dots + a_k(z')$ est un polynôme de Weierstrass de degré $k$.

$f$ irréductible $\Rightarrow$ $f, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ sont ~~[illegible]~~ premiers entre eux dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$

$\Rightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta, \gamma$ t.q. $\alpha f + \beta \frac{\partial f}{\partial z_n} = \gamma$ , $\gamma_n \in \mathcal{O}_{n-1}$, $\gamma \neq 0$

Théorème de division:

$$h = fg + r, \quad r \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n], \quad \deg r < k.$$

- Pour tout $z'_0$ fixé, si ~~[illegible]~~ $z_n \longmapsto f(z'_0, z_n)$ a une racine multiple $u$, on a:

$$f(z'_0, u) = \frac{\partial f}{\partial z_n}(z'_0, u) = 0 \Rightarrow \gamma(z'_0) = 0.$$

Donc $z_n \mapsto f(z', z_n)$ a $k$ racines distinctes si $\gamma(z') \neq 0$.

D'autre part, $h = fg + r$, $\deg r < k$

$$\left.\begin{array}{l} \forall z'_0 \notin \{\gamma = 0\}, \quad z_n \longmapsto f(z'_0, z_n) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad z_n \longmapsto h(z'_0, z_n) \end{array}\right\} \text{ ont au moins } k \text{ racines distinctes}$$

$\Rightarrow z_n \longmapsto r(z'_0, z_n)$ a au moins $k$ racines distinctes $\overset{\deg r < k}{\Longrightarrow} r(z'_0, z_n) \equiv 0 \in \mathbb{C}[z_n]$

Par continuité, $r(z'_0, z_n) \equiv 0$ et $h = fg$.

Notations

$\mathcal{O}_{n,z}$ = l'anneau des fonctions holomorphes définies dans un voisinage de $z \in \mathbb{C}^n$

$\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{n,0}$

Propriétés

a) $\mathcal{O}_n$ est intègre (i.e. si $f, g \in \mathcal{O}_n$ et si $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ ou $g = 0$).

b) $\mathcal{O}_n$ est un anneau local dont l'idéal maximal est

$$\mathfrak{m} := \{ f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0 \} \subset \mathcal{O}_n.$$

c) $f \in \mathcal{O}_n$ est inversible $\Leftrightarrow f(0) \neq 0$.

~~Propriétés~~

Définition (rappel) Soit $R$ un anneau intègre.

a) $u \in R$ est dit irréductible $\Leftrightarrow$ ($u = v \cdot w$, $v, w \in R \Rightarrow v$ est inversible ou $w$ est inversible).

b) $R$ est <u>factoriel</u> si $\forall u \in R$

$\exists\, u = u_1 \ldots u_\ell$, avec $u_1, \ldots, u_\ell \in R$ sont <u>irréductibles</u>

et l'écriture est unique modulo multiplications par des éléments inversibles.

<u>Rappels</u>

1) Si $R$ est factoriel $\Rightarrow$ $R[t]$ est factoriel. (Lemme de Gauss).
l'anneau des polynômes

2) Si $R$ est factoriel et si $u, v \in R[t]$ sont premiers entre eux,

alors ~~[illegible]~~ $\exists\, \alpha, \beta \in R[t]$ premiers entre eux

t.q.

$\exists\, \gamma \neq 0 \in R$

$\alpha u + \beta v = \gamma$.

$\gamma$ est appelé la <u>résultante</u> de $u, v$.

<u>Proposition</u> (conséquence du thm de ~~factorisation~~ préparation de Weierstrass)

L'anneau $\mathcal{O}_n$ est ~~[illegible]~~ factoriel.

<u>Démonstration</u>

Récurrence sur $n \geq 1$.

<u>$n=1$</u> : le cas d'une variable o.k.

<u>$n-1 \to n$</u> ~~Supp~~ Soit $f \in \mathcal{O}_n$. On peut supposer que $f(0, \ldots, 0, z_n) \not\equiv 0$.

$\exists\ f = P u$ , avec $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ polynôme de Weierstrass

$u \in \mathcal{O}_n$ inversible.

$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est factoriel (par Gauss).

$\Downarrow$

$\exists\ P = q_1 \cdots q_m$ , $q_1, \dots, q_m \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ irréductibles

uniques modulo multiplication par inversibles.

Donc $f = u\, p_1 \cdots p_m$ l'existence

Unicité Supposons que

$f = f_1 \cdots f_k$, avec $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_n$ irréductibles.

Weierstrass : $f_i = p_i' \cdot u_i$ , $u_i \in \mathcal{O}_n$ inversible

$p_i'$ polynôme de Weierstrass. (irréductibles. car $f_i$ est irréductible)

$\cap$

$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$

Donc $f = u\, \underbrace{P_1 \cdots P_m}_{} = (u_1 \cdots u_k)\, (\underbrace{P_1' \cdots P_k'}_{})$

polynômes de Weierstrass.

Unicité dans Weierstrass : $P_1 \cdots P_m = P_1' \cdots P_k'$ dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$

$\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ factoriel $\xrightarrow[\text{de la décomposition}]{\text{unicité}}$ $\{P_1, \dots, P_m\} = \{P_1', \dots, P_k'\}$.

## Variétés analytiques complexes

$X$ var anal complexe
$\dim_{\mathbb{C}} X = n$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $X$ est naturellement muni d'une structure de var. diff. de classe $C^\infty$,
$\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$.

$T_x X$, $T_x^* X$ : bien définis.

Soit $\mathbb{C}T_x^* X := \mathbb{C} \otimes T_x^* X$ le complexifié

l'espace des 1-formes diff en $x \in X$ à valeurs complexes.

$\mathbb{C}T_x X := \mathbb{C} \otimes T_x X$ l'espace tangent complexifié

$(U, \varphi)$ une carte $z_j = x_j + iy_j$ coordonnées locales.
$j = 1, \dots, n$.

$\{(dx_1)_x, (dy_1)_x, \dots, (dx_n)_x, (dy_n)_x\}$ : une base de $\mathbb{C}T_x^* X$

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_x\right\}$ la base duale de $\mathbb{C}T_x X$.

### Autre choix de bases

$\{(dz_1)_x, (d\bar{z}_1)_x, \dots, (dz_n)_x, (d\bar{z}_n)_x\}$ base de $\mathbb{C}T_x^* X$.

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)_x, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)_x\right\}$ la base duale de $\mathbb{C}T_x X$.

$$dz_j\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = \delta_{jk}, \quad dz_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = 0$$

$$d\bar{z}_j\left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = 0, \quad d\bar{z}_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right) = \delta_{jk} \quad \forall j, k.$$

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ fonction de classe $C^1$, $x \in U \subset X$ ouvert.

Alors la différentielle

$$(df)_x := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,(dx_j)_x + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(x)\,(dy_j)_x$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(x)\,(dz_j)_x}_{=\partial f} + \underbrace{\sum_j \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}(x)\,(d\bar z_j)_x}_{=\bar\partial f}$$

$(df)_x \in \mathbb{C}T_x^* X$

Remarque $dz_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linéaire
$d\bar z_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-antilinéaire

$f$ est holom, $df = \partial f$ est $\mathbb{C}$-linéaire ; $f$ est holom $\Leftrightarrow$ $df$ est $\mathbb{C}$-linéaire

**Structure complexe**

**Proposition** Soit $X$ une var. anal complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

Alors $\forall x \in X$, l'espace vectoriel réel $T_x^{\mathbb{R}} X$ possède une structure naturelle d'espace vectoriel complexe.

**Preuve** $\dim_{\mathbb{R}} T_x^{\mathbb{R}} X = 2n$, $T_x^{\mathbb{R}} X$ espace vectoriel réel.

**Cas où $X = \mathbb{C}^n$**

$z_\alpha : \underset{X}{\underset{\cap}{U_\alpha}} \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$, $dz_\alpha(x) : T_x X \longrightarrow \mathbb{C}^n$

induit une structure de $\mathbb{C}$-e.v sur $T_x X$

. indépendante de $\alpha$

$dz_\beta(x) : T_x X \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$T_x \xrightarrow{dz_\alpha(x)} \mathbb{C}^n \xrightarrow{dz_\beta(x)^{-1}} T_x X$$

$dz_{\beta\alpha}(x)$ $\mathbb{C}$-linéaire car $z_{\beta\alpha}$ est holom

$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ comme variétés $C^\infty$ réelles.

$(z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$

Donc $T_x \mathbb{C}^n \simeq T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$

L'identification $T_x \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n$ définit une structure de $\mathbb{C}$-e.v. sur $T_x \mathbb{C}^n$

Soit $J: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $J(z_1,\dots,z_n) = (iz_1,\dots,iz_n)$ la multiplication par $i$. $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, $(z_1,\dots,z_n) \mapsto (x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) \mapsto$

$$J: T_x\mathbb{C}^n \longrightarrow T_x\mathbb{C}^n$$

$$J^2 := J\circ J : T_x\mathbb{C}^n \longrightarrow T_x\mathbb{C}^n \quad \text{vérifie } J^2 = -id.$$

On a: $$\boxed{J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}}, \quad 1 \le j \le n.$$

preuve
$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar z_j} \implies J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = -i\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j} - \frac{\partial}{\partial z_j}\right) = i\left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar z_j}\right)$$

---

$z_j \mapsto iz_j = -y_j + ix_j$

$x_j + iy_j$

$(x_j, y_j) \mapsto (-y_j, x_j)$

$J$

$(-x_j, -y_j) = -(x_j, y_j)$

Soit

$J: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ $\mathbb{R}$-linéaire.

$(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n) \mapsto (-y_1,x_1,\dots,-y_n,x_n)$

$\mathbb{R}$-linéaire.

$J^2 = J\circ J = -id.$

$T_x\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ comme espaces vectoriels.

$\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j} \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$

On a: $J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$

$\mathbb{R}^{2n} \simeq T_x\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ comme $\mathbb{R}$-e.v.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \longmapsto 2\frac{\partial}{\partial z_j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, -\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) =$$

**Définition**

Soit $V$ e.v. réel, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ (dim. paire).

Une structure complexe sur $V$ est

$$J : V \longrightarrow V \quad \mathbb{R}\text{-linéaire}$$

t.q. $J^2 = -\mathrm{id}$.

**Observation** $J$ est un isomorphisme d'e.v.

. injectivité de $J$ : si $Ju = 0 \Rightarrow J^2 u = 0 \Rightarrow -u = 0 \Rightarrow u = 0$.

---

Soit $e_1, \dots, e_n \in V$, $\mathbb{R}$-lin. indépendants, quelconques.

Soit $f_k := J e_k$, $k = 1, \dots, n$. $\xRightarrow{J \text{ isomorphisme}}$ $f_1, \dots, f_n \in V$ sont $\mathbb{R}$-lin. indép.

On a : $J f_k = J^2 e_k = -e_k$, $k = 1, \dots, n$.

• $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ sont $\mathbb{R}$-lin. indép.

Si $f_k = \lambda e_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow J e_k = \lambda e_j \Rightarrow -e_k = \lambda J e_j = \lambda f_j$

**Lemme** $\exists \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ $\mathbb{R}$-base de $V$ t.q.

$$J e_k = f_k \qquad \forall k = 1, \dots, n. \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$J f_k = -e_k$$

**Dém**

Choisir n'importe quel $e_1 \in V \setminus \{0\}$, et $f_1 := J e_1$.

Si $Je_1 = \lambda e_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $J^2 e_1 = \lambda J e_1 \Rightarrow -e_1 = \lambda J e_1$

Si $\lambda \neq 0$, $\left.\begin{array}{l} Je_1 = -\frac{1}{\lambda} e_1 \\ Je_1 = \lambda e_1 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda} = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 = -1$ contrad ($\lambda \in \mathbb{R}$)

Et-maintenant

choisir $e_2 \notin \langle e_1, \underbrace{Je_1}_{f_1} \rangle$, $f_2 := Je_2 \Rightarrow f_2 \notin \langle e_1, Je_1 \rangle$

clair.

etc.

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = V \oplus iV$$

Le complexifié : $\tilde{J} : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-linéaire, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2n$.

$$\tilde{J}(u + iv) := Ju + iJv$$

Alors $\tilde{J}^2 = -\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}$ (clair) $\Rightarrow$ les v.p. de $\tilde{J}$ sont $i$ et $-i$.

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$u_j := \frac{1}{2}(e_j - i f_j)$

$v_j := \frac{1}{2}(e_j + i f_j)$ $j = 1 \to n$. on a $\tilde{J} u_j = i u_j$, $\tilde{J} v_j = -i v_j$ $j = 1 \to n$.

$V_{\mathbb{C}} = \underbrace{V^{1,0} \oplus V^{0,1}}_{\mathbb{C}\text{-sous-espaces vectoriels}}$, où $V^{1,0} := \ker(\tilde{J} - i\,\mathrm{Id}) = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle_{\mathbb{C}}$

$V^{0,1} := \ker(\tilde{J} + i\,\mathrm{Id}) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{C}}$ $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$

$\dim_{\mathbb{C}} V^{1,0} = \dim_{\mathbb{C}} V^{0,1} = n$

$\tilde{J} u = iu \Rightarrow \tilde{J} \bar{u} = -i\bar{u}$

$V^{1,0} \ni u \longmapsto \bar{u} \in V^{0,1}$ est une bijection, $\mathbb{C}$-antilinéaire.

$X$ var. anal. complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$.

$T_x X \xrightarrow{dz_\alpha(x)} \mathbb{C}^n$, $\quad$ où $X \supset U_\alpha \xrightarrow{z_\alpha} V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ni x$

~~isomorphisme~~ $\qquad\qquad$ biholom.

induit une structure d'e.v. complexe sur $T_x X$, indép. de $\alpha$ car $dz_{\alpha\beta}$ sont $\mathbb{C}$-linéaires

Soit $T_x^{\mathbb{R}} X$ le $\mathbb{R}$-e.v. sous-jacent.

$z_1, \ldots, z_n \longrightarrow x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ sur $\Omega \subset X$ ouvert.

$z_k = x_k + i y_k$

$T_X^{\mathbb{R}}|\Omega$ : $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$ est une $\mathbb{R}$-base.

On définit $J : T_x^{\mathbb{R}} X \longrightarrow T_x^{\mathbb{R}} X$, $\mathbb{R}$-linéaire, $\dim T_x^{\mathbb{R}} X = 2n$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} \longmapsto \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \longmapsto -\frac{\partial}{\partial x_k} \end{cases}$$

Clairement, $J^2 = -id$. Donc $J$ définit une structure complexe sur $T_x^{\mathbb{R}} X$, $\forall x$,

- $\mathbb{C}T_X := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_X^{\mathbb{R}}$ le complexifié

$\frac{\partial}{\partial z_k} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$, $\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$, $k = 1, \ldots, n$.
une $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{C}T_x X$

$$\mathbb{C}TX = \underbrace{T^{1,0}X}_{} \oplus \underbrace{T^{0,1}X}_{}$$

champ de vecteurs holomorphes | ou de type $(1,0)$)

$(0,1)$

$$\begin{cases} T^{1,0}X = \langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \rangle \\ T^{0,1}X = \langle \frac{\partial}{\partial \bar z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar z_n} \rangle \end{cases}$$

$T^{1,0}X \simeq (T_X^{\mathbb{R}}, J)$ canoniquement isomorphe

$\frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \longleftarrow\!\shortmid\; \xi$ $\qquad \mathbb{C}$- isomorphisme.

<u>En général</u> $\qquad V \longrightarrow V^{1,0}$ $\qquad \mathbb{R}$- isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v.

$$\xi \xmapsto{T^{1,0}} \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi)$$

$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^{1,0} = 2n.$

$V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$

$u + iv$

$= i\left(\frac{1}{2}(\xi - iJ\xi\right)$

. $T^{1,0}$ est bien défini: $\tilde J\left(\frac{1}{2}(\xi - iJ\xi)\right) = \frac{1}{2} J(\xi) + \frac{i}{2}\xi =$

. $T^{1,0}$ est injective: soit $\xi \in V$ t.q. $\frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) = 0$ dans $V^{1,0} \subset V_{\mathbb{C}}$.

$\Leftrightarrow \underset{\substack{\cap \\ V}}{\xi} = \underset{\substack{\cap \\ iV}}{iJ\xi} \Leftrightarrow \xi = 0$ et $J\xi = 0$

Donc, $V^{1,0}$ est une structure de $\mathbb{C}$-e.v. (celle de $V_{\mathbb{C}} \supset V^{1,0}$)

$\mathbb{C}$-ss espace

Ceci induit une structure de $\mathbb{C}$-e.v. sur $V$, appelée $J$.

Obs $V = \langle e_1, f_1, \dots, e_n, f_n \rangle_{\mathbb{R}}$ $\qquad V \ni e_j \xmapsto{T^{1,0}} Te_j = \frac{1}{2}(e_j - if_j) = u_j$

$V^{1,0} = \langle u_1, \dots, u_n \rangle_{\mathbb{C}}$ $\qquad V \ni f_j \xmapsto{T^{1,0}} Tf_j = \frac{1}{2}(f_j + ie_j) = iu_j$

~~$i\xi \xmapsto{T^{1,0}} \frac{1}{2}(i\xi - i\tilde J(i\xi)) = \frac{1}{2}(i\xi + \tilde J\xi)$~~

$T^{1,0} : (V, J) \longrightarrow (V^{1,0}, \tilde{J})$ est un $\mathbb{C}$-isomorphisme de $\mathbb{C}$-e.v. au sens suivant $\boxed{T^{1,0}(J\xi) = i\,T^{1,0}(\xi)}$

Preuve $\boxed{T^{1,0}(J\xi)} = \frac{1}{2}(J\xi - iJ^2\xi) = \frac{1}{2}(J\xi + i\xi) = i\,T^{1,0}(\xi)$

$\tilde{J}\left(\frac{1}{2}(\xi - iJ\xi)\right) = \frac{1}{2}(J\xi - iJ^2\xi) = \frac{1}{2}(J\xi + i\xi)$ $\Rightarrow$ $\boxed{T^{1,0}(J\xi) = \tilde{J}(T^{1,0}\xi)}$ $\forall \xi \in V$

• $V \longrightarrow V^{0,1}$ $\mathbb{R}$ isomorphisme de $\mathbb{R}$-e.v.

$\xi \overset{T^{0,1}}{\longmapsto} \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi)$

Déjà , bien défini : $\tilde{J}\left(\frac{1}{2}(\xi + iJ\xi)\right) = \frac{1}{2}(J\xi + iJ^2\xi)$

$= \frac{1}{2}(J\xi - i\xi)$

$= -i\,\frac{1}{2}(\xi + iJ\xi)$

. $T^{0,1}$ injectif : clair.

De plus, $T^{0,1} : (\overline{V}, J) \longrightarrow (V^{0,1}, \tilde{J})$ est un $\mathbb{C}$-isomorphisme de $\mathbb{C}$-e.v.

au sens suivant : $\boxed{T^{0,1}(J\xi) = -i\,T^{0,1}(\xi)}$

Preuve ~~$T^{0,1}(\overline{J}\xi) = T^{0,1}(\overline{J\xi}) = \frac{1}{2}(\overline{J\xi} + iJ\overline{J\xi})$~~

$\boxed{T^{0,1}(J\xi)} = \frac{1}{2}(J\xi + iJ^2\xi) = \frac{1}{2}(-i\xi + J\xi) = -i\,\frac{1}{2}(\xi + iJ\xi) = -i\,T^{0,1}(\xi)$

$\tilde{J}(T^{0,1}\xi) = \frac{1}{2}(J\xi + i\xi)$

On obtient
$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \simeq V \oplus \overline{V}$ où $\left\{\begin{array}{l} V^{1,0} \simeq V \\ V^{0,1} \simeq \overline{V} \end{array}\right.$ $\mathbb{C}$-isomorphismes

donc $V^{1,0} \simeq \overline{V^{0,1}}$

donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{0,1}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{V^{1,0}}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(V^{1,0}, \mathbb{C})$

On obtient :

$\mathbb{C}TX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X \simeq {}^{\mathbb{R}}TX \oplus \overline{{}^{\mathbb{R}}TX}$

$(\mathbb{C}TX)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}TX, \mathbb{C}) \simeq T^*X \oplus \overline{T^*X}$ , $T^*X := \{f : TX \to \mathbb{C} \ , \ \mathbb{C}\text{-lin}\} \simeq (T^{1,0}X)^*$

$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}({}^{\mathbb{R}}TX, \mathbb{C})$ $\qquad \overline{T^*X} := \{f : TX \to \mathbb{C} \ \ \mathbb{C}\text{-antilin.}\} \simeq (T^{0,1}X)^*$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{déf} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(TX, \mathbb{C}) : & dx_k, dy_k & \text{une base} \\ & T^{*}X : & dz_j & \text{une base} \\ & \overline{T^{*}X} : & d\bar{z}_j & \text{une base.} \end{array}\right\} \text{sur } \Omega \subset X \text{ où les coordonnées sont définies.}$$

$\forall f \in C^1(\Omega, \mathbb{C})$, la différentielle s'écrit:

$$df = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\, dy_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial z_k}\, dz_k}^{\partial f \ \mathbb{C}\text{-lin}} + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}\, d\bar z_k}^{\bar\partial f \ \mathbb{C}\text{-antilin}}\right)$$

en coordonnées réelles $\qquad\qquad\qquad$ coordonnées complexes

Observation $\quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

$f \in \mathcal{O}(\Omega) \iff \dfrac{\partial f}{\partial \bar z_k} = 0$ sur $\Omega$, $1 \leq k \leq n$. $\iff \bar\partial f = 0$ sur $\Omega \iff df = \partial f \iff df$ est $\mathbb{C}$-linéaire

(les éq. de C-R)

Calcul différentiel complexe

$$\Lambda^k(\mathbb{C} \otimes TX)^* = \Lambda^k(TX \oplus \overline{TX})^* = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^*X \quad , \quad 0 \leq k \leq 2n$$

algèbre des $k$-formes complexes

où $\quad \Lambda^{p,q} T^*X := \Lambda^p T^*X \otimes \Lambda^q \overline{T^*X}$

Soit $u$ une ~~$k$~~ forme différentielle complexe sur $X$.

$u$ de type $(p,q) \overset{\text{déf}}{\iff} u(z) \in \Lambda^{p,q} T^*_z X \quad \forall z \in X$.

$\forall \Omega \subset X$ ouvert, $C^s(\Omega, \Lambda^{p,q} T^*X) :=$ $(p,q)$ formes de classe $C^s$ sur $\Omega$.

Si $\Omega$ est un ouvert de coordonnées,

$$u(z) = \sum_{\substack{|I| = p \\ |J| = q}} u_{IJ}(z)\, dz_I \wedge d\bar z_J \quad , \quad u_{IJ} \in C^s(\Omega, \mathbb{C}).$$

• $d = \partial + \bar\partial$, où $\partial : C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^*X) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{p+1,q}T^*X)$

$\bar\partial : C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^*X) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{p,q+1}T^*X)$

où $$\partial u = \sum_{I,J} \sum_k \frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar z_J$$

$$\bar\partial u = \sum_{I,J} \sum_k \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar z_k} d\bar z_k \wedge dz_I \wedge d\bar z_J$$

$$d^2 = 0 \iff (\partial + \bar\partial)^2 = 0 \iff \begin{cases} \partial^2 = 0 \\ \partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0 \\ \bar\partial^2 = 0 \end{cases}$$

Le <u>complexe de Dolbeault</u> (défini par $\bar\partial$)

$$C^\infty(X, \Lambda^{p,0}T^*X) \xrightarrow{\bar\partial} C^\infty(X, \Lambda^{p,1}T^*X) \longrightarrow \cdots$$

<u>Les groupes de cohomologie de Dolbeault</u>

$$H^{p,q}(X, \mathbb{C}) := \frac{\ker \bar\partial^{p,q}}{\operatorname{Im} \bar\partial^{p,q-1}}$$, avec la convention $\operatorname{Im} \bar\partial^{p,-1} = \{0\}$.

Donc, $$H^{p,0}(X,\mathbb{C}) = \left\{ u = \sum_{|I|=p} u_I \, dz_I \ (p,0)\text{-formes} \;\middle|\; \frac{\partial u_I}{\partial \bar z_k} = 0 \ \ \forall I, \forall k \right\}$$

$$= \left\{ u = \sum u_I \, dz_I \;\middle|\; u_I \text{ est holomorphe } \forall I \right\}.$$

<u>$p$-formes holomorphes</u> sur $X$.

• Soit $F : \underset{n}{X_1} \longrightarrow \underset{m}{X_2}$ application <u>holomorphe</u> entre variétés complexes.

Si $u$ est une $(p,q)$-forme sur $X_2$ $\Rightarrow$ $F^*u$ est une $(p,q)$-forme sur $X_1$.

$F = (F_1, \dots, F_m)$ dans une carte, $F_1, \dots, F_m$ fonctions holomorphes $\Rightarrow$ $F^* dz_k = dF_k$ est $\mathbb{C}$-linéaire

$= \partial F_k$ car $F_k$ est holom

$$u = \sum_{\substack{|I|=r \\ |J|=q}} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar z_J \Rightarrow F^* u = \sum_{I,J} u_{IJ} \circ F\ \underset{\substack{dF_{i_1}\wedge \dots \wedge dF_{i_r} \\ \mathbb{C}\text{-lin}}}{\underset{\parallel}{dF_I}} \wedge \underset{\substack{d\bar F_{j_1}\wedge \dots \wedge d\bar F_{j_q} \\ \mathbb{C}\text{-antilin.}}}{\underset{\parallel}{d\bar F_J}}$$

- $d(F^* u) = F^*(du) \Rightarrow \begin{cases} \partial(F^* u) = F^*(\partial u) \\ \bar\partial(F^* u) = F^*(\bar\partial u) \end{cases}$ car $F^*$ préserve les types si $F$ est holomorphe.

<u>Attention</u> : faux si $F$ n'est pas holomorphe.

Donc, on obtient un <u>morphisme de tirage en arrière</u> en cohomologie de Dolbeault.

$$F^* : H^{r,q}(X_2, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{r,q}(X_1, \mathbb{C})$$

<u>Courants sur des variétés différentiables</u>

Soit $M$ var. $C^\infty$ réelle, $\dim_{\mathbb{R}} M = m$.

On suppose $M$ orientée.

<u>Topologie sur l'espace des $p$-formes de classe $C^s$ sur $M$</u> : $C^s(M, \Lambda^p T^* M)$

Soit $\Omega \subset M$ ouvert de coordonnées

$u$ $p$-forme sur $M$, $u(x) = \sum_{|I|=p} u_I(x)\, dx_I$ sur $\Omega$.

$\forall L \subset \Omega$ compact on définit une <u>semi-norme</u>

$\forall s \in \mathbb{N}$

$$P_L^s(u) := \sup_{x \in L} \max_{\substack{|I|=p \\ |\alpha| \le s}} |D^\alpha u_I(x)|$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$.

Définition (espaces des formes test)

a) $\mathcal{E}^r(M) := \Big( C^\infty(M, \Lambda^r T^* M)$, topologie définie par toutes les semi-normes $p_L^s$, $s \in \mathbb{N}$, $\underset{\text{compact}}{L} \subset \underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset X$ $\Big)$

b) $\forall K \subset M$ compact,

$\mathcal{D}^r(K) := \Big( \{ u \in \mathcal{E}^r(M) \mid \operatorname{Supp} u \subset K \}$, la topologie induite$\Big) \subset \mathcal{E}^r(M)$

$r$-formes $C^\infty$ à support (compact) dans $K$.

$\mathcal{D}^r(M) := \bigcup_K \mathcal{D}^r(K)$ $r$-formes $C^\infty$ sur $M$ à support compact

les $r$-formes test sur $M$

Observation. $M$ séparable $\Rightarrow$ la topologie de $\mathcal{E}^r(M)$ peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes ;

$M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$, $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ $\forall j$

$K_j$ compact dans $M$ $\forall j$

$\Rightarrow \mathcal{E}^r(M)$ est un espace de Fréchet. (et ${}^s\mathcal{E}^r(M)$ aussi)

. $\mathcal{D}^r(M) \underset{\text{dense}}{\subset} \mathcal{E}^r(M)$ $\Rightarrow$ pas complet dans la topologie induite.

Donc, $\mathcal{D}^r(M)$ n'est pas un espace de Fréchet.

Définition (espaces de courants, De Rham '55) & les espaces duaux

$\dim_{\mathbb{R}} M = m$.

L'espace des courants de dimension $r$ (ou de degré $m-r$) sur $M$ est l'espace

$\underset{\text{degré } m-r}{\mathcal{D}'^{m-r}(M)} = \underset{\dim r}{\mathcal{D}'_r(M)} := \Big\{ T : \mathcal{D}^r(M) \xrightarrow[\mathbb{R}\text{-linéaire}]{} \mathbb{R} \;\Big|\; T$ est continue dans toutes les semi-normes $p_L^s$, $\underset{\text{compact}}{L} \subset X$, $s \in \mathbb{N}$ $\Big\}$

le dual topologique de $(\mathcal{D}^r(M))'$ ${}^s\mathcal{D}'_r(M)$ = les courants d'ordre $s$ sur $M$.

Notation

$$\mathcal{D}'_r(M) \times \mathcal{D}^r(M) \ni (T,u) \longmapsto \langle T,u \rangle$$

. Le support de $T$ : $\operatorname{Supp} T$ = le plus petit fermé $A \subset M$ t.q. $T_{|\mathcal{D}^r(M\setminus A)} \equiv 0$.

Observation

Le dual topologique $\mathcal{E}'_r(M)$ de $\mathcal{E}_r(M)$ s'identifie à l'ensemble

$$\mathcal{E}'_r(M) = \{ T \in \mathcal{D}'_r(M) \mid \operatorname{Supp} T \text{ est compact} \}.$$

Démonstration

"$\subset$" Soit $T \in \mathcal{E}'_r(M)$ alors

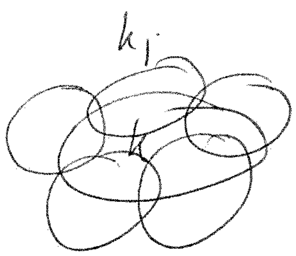
$$T : \mathcal{E}^r(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{linéaire t.q.}$$

$$\overbrace{\left| \langle T,u \rangle \right|}^{\text{can be made arbitrarily large if } \operatorname{Supp} T \not\subset K} \leq C\, \overbrace{p^s_K(u)}^{\text{depends only on } u_{|K}} \qquad \forall u \in \mathcal{E}^r(M)$$

pour certain $s \in \mathbb{N}$, $C \geq 0$, $K \subset M$ compact.

Alors $\operatorname{Supp} T \subset K$.

"$\supset$" Soit $T \in \mathcal{D}'_r(M)$ t.q. $\operatorname{Supp} T \subset K$ compact




Soit $K_j$ des compacts de carte t.q.

$$K \subset \bigcup_j \mathring{K}_j$$

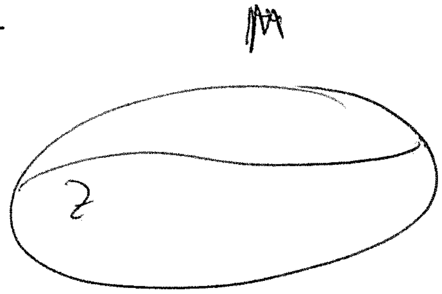
Soit $\psi \in \mathcal{D}^0(M)$ t.q. $\psi = \begin{cases} 1 & \text{sur } K \\ \operatorname{Supp} \psi \subset \bigcup_j K_j \end{cases}$

Soit $u \in \mathcal{E}^r(M)$

On définit $\langle T,u \rangle := \langle T, \psi u \rangle$. et $T$ est continue sur $\mathcal{E}^r(M)$.

indép du choix de $\psi$.

Exemple 1




$Z \subset M$
$n$-var orientée, bornée, de classe $C^1$

$\dim Z = p$, ($Z$ peut avoir un bord $\partial Z$)

Le courant d'intégration sur $Z$, noté $[Z]$ est défini comme

$$\langle [Z], u \rangle := \int_Z u \quad , \quad \forall u \in \mathcal{D}^p(M).$$

courant de dimension $p = \dim Z$ et d'ordre 0

$\operatorname{Supp} [Z] = Z$.

Exemple 2 Soit $f$ $q$-forme diff. sur $M$ à coeff. $L^1_{loc}$.

$T_f$ courant de degré $q$ (ou de dim. $n-q$):

$$\langle T_f, u \rangle = \int_M f \wedge u \quad , \quad u \in \mathcal{D}^{n-q}(M).$$

$f \longmapsto T_f$ est injective.

Analogue de: $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$
distribution.

Opérations sur les courants

1) La dérivée extérieure.

$T \in {}^s\mathcal{D}'^q(M)$, $\quad dT \in {}^{s+1}\mathcal{D}'^{q+1}(M)$,

$$\langle dT, u\rangle = (-1)^{q+1}\langle T, du\rangle, \quad \forall u \in {}^{s+1}\mathcal{D}^{m-q-1}$$

$dT$ est continue sur ${}^{s+1}\mathcal{D}^{m-q-1}(M)$ car

$$d : {}^{s+1}\mathcal{D}^{m-q-1}(M) \longrightarrow {}^{s}\mathcal{D}^{m-q}(M) \text{ est continue.}$$

Stokes : $\quad 0 = \int_M d(f\wedge u) = \int_M df\wedge u + (-1)^q \int_M f\wedge du \Leftrightarrow \overbrace{\langle T_f, (-1)^q du\rangle}^{-\langle dT_f,\, u\rangle} = -\langle T_{df}, u\rangle$

$\forall u \in \mathcal{D}^{m-q-1}$

$\forall f \in {}^1\mathcal{E}^q(M)$

Donc $\boxed{T_{df} = dT_f}$

$\dim Z = p.$

- $\int_Z du = \int_{\partial Z} u \quad \forall u \Rightarrow \langle [Z], du\rangle = \langle [\partial Z], u\rangle \Leftrightarrow (-1)^{m-p+1}\langle d[Z], u\rangle = \langle [\partial Z], u\rangle$

Donc $\boxed{d[Z] = (-1)^{m-p+1}[\partial Z]}$ si $\dim Z = p$.

2) <u>Le produit extérieur</u>

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, T \in {}^s\mathcal{D}'^q(M)\\ \forall\, g \in {}^s\mathcal{E}^r(M)\end{array}\right\} \longrightarrow T\wedge g \in {}^s\mathcal{D}'^{q+r}(M)$$

$$\langle T\wedge g, u\rangle := \langle T, g\wedge u\rangle \quad \forall\, u \in {}^s\mathcal{D}^{m-q-r}(M)$$

, bien défini car

${}^s\mathcal{D}^{m-q+1}(M) \ni u \longmapsto g \wedge u \in {}^s\mathcal{D}^{m-q}(M)$ est continue

On a : $\boxed{d(T\wedge g) = dT\wedge g + (-1)^{\deg T}\, T\wedge dg}$ (à vérifier ! facile !).

__Proposition__ $\Omega \subset M$ ouvert, $(x_1, \dots, x_n)$ coordonnées sur $\Omega$.

Alors : $\forall T \in {}^s\mathcal{D}'^q(M)$

$$\exists!\ T = \sum_{|I|=q} T_I\, dx_I \text{ sur } \Omega \quad , \quad dx_I := dx_{i_1}\wedge \dots \wedge dx_{i_q} \text{ si } I = (i_1, \dots, i_q)$$

où $T_I \in {}^s\mathcal{D}'^0(\Omega)$ (distributions d'ordre $s$ sur $\Omega$ vues comme des courants de degré 0)

__Démonstration__

__Unicité__ : si c'est vrai, $\forall f \in {}^s\mathcal{D}^0(\Omega)$ on a :

$$\langle T, f\, dx_{\complement I}\rangle = \langle T_I, dx_I \wedge f\, dx_{\complement I}\rangle = \underbrace{\varepsilon(I, \complement I)}_{\substack{\text{la signature de la permutation}\\ (1,\dots,n)\mapsto(I,\complement I)}} \langle T_I, \overbrace{f\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_n}^{\text{volume form}}\rangle$$

$\forall I$.

Ceci définit $T_I$ uniquement.

__Existence__ On définit $T_I$ par la formule ci-dessus.

Alors, on a $T = \sum_I T_I\, dx_I$

Cas particulier $T \in {}^0\mathcal{D}'^r(M)$ courant d'ordre 0 ⟶ vue comme une forme diff. à coeff. mesures

(car une distribution d'ordre 0 peut être vue comme une mesure (Riesz-Kakutani)).

Notation

$\forall\, T \in {}^s\mathcal{D}'^{m-r}(M)$
$\forall\, u \in {}^s\mathcal{E}^r(M)$ t.q. $\operatorname{Supp} T \cap \operatorname{Supp} u$ est compact, on pose

$$\boxed{\langle T, u\rangle := \int_M T \wedge u}$$

Image directe

$M_1 \xrightarrow[C^\infty]{F} M_2$, $M_1, M_2$ var. diff. orientées $m_1, m_2$, $T \in {}^s\mathcal{D}'_r(M_1)$

$F^* u \in {}^s\mathcal{E}^r(M_1)$; $u \in {}^s\mathcal{D}^r(M_2)$, $\underbrace{\operatorname{Supp} F^* u}_{} \subset F^{-1}(\operatorname{Supp} u)$
la forme tirée en arrière. peut ne pas être compact.

$$\underbrace{{}^s\mathcal{D}^r(M_2) \ni u \longmapsto F^* u \in {}^s\mathcal{E}^r(M_1)}_{T \in {}^s\mathcal{D}'_r(M_1)} \quad \text{continue.}$$

Définition Si $F_{|\operatorname{Supp} T}$ est propre (c-à-d, $\operatorname{Supp} T \cap F^{-1}(K) \subset M_1$ compact $\forall\, K \subset M_2$ compact)

alors la forme linéaire

$${}^s\mathcal{D}^r(M_2) \ni u \longmapsto \langle T, F^* u\rangle \in \mathbb{C} \quad \text{est bien-définie et cont.}$$

Donc $\exists!$ courant $F_* T \in {}^s\mathcal{D}'_r(M_2)$ (le courant image directe de $T$ par $F$) t.q.

$$\boxed{\langle F_* T, u\rangle = \langle T, F^* u\rangle} \quad \forall\, u \in {}^s\mathcal{D}^r(M_2)$$

Cas particulier

Soit $F : M_1 \longrightarrow M_2$ une submersion.
$m_1 = m_2 + r \quad m_2$

$q$ ~~[illegible]~~

$q$-forme sur $M_1$ $\boxed{\text{à coeff } L^1_{loc}.}$ t.q. $F|_{\text{Supp } q}$ est propre. (donc $q \in {}^0\mathcal{D}'^{\,q}(M_1)$
${}^0\mathcal{D}'_{m_1-q}(M_1)$

Alors $F_* q \in {}^0\mathcal{D}'_{m_1-q}(M_2)$ (on a même $F_* q \in L^1_{loc}$) est la forme de degré $q-(m_1-m_2) = m_2-(m_1-q)$.

obtenue de $q$ par intégration sur les fibres de $F$,

$$\boxed{(F_* q)(y) = \int_{z \in F^{-1}(y)} q(z)} \qquad \forall y \in M_2$$

$$\Leftrightarrow \int_{M_1} q \wedge F^* u = \int_{y \in M_2} \left( \int_{z \in F^{-1}(y)} q(z) \right) \wedge u(y) \qquad \forall u \in {}^0\mathcal{D}^{m_1-q}(M_2).$$

Fubini généralisé

Réduit au cas $M_1 = A \times M_2$, $F = M_2$

$F^{-1}(y) \simeq A$. orientés t.q. l'orientation de $M_1$ soit le produit de celles de $A$ et de $M_2$.

$r := \dim A = m_1 - m_2$

$z = (x,y) \in A \times M_2 = M_1$ and $(x,y) \xrightarrow{F} y$

$$(F^* u)(x,y) = (u \circ F)(x,y) = u(y)$$

On obtient :

$$\int_{A \times M_2} F_* q \wedge u = \int_{A \times M_2} q(x,y) \wedge u(y) = \int_{y \in M_2} \left( \int_{x \in A} q(x,y) \right) \wedge u(y)$$

Si $q = \sum_{i,j} q_{ij}(x,y)\, dx_i \wedge dy_j$, $|i| + |j| = q$,

$$(F_* q)(y) = \int_{x \in A} q(x,y) = \sum_{|j| = q-n} \underbrace{\left( \int_{x \in A} q_{[1,n],j}(x,y)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \right)}_{L^1_{loc}(M_2)} dy_j.$$

si $q \in L^1_{loc}(M_1)$

$\boxed{q \longmapsto F_* q \quad \text{continue en } \mathcal{D}\text{-topologie.}}$

Conclusion Si $q \in L^1_{loc}(M_1) \Rightarrow F_* q \in L^1_{loc}(M_2)$
Si $q \in C^\infty(M_1) \Rightarrow F_* q \in C^\infty(M_2)$

<u>Image inverse</u>

$F : M_1 \longrightarrow M_2$ <u>submersion</u>

$F^* T$ $\quad T \in {}^2\mathcal{D}'^q(M_2)$

$\overset{?}{\in} {}^2\mathcal{D}'^q(M_1)$

$\langle F^* T, u \rangle := \langle T, F_* u \rangle$, $\forall u \in {}^2\mathcal{D}^{q + m_1 - m_2}$ (bien défini par continuité de $\mathcal{U} \longmapsto F_* \mathcal{U}$).

- Si $T = [Z]$, $\underset{M_2}{\underset{\cap}{Z}}$ orientée, $C^1$, on obtient

$$\boxed{F^*[Z] = [F^{-1}(Z)]}$$

$$\int_{F^{-1}(Z)} u \overset{?}{=} \int_Z F_* u \qquad \forall u \in {}^2\mathcal{D}^\cdot(M_1)$$

$M_1 = A \times M_2$

$F = M_2$

$$\int_{y \in Z} F_* u(y) \overset{?}{=} \int_{(x,y) \in A \times Z} u(x,y) \quad \Leftarrow \quad \text{Fubini !}$$

Topologie faible sur $\mathcal{D}'^r(M)$ : la topologie définie par la collection de semi-normes

$$\mathcal{D}'^r(M) \ni T \longmapsto |\langle T, \varphi \rangle| \in \mathbb{R}, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{m-r}(M).$$

Toutes les opérations :

$$\left.\begin{array}{l} T \longmapsto dT \\ T \longmapsto T \wedge q \\ T \longmapsto F_* T \\ T \longmapsto F^* T \end{array}\right\} \text{ sont faiblement continues.}$$

$B \subset \mathcal{D}'^r(M)$ est borné (faiblement) $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \mathcal{D}'^r(M) \supset B \ni T \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$ est borné $\forall \varphi \in \mathcal{D}^{m-r}(M)$

Alaoglu : tout $B \subset \mathcal{D}'(M)$ faiblement borné ~~et~~ fermé est faiblement compact.

---

Lemme de Poincaré pour les courants

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert étoilé

$T \in {}^s\mathcal{D}'^q(\Omega)$, $q \geq 1$ tq. $dT = 0$.

un courant de degré $q \geq 1$ et d'ordre $s$

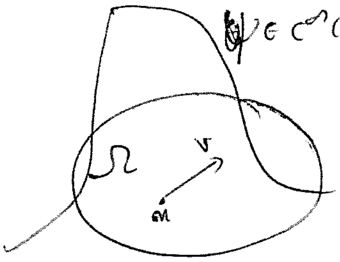
Alors $\exists\, S \in {}^s\mathcal{D}'^{q-1}(\Omega)$ tq. $dS = T$ sur $\Omega$.

Démonstration (esquisse)

1) On démontre : $\exists\, \theta \in C^\infty(\Omega, \Lambda^q T^*\Omega)$ (une $q$-forme lisse) tq.

$$d\theta = 0 \quad \text{et} \quad T = \theta + dS, \quad S \in {}^s\mathcal{D}'^{q-1}(\Omega)$$

(i.e. $T$ est cohomologue à une forme lisse $\theta$).



$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tq. $\operatorname{supp} \psi \subset \Omega$

$0 \le \psi \le 1$

$|d\psi| \le 1$ sur $\Omega$

$\forall v \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$, $\quad F_v(x) := x + \psi(x) v$

$F_v(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \Omega$.

$x \longmapsto \psi(x) v$ est une contraction

$\Rightarrow F_v : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}^m$ $C^\infty$ difféo. tq. $F_v(\Omega) = \Omega$

$\rho : \mathbb{R}^m \xrightarrow{C^\infty} [0, +\infty[$ s.t. • $\rho$ ne dépend que de $|x|$ • $\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x)\, dx = 1$ • $\operatorname{supp} \rho \subset B(0,1)$ ;

$F_v$ est homotope à id :

$$H_v(t,x) := F_{tv}(x) : [0,1] \times \Omega \longrightarrow \Omega.$$

Donc $(F_v)_* T - T \in$ Im d.

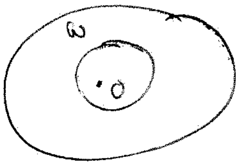
$$\theta := \int_{B(0,\varepsilon)} \left[ (F_v)_* T \right] \rho_\varepsilon(v)\, dv \quad \text{lisse.}$$

, où $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille de noyaux régularisants.

$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}^m} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$

<u>Lemme de Dolbeault-Grothendieck</u> (l'analogue $(p,q)$ du Lemme de Poincaré).

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$.



Soit $v \in {}^s\mathcal{E}^{p,q}(\Omega, \mathbb{C})$ $\quad [$resp. $v \in {}^s\mathcal{D}'^{p,q}(\Omega, \mathbb{C})]$ tq. $\bar\partial v = 0$.

$1 \le s \le \infty$

a) Si $q = 0$, alors $v(z) = \sum_{|I| = p} v_I(z)\, dz_I$ est une $p$-forme <u>holomorphe</u>

($\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow}$ les coefficients $v_I$ des fonctions holomorphes $\forall I$).

b) Si $q \ge 1$, $\exists\, 0 \in \omega \subset \Omega$ voisinage de 0 $\quad \exists\, u \in {}^s\mathcal{E}^{p,q-1}(\omega, \mathbb{C})$ $\quad [$resp. $\exists\, u \in {}^s\mathcal{D}'^{p,q-1}(\omega, \mathbb{C})$ courant tq. $\bar\partial u = v$ sur $\omega$

Réf. Voir Hörmander

## Fonctions sous-harmoniques

$\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ ; $x_1 \to x_m$ coordonnées

Ex L'opérateur de Laplace (le laplacien) :

$$\Delta := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \text{dans } \mathbb{R}^m.$$

$d\lambda := dx_1 \dots dx_m$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$

$\forall a \in \mathbb{R}^m$, $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x-a| < r\} \subset \mathbb{R}^m$

$\forall r \geq 0$ la boule euclidienne

$S(a,r) := \partial B(a,r) \subset \mathbb{R}^m$

la sphère correspondante.

$S(0,1) \subset \bar B(0,1) \subset \mathbb{R}^m.$

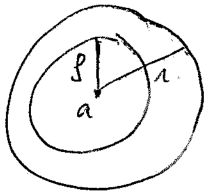

$\alpha_m := \mathrm{Vol}(B(0,1)) = \int_{B(0,1)} dx_1 \dots dx_m = \int_{B(0,1)} d\lambda$ On a : ~~Aire~~ $\boxed{\sigma_{m-1} = m\,\alpha_m}$

$\sigma_{m-1} := \cancel{\text{Aire}}(S(0,1))$

$2\pi = 2\pi$ dans $\mathbb{R}^2$ $(m=2)$

$\boxed{d\lambda = dr \wedge d\sigma}$

En général, $\begin{cases} \mathrm{Vol}(B(a,r)) = \alpha_m r^m \\ \text{Aire}(S(a,r)) = \sigma_{m-1} r^{m-1} \\ \qquad = m\,\alpha_m r^{m-1} \end{cases}$ $\forall r \geq 0$




En effet, $\mathrm{Vol}(B(a,r)) = \int_{B(a,r)} d\lambda = \int_0^r \left( \int_{S(a,\rho)} d\sigma \right) d\rho = \int_0^r \text{Aire } S(a,\rho)\, d\rho$

Donc $\text{Aire } S(a,\rho) = \left(r \longmapsto \mathrm{Vol}(B(a,r))\right)'(\rho) = \left(r \mapsto \alpha_m r^m\right)'(\rho) =$

$= m\,\alpha_m \rho^{m-1}$

En particulier, $\boxed{\sigma_{m-1} = m\,\alpha_m}$

Calcul de $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} d\lambda(x)$ en coordonnées polaires montre que

$$\alpha_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\left(\frac{m}{2}\right)!}, \quad \text{où } x! := \Gamma(x+1) \text{ est la } \underline{\text{fonction Gamma d'Euler}}$$

a)

<u>Le noyau de Newton</u> dans $\mathbb{R}^m$ est défini comme $\quad N : \mathbb{R}^m \longrightarrow [-\infty, +\infty[$

$$\begin{cases} N(x) = \frac{1}{2\pi} \log|x| , & \text{si } m = 2 \\ N(x) = -\frac{1}{(m-2)\sigma_{m-1}} |x|^{2-m} , & \text{si } m \neq 2. \end{cases}$$

<u>Théorème</u> $N \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$ et $\Delta N = \delta_0$ (c-à-d. $N$ est la solution fondamentale du Laplacien $\Delta$).
$N \in C^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ — dérivées au sens des distributions.

[ $N$ est harmonique sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, sous-harmonique sur $\mathbb{R}^m$ ]

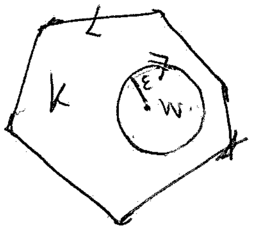
<u>Démonstration</u>

<u>Cas où $m=2$</u> $\quad \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$(x,y) \quad z = x+iy.$

On a $\boxed{\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}}$ (vérification triviale!)

<u>Rappel</u> (la formule de Cauchy généralisée dans $\mathbb{C}$).



$K \subset \mathbb{C}$ compact à bord $\partial K$ de classe $C^1$ par morceaux.

Alors, $\forall f \in C^1(K, \mathbb{C})$,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-w} dz - \int_K \frac{1}{\pi(z-w)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \, d\lambda(z), \qquad \forall w \in \mathring{K}$$

où $d\lambda(z) := \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = dx \wedge dy$ est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}$.

En particulier, si $f$ est holomorphe, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$ et la formule de Cauchy usuelle.

Démonstration

Soit $w = 0$.

~~Alors~~ $\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ est $\underbrace{L^1_{loc}}_{\text{mesure a.c. par rapport à Lebesgue}}$ près de $z=0$ ~~donc~~ :

Donc :

$$\int_K \frac{1}{\pi z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\lambda(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K\setminus D(0,\varepsilon)} \frac{1}{\pi z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\frac{i}{2}\, dz\wedge d\bar z$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K\setminus D(0,\varepsilon)} d\left[\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z)}{z}\, dz\right]$$

$$d\left(\frac{f(z)}{z}\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{z}\right)dz}_{\text{disparaît après } \wedge\, dz} + \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{f}{z}\right)d\bar z$$

car $\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ sur $K\setminus D(0,\varepsilon)$, $K\setminus D(0,\varepsilon) \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ étant holomorphe.

et $dz\wedge dz = 0$.

$d\bar z \wedge dz = - dz\wedge d\bar z$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z}\, dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)} f(z)\frac{dz}{z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,\varepsilon)} f(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta})\, i\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(0)$$

$z = \varepsilon e^{i\theta}$

$dz = \underbrace{\varepsilon e^{i\theta}}_{z}\, i\, d\theta$

$\frac{dz}{z} = i\, d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z}\, dz - f(0)$$

Corollaire La fonction $L^1_{loc}$ sur $\mathbb{C}$ :

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni z \longmapsto \frac{1}{\pi z} =: E(z) \in \mathbb{C}$$

, $E \in L^1_{loc}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{C})$ distributions sur $\mathbb{C}$ (courants de degré 0)

est la solution fondamentale de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ sur $\mathbb{C}$, c-à-d :

$$\frac{\partial E}{\partial \bar z} = \delta_0 \quad (\text{la masse de Dirac en } 0).$$

(au sens des distributions)

Par conséquent, si $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{C})$ (une distribution à support compact sur $\mathbb{C}$),

alors $u := \frac{1}{\pi z} * v$ est une solution de l'équation

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \bar z} = v.}$$

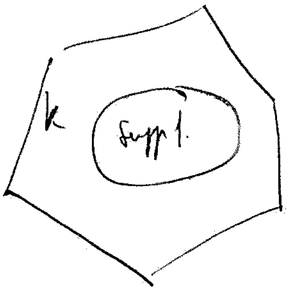
Démonstration

À vérifier : $\left\langle \frac{\partial E}{\partial \bar z}, f \right\rangle = \langle \delta_0, f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ fonction test.

$\iff -\left\langle E, \frac{\partial f}{\partial \bar z} \right\rangle = f(0), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$

$\iff f(0) = -\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi z} \frac{\partial f}{\partial \bar z} \, d\lambda(z), \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{C}).$

Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$, choisir $K \subset \mathbb{C}$ compact t.q. $\mathring{K} \supset \operatorname{Supp} f$.




Alors $f|_{\partial K} \equiv 0$.

Obs Si Supp $v$ n'est pas compact, on ne peut pas résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z} = v$$

par cette formule.

---

Retour au théorème sur N

Dans $\mathbb{R}^2$ : $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar z}$ et $\Delta N = 4 \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \bar z}\left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} \log |z|^2 \right)$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar z}\left( \frac{\bar z}{|z|^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left( \frac{1}{\pi z} \right) =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial \bar z} = \delta_0$$

Cas où $m \neq 2$

$$|x|^{2-m} = |x|^{2(1-\frac{m}{2})}. \text{ De plus, } \left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{1-\frac{m}{2}} \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{\text{unif. on compacts}} \left(|x|^2\right)^{1-\frac{m}{2}} = |x|^{2-m}$$

hence in $\mathcal{D}'$

Hence

$$\Delta\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{1-\frac{m}{2}} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{\text{weakly}} \Delta |x|^{2-m}$$

On calcule la limite faible

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Delta\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{1-\frac{m}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{1-\frac{m}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\left(1-\frac{m}{2}\right)\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}} x_j\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} (2-m) \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left[\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}} - \frac{m}{\cancel{2}}\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}-1}\cancel{2}\, x_j^2\right]}$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}-1}\left[|x|^2+\varepsilon^2 - m x_j^2\right]}$$

$$\parallel$$

$$\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}-1}\left[m\left(\cancel{|x|^2}+\varepsilon^2\right) - m\cancel{|x|^2}\right]$$

$$= m(2-m) \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}-1}$$

$$\parallel$$

$$i_m \delta_0$$

où $i_m = \int_{\mathbb{R}^m} \left(|x|^2+1\right)^{-1-\frac{m}{2}} d\lambda(x)$. (intégrale calculable en coordonnées polaires)

Obs $x \overset{C^\infty}{\longmapsto} \dfrac{\varepsilon^2}{\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{\frac{m}{2}+1}}$, $x \in \mathbb{R}^m$

but $\mathbb{R}^m \ni x \longmapsto \dfrac{1}{|x|^{m+2}}$ is not $L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$

En effet, $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ fonction test, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^2\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{-1-\frac{m}{2}} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^2\left(\varepsilon^2|y|^2+\varepsilon^2\right)^{-1-\frac{m}{2}} f(\varepsilon y)\, \varepsilon^m\, d\lambda(y)$$

C.V. $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $d\lambda(y) = \varepsilon^{-m} d\lambda(x)$ $\qquad \varepsilon^{2(-1-\frac{m}{2})} = \varepsilon^{-2-m}$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \left(|y|^2+1\right)^{-1-\frac{m}{2}} f(\varepsilon y)\, d\lambda(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} i_m f(0) = \langle i_m\delta_0, f\rangle$$

Coordonnées polaires:

$$I_m = \frac{\sigma_{m-1}}{m} \quad (\text{faire le calcul!})$$

Donc:
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Delta\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{1-\frac{m}{2}} = \cancel{m}(2-m)\,\frac{\sigma_{m-1}}{\cancel{m}}\,\delta_0 = (2-m)\,\sigma_{m-1}\,\delta_0$$

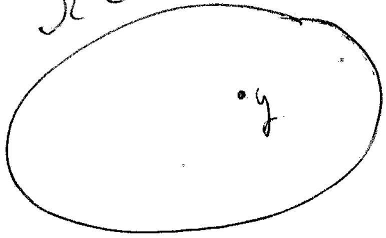
$$\Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta\left(-\frac{1}{(m-2)\,\sigma_{m-1}}\left(|x|^2+\varepsilon^2\right)^{1-\frac{m}{2}}\right) = \delta_0$$

$$\Rightarrow \Delta\left(-\frac{1}{(m-2)\,\sigma_{m-1}}\,|x|^{2-m}\right) = \delta_0 \qquad \text{q.e.d.}$$

b)

<u>Le noyau de Green</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ domaine borné à bord lisse.




<u>Définition</u> Le <u>noyau de Green</u> d'un domaine borné à bord lisse $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ est une fonction

$$G_\Omega(\cdot,\cdot) : \bar\Omega \times \bar\Omega \longrightarrow [-\infty, 0]$$

satisfaisant les propriétés suivantes:

a) $G_\Omega(\cdot,\cdot) \in C^\infty(\bar\Omega \times \bar\Omega \setminus \mathrm{Diag}_\Omega)$

b) $G_\Omega(x,y) = G_\Omega(y,x)$

c) $G_\Omega(x,y) < 0$ sur $\Omega \times \Omega$ et $G_\Omega(x,y) = 0$ sur $\partial\Omega \times \Omega$.

d) $\forall y \in \Omega$ fixé, on a:

$$\Delta_x G_\Omega(x,y) = \delta_y \text{ sur } \Omega.$$

Théorème (i) $G_\Omega$ existe et est unique.

(ii) Si $\Omega = B(0,r) \subset \mathbb{R}^m$, le noyau de Green de la boule est :

$$\boxed{G_r(x,y) = N(x-y) - N\left(\frac{|y|}{r}\left(x - \frac{r^2}{|y|^2}\,y\right)\right)} \quad , \quad \forall (x,y) \in \bar{B}(0,r).$$

Donc,

$$G_r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \log \dfrac{|x-y|^2}{r^2 - 2\langle x,y\rangle + \frac{1}{r^2}|x|^2|y|^2} & , \text{ si } m = 2 \\[2ex] \dfrac{-1}{(m-2)\,\sigma_{m-1}} \left( |x-y|^{2-m} - \left(r^2 - 2\langle x,y\rangle + \frac{1}{r^2}|x|^2|y|^2\right)^{1-\frac{m}{2}} \right) & , \text{ si } m \neq 2 \end{cases}$$

Démonstration

$$r^2 - 2\langle x,y\rangle + \frac{1}{r^2}|x|^2|y|^2 = |x-y|^2 + \frac{1}{r^2}\underbrace{(r^2-|x|^2)}_{\geq 0}\underbrace{(r^2-|y|^2)}_{\geq 0} \geq |x-y|^2, \text{ hence}$$

$\Rightarrow$ (a), (b), (c)

$$\log \frac{|x-y|^2}{r^2 - 2\langle x,y\rangle + \frac{1}{r^2}|x|^2|y|^2} \leq 0$$

$$\frac{r^2 y}{|y|^2} \notin \bar{B}(0,r) \quad \text{si} \quad y \in B(0,r)\setminus\{0\}$$

Donc

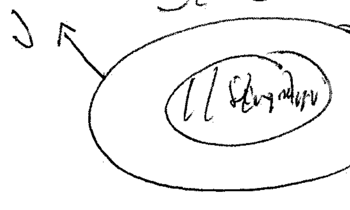
$$B(0,r) \ni x \longmapsto N\left(\frac{|y|}{r}\left(x - \frac{r^2}{|y|^2}\,y\right)\right) \in \mathbb{R}$$

est harmonique

Donc, $\Delta_x G_r(x,y) = \Delta_x N(x-y) = \delta_y$ sur $B(0,r)$

## La formule de Green-Riesz

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ domaine borné, à bord lisse



$\forall u, v \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, on a

$$\boxed{\int_\Omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\lambda = \int_{\partial\Omega}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma} \qquad (*)$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée le long du vecteur normal unitaire $\nu$ de $\partial\Omega$.

$d\sigma$ = la mesure d'aire euclidienne sur $\partial\Omega$

c-à-d :

$$\boxed{(-1)^{j-1}\,dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m \,\big|_{\partial\Omega} = \nu_j\, d\sigma}$$

Par conséquent,

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}}_{=\ \langle \nabla v, \nu\rangle} d\sigma = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_j}\,\nu_j\, d\sigma = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

Donc

$$(*) \iff \sum_{j=1}^m \int_\Omega \left(u\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - v\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) d\lambda = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1}\int_{\partial\Omega}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m - v\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m\right)$$

Mais

$$d\left(\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m\right) = (-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial x_j} - v\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

$$= (-1)^{j-1}\left(u\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - v\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$ . Stokes !

---

if $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m) = \sum_{j=1}^m \nu_j \frac{\partial}{\partial x_j} \simeq \frac{\partial}{\partial \nu}$,

then $\boxed{\nu \simeq \frac{\partial}{\partial \nu}}$ and

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^m \nu_j \frac{\partial f}{\partial x_j}}$$

$$= \langle \nabla f, \nu\rangle$$

$$= \langle df, \underbrace{\langle \nu, dx\rangle}_{\text{1-form}}\rangle$$

$$\boxed{\langle \nu, dx\rangle \wedge d\sigma = d\lambda}$$

the 1-form with same coefficients as $\nu$

Obs $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \langle df, dx_j\rangle$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \cancel{\langle df, d\nu\rangle} = \langle df, \sum_\ell \nu_\ell\, dx_\ell\rangle = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\nu_j = \langle \nabla f, \nu\rangle$$

(α) est valable $\forall u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$

$\forall v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.q. $\operatorname{Sing\,supp} v \subset\subset \Omega$.

**Recall**

$\operatorname{Singsupp} v$ = the complement of the largest open set on which $v$ is $C^\infty$

---

Pour $\Omega = B(0,1)$

$u \in C^2(\overline{B}(0,1), \mathbb{R})$ (fonction de $y$)

$v_x(y) \equiv v(y) := G_1(x,y)$

(α) devient pour tout $x \in B(0,1)$ :

La formule de représentation de Green-Riesz

$$(\alpha\alpha)\quad \boxed{u(x) = \underbrace{\int_{B(0,1)} \Delta u(y)\, G_1(x,y)\, d\lambda(y)}_{\text{the anti-harmonic part of } u} + \underbrace{\int_{S(0,1)} u(y) \underbrace{\frac{\partial G_1(x,y)}{\partial \nu(y)}}_{P_1(x,y)} d\sigma(y)}_{\text{the harmonic part of } u}}\ , \quad x \in B(0,1)$$

car $G_1(x,y) = 0$ sur $S(0,1) = \partial B(0,1)$

$P_1(\cdot,\cdot) : B(0,1) \times S(0,1) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ le noyau de Poisson

On a : $\boxed{\Delta_x P_1(x,y) = 0}$ $\forall y \in S(0,1)$ $\forall x \in B(0,1)$

Calcul simple (à faire !)

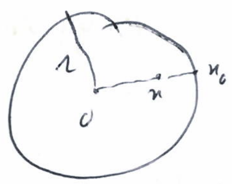
$$\boxed{P_1(x,y) = \frac{1}{\sigma_{m-1} 1} \frac{1^2 - |x|^2}{|x-y|^m} > 0} \quad (x,y) \in B(0,1) \times S(0,1)$$

Donc on a une famille de mesures $C^\infty$ de probabilité sur $S(0,1)$ :

$$\big(P_1(x,y)\, d\sigma(y)\big)_{x \in B(0,1)}$$

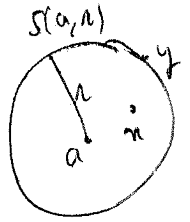
Obs pour $u \equiv 1$, (αα) donne :

$$\int_{S(0,1)} P_1(x,y)\, d\sigma(y) = 1 \quad \forall x \in B(0,1)$$




$\Rightarrow$ solution du problème de Dirichlet

## Solution du problème de Dirichlet




$\forall\, v : S(a,r) \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, bornée,

on pose

$$P_{a,r}[v](x) := \int_{S(a,r)} v(y)\, P_r(x-a, y-a)\, d\sigma(y) \quad , \; x \in B(a,r).$$

<u>Définition</u> $u : B(a,r) \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ est dite <u>harmonique</u> $\overset{\text{déf.}}{\iff}$

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur } B(a,r).$$

---

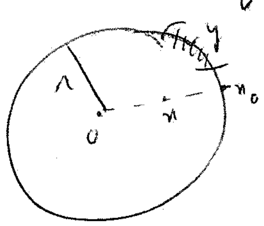
Si $u \in C^2(B(a,r), \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{B(a,r)}, \mathbb{R})$ est harmonique, $(\ast\alpha)$ donne :

$$\boxed{u(x) = \int_{S(a,r)} u(y)\, P_r(x-a, y-a)\, d\sigma(y)} \quad , \; x \in B(a,r) \iff u = P_{a,r}[u] \text{ sur } B(a,r)$$

$\Rightarrow$ $P_r(\cdot,\cdot)$ reproduit les fonctions harmoniques.

<u>Inversement</u> Supposons que $v \in C^0(S(a,r), \mathbb{R})$ est donnée.

It suffices to show that
$\underbrace{P_r(x,\cdot)\, d\sigma(\cdot)}_{C^\infty \text{ positive measure on } S(0,r) \text{ for every fixed } x \in B(0,r)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \delta_{x_0}$ $\forall x_0 \in S(0,r)$ fixed
• $P_r(x,y) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ uniformly wrt $y \in K \subset S(0,r) \setminus \{x_0\}$, $K$ compact




lorsque $B(0,r) \ni x \longrightarrow x_0 \in S(0,r)$, on a :

$$P_r(x,y) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \quad \text{uniformément pour } y \in \text{tout compact de } S(0,r) \setminus \{x_0\}.$$

Donc, la mesure

$$\underbrace{P_r(x,y)\, d\sigma(y)}_{C^\infty \text{ mesures de proba sur } S(0,r)\ \forall x \in B(0,r)} \xrightarrow[x \to x_0]{} \underbrace{\delta_{x_0}}_{\text{mesure de proba sur } S(0,r)} \quad \text{faiblement sur } S(0,r).$$

En particulier,

$$\underbrace{P_r(x-a, y-a)\, d\sigma(y)}_{\text{mesures sur } S(a,r)} \xrightarrow[x \to x_0 \in S(a,r)]{} \delta_{x_0} \implies P_{a,r}[v](x) \xrightarrow[x \to x_0]{} v(x_0)$$

car $v$ est continue sur $S(a,r)$ (donc fonction test pour les mesures)

Donc $\left\{\begin{array}{ll} u = P_{a,r}[v] & \text{sur } B(a,r) \\ u = v & \text{sur } S(a,r) \end{array}\right.$ est continue sur $\overline{B}(a,r)$

est harmonique sur $B(a,r)$.

$\Rightarrow$ $u$ est la solution du problème de Dirichlet à valeurs au bord égales à $v$.

## Fonctions sous-harmoniques

$u : \overline{B}(a,r) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ une fonction borélienne.

Supposons que $u$ est bornée supérieurement ou inférieurement.

Valeurs moyennes de $u$

$$\mu_B(u;a,r) := \frac{1}{\tau_m r^m} \int_{B(a,r)} u(x)\, d\lambda(x)$$

la boule

$$\mu_S(u;a,r) := \frac{1}{\sigma_{m-1} r^{m-1}} \int_{S(a,r)} u(x)\, d\sigma(x)$$

la sphère.

Remark $\boxed{\mu_S(u;0,r) = P_{0,r}[u](0)}$

Indeed,

$$P_{0,r}[u](0) = \int_{S(0,r)} \underbrace{P_r(0,y)}_{= \frac{1}{\sigma_{m-1} r^{m-1}}} u(y)\, d\sigma(y) = \mu_S(u;0,r)$$

On a : $\boxed{d\lambda = dr \wedge d\sigma}$, donc

$$\boxed{\mu_B(u;a,r) \underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\tau_m r^m} \int_0^r \underbrace{\sigma_{m-1}}_{= m\tau_m} t^{m-1} \mu_S(u;a,t)\, dt}$$

$$= \frac{m}{r^m} \int_0^r t^{m-1} \mu_S(u;a,t)\, dt = \boxed{m \int_0^1 u^{m-1} \mu_S(u;a,ru)\, du}$$

$t = ru$, $dt = r\, du$

Corollary $\boxed{\mu_B(u;a,r) \le \mu_S(u;a,r)}$ $\forall r > 0$ Proof $\mu_B(u;a,r) = m \int_0^1 t^{m-1} \mu_S(u;a,rt)\, dt$

(although we have proved this) $\forall t \in [0,1]$ $\longrightarrow \le \mu_S(u;a,r)$

Remark

Green-Riesz for $a=0$ : since the following formulae hold

$$\begin{cases} P_r(0,y) = \dfrac{1}{\sigma_{m-1} r} \dfrac{r^2}{|y|^m} = \dfrac{1}{\sigma_{m-1} r} \dfrac{r^2}{r^m} = \dfrac{1}{\sigma_{m-1} r^{m-1}}, \\ \forall y \in S(0,r) \\ G_r(0,y) = \dfrac{-1}{(m-2)\sigma_{m-1}} \underbrace{\left(|y|^{2-m} - r^{2-m}\right)}_{\shortparallel \;\; -(2-m)\int_{|y|}^{r} t^{1-m}\,dt} = -\dfrac{1}{\sigma_{m-1}} \displaystyle\int_{|y|}^{r} t^{1-m}\,dt \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{|y|}^{r} \frac{dt}{t^{m-1}}$$

Then: we get from Green-Riesz the anti-harmonic part of $u$

$$\int_{B(0,r)} \Delta u(y)\, G_r(0,y)\, d\lambda(y) \overset{\text{Fubini}}{=} -\frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_0^r \frac{dt}{t^{m-1}} \int_{|y|<t} \Delta u(y)\, d\lambda(y) = -\frac{1}{m} \int_0^r t \frac{dt}{\alpha_m t^m} \int_{|y|<t} \Delta u\, d\lambda(y)$$

$$\shortparallel$$

$$-\frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{B(0,r)} \Delta u(y) \left( \int_{|y|}^{r} \frac{dt}{t^{m-1}} \right) d\lambda(y)$$

$$= -\frac{1}{m} \int_0^r \mu_B(\Delta u; 0, t)\, t\, dt$$

$|y| \leq t \leq r$

$0 \leq |y| < r$

Green-Riesz donne :

$$\mu_S(u; 0, r) = u(0) + \frac{1}{m} \int_0^r \mu_B(\Delta u; 0, t)\, t\, dt$$

$0 \longrightarrow a$ :

$$\boxed{\mu_S(u; a, r) = u(a) + \frac{1}{m} \int_0^r \mu_B(\Delta u; a, t)\, t\, dt}$$

Formule de Gauss.

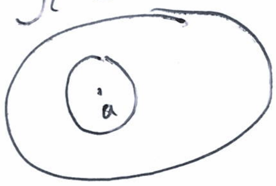
$\boxed{\text{Corollary of Gauss: if } u \text{ is subharmonic, then } r \longmapsto \mu_S(u; a, r) \text{ is non-decreasing because } \Delta u \geq 0 \text{ (at least when } u \in C^2)}$

Remarque

$$\boxed{P_{0,r}[v](0)} = \int_{S(0,r)} v(y) \underbrace{P_r(0,y)}_{= \frac{1}{\sigma_{m-1} r^{m-1}}}\, d\sigma(y) = \frac{1}{\sigma_{m-1} r^{m-1}} \int_{S(0,r)} v(y)\, d\sigma(y) = \mu_S(v; 0, r)$$

## Corollaire

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert $\qquad \boxed{u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})} \qquad \left(\text{i.e. } u : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}\right)$



Si $a \in \Omega$ et $\Delta u(a) > 0 \Rightarrow u(a) < \mu_S(u; a, r)$ pour $r > 0$ petit.

(car $\Delta u(x) > 0$ pour $x$ près de $a$ par continuité)

Si $\Delta u(a) < 0 \Rightarrow u(a) > \mu_S(u; a, r)$ —— " ——

~~Si u est harmonique (i.e. Δu = 0 sur Ω)~~ ⇒

En particulier,

$u$ est harmonique (c-à-d $\Delta u = 0$ sur $\Omega$) $\Leftrightarrow$

$$\boxed{u(a) = \mu_S(u; a, r) \quad \forall\ \overline{B}(a, r) \subset \Omega.}$$

(l'égalité de la moyenne pour $\Omega$)

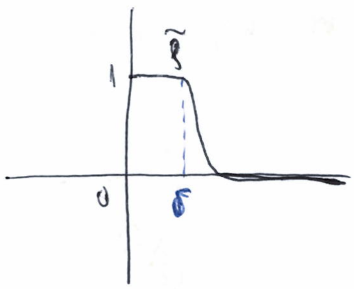
$u$ vérifie l'inégalité de la moyenne

$u(a) \leq \mu_S(u; a, r) \quad \forall\ \overline{B}(a, r) \subset \Omega$

$\Updownarrow$

$\Delta u \geq 0$ sur $\Omega$.

## Observation




$\tilde{\rho} : [0, +\infty[ \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tilde{\rho} \leq 1$

$$\tilde{\rho}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t \leq \delta \\ 0, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$\rho(x) := \tilde{\rho}(|x|) \qquad \rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^m}\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad (\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille de noyaux régularisants.

$\rho : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \qquad$ ne dépend que de $|x|$

$\operatorname{supp} \rho \subset B(0,1) \qquad \operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$

$\int_{\mathbb{R}^m} \rho(x)\, d\lambda(x) = 1 \qquad \int_{\mathbb{R}^m} \rho_\varepsilon(x)\, d\lambda(x) = 1$

Si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ borélienne, localement bornée, on a :

$$u * \rho_\varepsilon(a) = \int_{B(0,1)} u(a+\varepsilon x)\,\underbrace{\rho(x)}_{=\tilde\rho(|x|)}\,d\lambda_m(x) = \sigma_{m-1}\int_0^1 \mu_S(u;\, a, \varepsilon t)\,\tilde\rho(t)\, t^{m-1}\,dt$$

$d\lambda_m = dt \wedge d\sigma_{m-1}$

$$\| \qquad \int_{|y|<\varepsilon} u(a-y)\,\underbrace{\rho_\varepsilon(y)}_{=\frac{1}{\varepsilon^m}\rho\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)}\,d\lambda_m(y) \underset{y=\varepsilon x}{=} \int_{x\in B(0,1)} u(a-\varepsilon x)\,\rho(x)\,d\lambda_m(x) = \int_{x\in B(0,1)} u(a+\varepsilon x)\,\rho(x)\,d\lambda_m(x).$$

Donc, si $u$ est borélienne, localement bornée et satisfait l'égalité de la moyenne sur $\Omega$, on a :

$$\boxed{u * \rho_\varepsilon(a) = u(a)} \qquad \forall a \in \Omega_\varepsilon.$$

Donc $u \in C^\infty(\Omega)$.

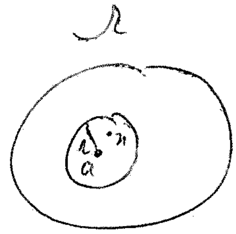
Prop (i) if $u$ is $C^2$, then $\Delta u = 0 \Leftrightarrow u(a) = \mu_S(u;\, a, r)$ $\forall \overline{B(a,r)} \subset \Omega$

(ii) if $u$ is Borel and $L^\infty_{loc}$, then $u(a) = \mu_S(u, a, r)$ $\forall B(a,r) \subset \Omega \Rightarrow u$ is $C^\infty$

Théorème et définition

Soit $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction semi-continue supérieurement (s.c.s).

Les formes suivantes de l'inégalité de la moyenne (ou de la sous-moyenne) sont équivalentes :




a) $u(x) \le \underbrace{P_{a,r}[u](x)}_{\substack{\text{harmonique} \\ \text{sur } B(a,r)}}$, $\forall \bar B(a,r) \subset \Omega$, $\forall x \in B(a,r)$

(la "régularisée harmonique de $u$")

b) $u(a) \le \mu_S(u;\, a, r)$, $\forall \bar B(a,r) \subset \Omega$. ((b) est (a) appliqué à $x=a$)

c) $u(a) \le \mu_B(u;\, a, r)$, $\forall \bar B(a,r) \subset \Omega$

Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, +\infty[$, s.c.s. qui vérifie (a) ou (b) ou (c) est dite <u>sous-harmonique sur $\Omega$</u>.

$$Sh(\Omega) := \{ u : \Omega \to [-\infty, +\infty[ \;/\; u \text{ sous-harmonique sur } \Omega \}.$$

(d) $\forall a \in \Omega \quad \exists \, r_a > 0$ tq.

$$u(a) \leq \mu_B(u; a, r) \quad \forall \, 0 \leq r \leq r_a$$

(d') $\forall a \in \Omega \quad \exists \, r_\nu \searrow 0$ tq.

$$u(a) \leq \mu_B(u; a, r_\nu) \quad \forall \nu$$

e) $\forall a \in \Omega \quad \exists \, r_a > 0$ tq.

$$u(a) \leq \mu_S(u; a, r) \quad \forall \, 0 \leq r < r_a$$

(e') — " ——

<u>Corollaire 1</u> Soit $u : \Omega \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$.

Alors :

$u$ est sous-harmonique sur $\Omega$ $\iff$ $\Delta u \geq 0$ sur $\Omega$.

<u>preuve</u>

"$\Rightarrow$" Si $\Delta u(a) < 0$ en un certain $a \Rightarrow$ $u(a) > \mu_S(u; a, r) \quad \forall r \leq r_a$

"$\Leftarrow$" On l'a déjà vu. (Cf. Cours).

<u>Corollaire 2</u> Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est (localement) convexe, alors $u$ est sous-harmonique.

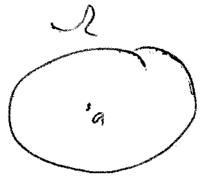
<u>Démonstration</u>

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) : évident.

~~$\mu_B(u; a, r) = \int^r t^{n} \mu_S(u; a, t) \, dt$~~ $\mu_B(u; a, r_\nu) \leq \mu_S(u; a, t)$ pour au moins un $t \in (0, r_\nu)$

la relation entre les valeurs moyennes.

Reste à prouver e) $\Rightarrow$ a).




**Lemme**

Soit $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ s.c.s. telle que

$$\forall a \in \Omega \quad \exists\, r_\nu \searrow 0 \quad \text{tq.} \quad u(a) \le \mu_S(u; a, r_\nu) \quad \forall \nu \qquad (e')$$

Si $\exists\, x_0 \in \Omega$ tq. $u(x_0) = \sup_\Omega u$, alors $u$ est constante dans la composante connexe de $x_0$ dans $\Omega$.

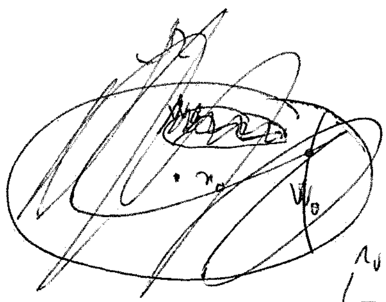
**Preuve** Supposons $\Omega$ connexe.

$$W := \{x \in \Omega \mid u(x) < u(x_0)\} \subset \Omega.$$

ouvert (car $u$ est s.c.s.).

$x_0 \notin W \Rightarrow W \subsetneq \Omega$.

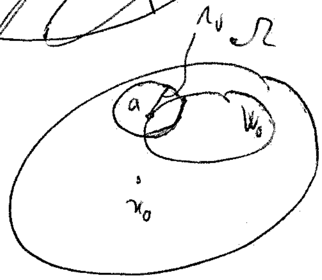
On montre que $W = \emptyset$.



Supposons que $W \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, \emptyset \neq W_0 \subset W$ composante connexe.

$\Downarrow$

$W_0$ ouvert dans $\Omega$.




$W_0 \cap S(a, r_\nu) \neq \emptyset$

$\exists\, a \in (\partial W_0) \cap \Omega.$

$\Downarrow$

$a \notin W_0$

$\Downarrow$

$a \notin W \Rightarrow \boxed{u(a) = u(x_0)}$

Par ailleurs, $(e') \Rightarrow u(a) \le \mu_S(u; a, r_\nu)$ pour quelque $r_\nu \searrow 0$.

Si $r_\nu \ll 1$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} W_0 \cap (\Omega \setminus \bar{B}(a, r_\nu)) \neq \emptyset \\ W_0 \cap B(a, r_\nu) \neq \emptyset \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{connexe}]{W_0} \boxed{\underbrace{S(a, r_\nu) \cap W_0}_{\text{open in } S(a, r_\nu)} \neq \emptyset.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Or,} \quad u \le u(x_0) \text{ sur } S(a, r_\nu) \\ u < u(x_0) \text{ sur } \boxed{\begin{array}{c} S(a, r_\nu) \cap W_0 \\ \cap \text{ ouvert} \\ S(a, r_\nu) \end{array}} \end{array}\right\} \Rightarrow \Big(u(a) \le \mu_S(u; a, r_\nu)\Big) < u(x_0) = u(a)$$

contradiction

## Principe du maximum

Si $u:\Omega\to[-\infty,+\infty[$ est sous-harmonique (au sens où $u$ satisfait (e')) "le plus faible",

alors :

$$\sup_\Omega u = \limsup_{\Omega\ni z\to\partial\Omega\cup\{\infty\}} u(z) \quad \text{et} \quad \sup_K u = \sup_{\partial K} u \quad \forall K\subset\Omega \text{ compact}$$

### Preuve

Bien-sûr, $\displaystyle\limsup_{\Omega\ni z\to\partial\Omega\cup\{\infty\}} u(z) \le \sup_\Omega u$.

Si "<", $\exists K\subset\Omega$ compact tq. $\sup_\Omega u = \sup_K u$.

$u$ s.c.s. $\Rightarrow \exists x_0\in K$ tq. $u(x_0)=\sup_K u$ $\Bigg\} \Rightarrow u(x_0)=\sup_\Omega u$.

Lemme $\Rightarrow$ $u=u(x_0)$ sur $\Omega_0\subset\Omega$ la composante connexe de $x_0$.

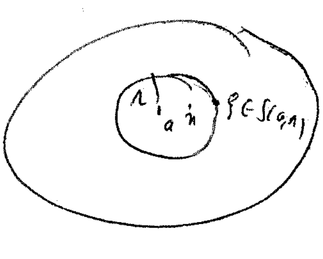
Mais, $\displaystyle\sup_\Omega u = u(x_0) = \limsup_{\Omega_0\ni z\to\partial\Omega_0\cup\{\infty\}} u(z) \le \limsup_{\Omega\ni z\to\partial\Omega\cup\{\infty\}} u(z)$ Contrad.

---

### preuve de (e') $\Rightarrow$ (a)

Soit $u:\Omega\to[-\infty,+\infty[$ s.c.s. qui satisfait (e') (c-à-d. $\forall a\in\Omega$, $\exists r_\nu\downarrow 0$ tq $u(a)\le\mu_S(u;a,r_\nu)$ $\forall\nu$)

Soit $\bar B(a,r)\subset\Omega$. On veut $u \overset{?}{\le} \underbrace{P_{a,r}[u]}_{\text{harmonique}}$




On aimerait regarder

$$\limsup_{x\to\xi\in S(a,r)} \left(u(x)-P_{a,r}[u](x)\right) \overset{?}{\le} 0.$$

Or $\displaystyle\limsup_{x\to\xi\in S(a,r)} u(x)\le u(\xi)$ car $u$ est s.c.s.

(Ceci suffit par le principe du max) mais $\displaystyle\limsup_{x\to\xi\in S(a,r)} P_{a,r}[u](x)$ peut ne pas exister. Car $u$ n'est pas continue sur $S(a,r)$.

$u$ s.c.s. $\Rightarrow \exists\, v_k \downarrow u$ sur $S(a,r)$ , $v_k \in C^0(S(a,r), \mathbb{R})$.

Alors $\limsup\limits_{x \to \xi \in S(a,r)} \left(u(x) - P_{a,r}[v_k](x)\right) \leq u(\xi) - v_k(\xi) \leq 0$ , $\forall \xi \in S(a,r)$

car $\lim\limits_{x \to \xi \in S(a,r)} P_{a,r}[v_k](x) = v_k(\xi)$.

Par ailleurs, $P_{a,r}[v_k]$ est harmonique dans $B(a,r) \Rightarrow u - P_{a,r}[v_k]$ satisfait $(\varepsilon')$.

$\xrightarrow[\text{max}]{\text{principe du}}$ $u - P_{a,r}[v_k] \leq 0$ dans $B(a,r)$.

$\Downarrow$ convergence monotone

$u \leq P_{a,r}[u]$ dans $B(a,r)$

## Propriétés des fonctions sous-harmoniques

**Théorème** Si $(u_k)_k$ est une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques, alors

$$u := \lim \downarrow u_k \quad \text{est sous-harmonique.}$$

**preuve** $u_k \downarrow u$ ; $u_k$ s.c.s $\forall k \Rightarrow u$ s.c.s.

$u_k(a) \leq \mu_B(u_k; a, r) \quad \forall k \Rightarrow u(a) \leq \mu_B(u; a, r)$ par le thm de convergence monotone de Lebesgue.

**Théorème** Soit $u_1, \dots, u_p : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ sous-harmoniques.

$\chi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe t.q.

$\mathbb{R} \ni t_j \longmapsto \chi(t_1, \dots, t_j, \dots, t_p) \in \mathbb{R}$ est croissante $\forall j = 1, \dots, p$.

Alors $\chi(u_1, \dots, u_p) \in Sh(\Omega)$.

En particulier, $u_1 + \dots + u_p$, $\max\{u_1, \dots, u_p\}$, $\log(e^{u_1} + \dots + e^{u_p}) \in Sh(\Omega)$.

**Obs** $\chi : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ ~~est~~ prolongée par continuité à $\chi : [-\infty, +\infty[^p \longrightarrow [-\infty, +\infty[$.

Preuve $\chi$ convexe $\Rightarrow$ $\chi$ continue. $\Rightarrow$ $\chi(u_1, \dots, u_p)$ s.c.s.

Par ailleurs,

$\chi$ convexe $\Rightarrow$ $\chi(t) = \sup\limits_{i \in I} (a_{i1} t_1 + \dots + a_{ip} t_p + b_i)$ (l'enveloppe convexe d'hyperplans)

famille de fonctions affines définissant des hyperplans qui soutiennent Graphe($\chi$).

$t_j \mapsto \chi(\dots, t_j, \dots)$ croissante $\forall j$ $\Rightarrow$ $a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j$

Donc :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_j(x) + b_i \underset{\uparrow}{\leq} \mu_B\left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_j + b_i; x, r\right) \leq \mu_B\left(\chi(u_1, \dots, u_p); x, r\right)$$

car chaque $u_j$ est s-harmonique.

$\forall\, \overline{B}(x,r) \subset \Omega$, $\forall i \in I$

prendre $\sup\limits_{i \in I}$.

---

Exemple $\chi(t_1, \dots, t_p) = \log(e^{t_1} + \dots + e^{t_p})$ est convexe car

$$\sum_{j,k=1}^{p} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t_j \partial t_k} \xi_j \xi_k = e^{-\chi} \sum_j e^{t_j} \xi_j^2 - e^{-2\chi}\left(\sum_j e^{t_j} \xi_j\right)^2 \geq 0$$

le Hessien (réel) de $\chi$ et $\left(\sum_j e^{t_j} \xi_j\right)^2 \overset{C\text{-}S}{\leq} \left(\sum_j \xi_j^2 e^{t_j}\right) \underbrace{\left(\sum_j e^{t_j}\right)}_{= e^{\chi}} = e^{\chi} \sum_j \xi_j^2 e^{t_j}$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t_j} = \frac{1}{e^{t_1} + \dots + e^{t_p}} e^{t_j} \; ; \; \frac{\partial^2 \chi}{\partial t_j \partial t_k} = \frac{\delta_{jk}}{e^{t_1} + \dots + e^{t_p}} e^{t_j} - \frac{1}{(e^{t_1} + \dots + e^{t_p})^2} e^{t_k} e^{t_j}$$

$$= \frac{e^{t_j}}{e^{t_1}+\dots+e^{t_p}} \, \frac{e^{t_1}+\dots+\widehat{e^{t_h}}+\dots+e^{t_p}}{e^{t_1}+\dots+e^{t_p}} = e^{-x} e^{t_j} - e^{-2x} e^{t_j} e^{t_h}.$$

**Théorème** Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert connexe.

Si $u \in Sh(\Omega)$, alors

ou bien $u \equiv -\infty$ sur $\Omega$

ou bien $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\int |u| \le \int (c-u) + \int c \quad \le c' \iff \int u \ge c''$$

Si $u \le c$, $u = \underbrace{(u-c)}_{\le 0} + c$

$\Rightarrow |u| \le |u-c| + c = (c-u) + c$

Donc il faut prouver que $\forall x \in \Omega$ $\exists U \ni x$ voisinage tq. $\mu_B(u) > -\infty \iff \int_B u \, d\lambda > -\infty$

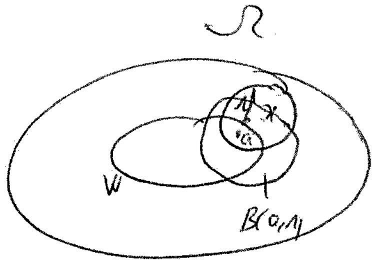
**Démonstration**

$u$ s.c.s. $\Rightarrow$ $u$ localement borné supérieurement.

$$W := \{ x \in \Omega \mid \exists\, U \ni x \text{ voisinage de } x \text{ tq. } u \in L^1(U) \} \subset \Omega. \qquad U \subset \Omega$$

ouvert (par définition).

$u > -\infty$ presque partout sur $W$.

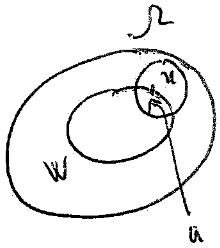



• $W$ est fermé

Soit $x \in \overline{W} \Rightarrow \exists\, a \in W \cap B(x,r)$,

où $r = \frac{1}{2} d(x, \partial\Omega)$ (donc $B(x,r) \subset \Omega$).

tel que $u(a) > -\infty$




Sous-moyenne $\Rightarrow$ $-\infty < u(a) \le \mu_{B(a,r)}(u; a, r)$

$x \in \overline{B}(a,r) \subset \Omega$. $\Bigg\}$ $\Rightarrow x \in W$.

Donc $W$ est fermé.

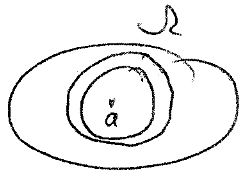
$\Omega$ connexe $\Rightarrow W = \emptyset$ ou $W = \Omega$. Si $W = \emptyset \Rightarrow \mu_B(u; a, r) = -\infty \quad \forall\, \overline{B}(a,r) \subset \Omega$

$\Rightarrow u \equiv -\infty$ sur $\Omega$ par sous-moyenne.

**Théorème** Soit $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ sh-harmonique.

t.q. $u \not\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de $\Omega$.

Alors :




a) $$\left.\begin{array}{l} r \longmapsto \mu_S(u; a, r) \\ r \longmapsto \mu_B(u; a, r) \end{array}\right\}$$ sont des fonctions croissantes dans l'intervalle $]0, d(a, \complement\Omega)[$.

$\forall a \in \Omega$.

De plus, $\boxed{\mu_B(u; a, r) \leq \mu_S(u; a, r)}$.

$\boxed{r \longmapsto \mu_S(u; a, r) \text{ is } \underline{\text{non-decreasing}}}$

when $u$ is subharmonic and $C^2$ thanks to Gauss's formula (because $\Delta u \geq 0$)

. This implies that

$\boxed{\mu_B(u; a, r) \leq \mu_S(u; a, r)}$ $\forall r > 0$

because

$$\mu_B(u; a, r) = m \int_0^1 t^{m-1} \mu_S(u; a, rt)\, dt \leq \mu_S(u; a, r)$$

. The last identity also implies that

$r \longmapsto \mu_B(u; a, r)$ is non-decreasing

b) $\forall (\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ famille de noyaux régularisants,

$$u * \rho_\varepsilon \in SH(\Omega_\varepsilon) \cap C^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R})$$

et $u * \rho_\varepsilon \downarrow u$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

(régularisation).

**Démonstration**

- Supposons que $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. $\Rightarrow \Delta u \geq 0$.

Gauss $\Rightarrow r \mapsto \mu_S(u; a, r)$ est croissante.

$$\mu_B(u; a, r) = m \int_0^1 t^{m-1} \mu_S(u; a, rt)\, dt \Rightarrow r \longmapsto \mu_B(u; a, r) \text{ est croissante.}$$

$$\Rightarrow \mu_B(u; a, r) \leq \mu_S(u; a, r).$$

Cas général :

Corollaire $u \in Sh(\Omega)$ tq. $u \not\equiv -\infty$ sur chaque composante connexe de $\Omega$.

Alors $\Delta u \geq 0$ une mesure positive.
au sens des distribution

Rappel On sait déjà (cours) que si $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, alors $u \in Sh(\Omega) \iff \Delta u \geq 0$ sur $\Omega$.

Preuve $u * \rho_\varepsilon \downarrow u$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$
ss-harmoniques $C^\infty$ $\overset{\text{conv. monotone}}{\Rightarrow}$ $u * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u$ en $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$)

$\Rightarrow \Delta(u * \rho_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \Delta u$ faiblement dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\Downarrow$

$\int \varphi \underbrace{\Delta(u * \rho_\varepsilon)}_{\geq 0} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \underbrace{\int \varphi \Delta u}_{\geq 0 \ \forall \varphi \geq 0} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\Rightarrow$

$\Delta(u * \rho_\varepsilon) \geq 0$ comme fonction $\forall \varepsilon > 0$.

$\Rightarrow \Delta u \geq 0$ mesure positive.

Réciproquement,

Théorème Soit $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution tq. $\Delta v \geq 0$ et une mesure positive.

Alors $\exists !\ u \in Sh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$ tq. $v$ est la distribution associée à $u$.

(On dit que $v$ peut être représenté par une fonction ss-harmonique $u$)

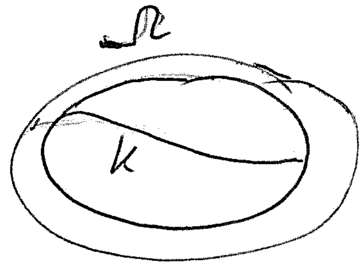
**Observation** Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u$ n'est déterminé que modulo un ensemble Lebesgue négligeable. (classes d'équivalence)

Si $u \in Sh(\Omega)$, $u$ est déterminé partout. (par s.c.s.)

Néanmoins, même si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $v$ est s.c.s. (alors $v$ est uniquement déterminé partout),

on n'a pas nécessairement $u = v$ partout.

**Exemple** Soit $K \subset \Omega$ compact de mesure nulle.



$v := \mathbb{1}_K$ la fonction caractéristique $\in L^1_{loc}(\Omega)$ et s.c.s.

$v \in L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\Delta v \geq 0$.
mesure positive.

Alors $u \equiv 0$ ($v \notin Sh(\Omega)$ à cause du principe du maximum)

**Démonstration**

On régularise $v$ :

$v_\varepsilon := v * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R})$, $v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} v$ faiblement comme distributions.
(comme fonction $C^\infty$)

On a : $\Delta v_\varepsilon = \underbrace{(\Delta v)}_{\geq 0 \text{ comme mesure}} * \rho_\varepsilon \geq 0 \Rightarrow v_\varepsilon \in Sh(\Omega_\varepsilon)$.

$]0,1[ \ni \varepsilon \longmapsto v_\varepsilon$ croissante.

Posons $v_\varepsilon \downarrow u$ ($\varepsilon \searrow 0$) $\Rightarrow u \in Sh(\Omega)$. (limite décroissante de fonctions s.h.)

ponctuellement $\Rightarrow L^1_{loc}$ par convergence monotone

$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f \geq 0$, on a :

$$\langle v, f\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\langle v_\varepsilon, f\rangle}_{\shortparallel} = \int_\Omega u f \, d\lambda \qquad \Rightarrow \text{existence}$$

$v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} v$ faiblement $\qquad \int_\Omega v_\varepsilon f \, d\lambda \qquad$ convergence monotone.

<u>Unicité de u</u> : $\quad u = \lim_{\varepsilon \to 0} u * \rho_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} v * \rho_\varepsilon$.

<u>Topologie sur l'espace $Sh(\Omega)$</u> : supposons $\Omega$ convexe.

$Sh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega) = Sh(\Omega)^{\setminus\{-\infty\}} \hookrightarrow \left( L^1_{loc}(\Omega), \text{ topologie de la convergence en volume } L^1 \text{ sur tout compact de } \Omega \right)$

topologie induite.

espace de <u>Fréchet</u>.

- $f_n \longrightarrow f \iff \forall K \subset \Omega$ compact, $\int_K |f_n - f| \, d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- $S \subset L^1_{loc}(\Omega)$ est borné $\iff \forall K \subset \Omega$ compact $\exists C_K > 0$ tq.

$$\int_K |f| \, d\lambda \leq C_K \quad \forall f \in S$$

(i.e. $S$ est uniformément borné en volume $L^1$ sur tout compact).

<u>Proposition</u>

a) $Sh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$ est un cône convexe.

b) $Sh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$ est <u>fermé</u>

et a la propriété que tout sous-ensemble borné est relativement compact

(la propriété de Heine-Borel).

<u>Démonstration</u> a) clair.

b) <u>Fermé</u> $\quad$ Soit $u_j \xrightarrow{L^1_{loc}(\Omega)} u$ $\quad$ ~~Alors~~ $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ (évident,

$u_j \in Sh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$.

On veut : $u \in SH(\Omega)$.

On a : $u_j \xrightarrow{L^1_{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}'} u \Rightarrow \Delta u_j \longrightarrow \Delta u$ faiblement comme distributions.

$$\left( \langle \Delta u_j, \varphi \rangle = \langle u_j, \Delta\varphi \rangle \Longrightarrow \underbrace{\int_\Omega \underbrace{u_j}_{L^1_{loc}} \underbrace{\Delta\varphi}_{C^\infty} d\lambda}_{L^1_{loc}} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \int_\Omega u \, \Delta\varphi \right.$$

$\Delta\varphi$ bornée sur les compacts.

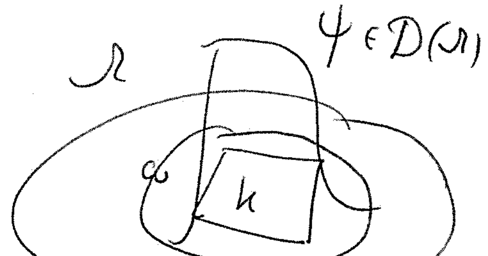
$\Delta u_j \geq 0 \ \forall j \Rightarrow \Delta u \geq 0 \Rightarrow u$ peut être représentée par une fonction s.h.

. <u>Heine-Borel</u>

Supposons $\|u_j\|_{L^1(K)} := \int_K |u_j| \, d\lambda \leq C_K \quad \forall j$, $\forall K$ compact.

$\mu_j := \Delta u_j \geq 0$.

Fixons un compact $K \subset \Omega$.




$\psi \equiv 1$ sur $\omega \supset K$

Estimons la masse de la mesure $\mu_j$ sur $K$ :

$0 \leq \psi \leq 1$ sur

$$\mu_j(K) = \int_K (\Delta u_j) d\lambda \leq \int_\Omega \psi \, \Delta u_j \, d\lambda \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Omega \underbrace{(\Delta\psi)}_{C^\infty \text{ à support compact}} u_j \, d\lambda \leq C \underbrace{\int_{\mathrm{Supp}\,\psi} |u_j| \, d\lambda}_{\text{uniformément bornée (hypothèse)}} \leq C C' \quad \forall j$$

Donc $(\mu_j)_j$ est une suite de mesures positives uniformément bornée en masse sur tout compact $K \subset \Omega$.

Convergence faible : $\exists \, \mu_{j_\nu} \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} \mu \geq 0$ convergence faible des mesures.
mesure positive sur $\Omega$.

On veut $\exists$ ~~sp~~ $u_{j_\nu} \xrightarrow{L^1_{loc}(\omega)} u$. Idée : se ramener au cas $C^\infty$. Car on sait que $C^\infty(\omega)$ a la propriété de Heine-Borel

- $f * (\psi \mu_{j_\nu}) \xrightarrow{L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)} f * (\psi \mu) \quad \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$
- Clair si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- Si $f \notin C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\|f-g\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$

$$\|(f-g) * (\psi \mu_{j_\nu})\|_{L^1(A)} \leq \|f-g\|_{L^1(A + \mathrm{Supp}\,\psi)} \mu_{j_\nu}(\mathrm{Supp}\,\psi), \quad \forall A \subset\subset \mathbb{R}^n.$$

Prendre $f = N$ le noyau de Newton.

Donc $N * (\psi \mu_{j_\nu}) \xrightarrow{L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)} N * (\psi \mu)$

Soit $\boxed{\begin{aligned} h_j &:= u_j - N * (\psi \mu_j) \\ &= u_j - N * (\psi \Delta u_j) \end{aligned}}$ $\qquad \psi \mu_j \geq 0$ mesure positive à support compact.

$$\Delta h_j = \Delta u_j - \underbrace{(\Delta N)}_{= \delta_0} * (\psi \Delta u_j)$$

$$= \Delta u_j - \psi \Delta u_j \equiv 0 \text{ sur } \omega.$$

$\Rightarrow$ $h_j$ est harmonique sur $\omega$ $(\Rightarrow h_j \in C^\infty(\omega))$

$\int_\omega |h_j| \leq C'' < +\infty \quad \forall j$, $C''$ indep de $j$

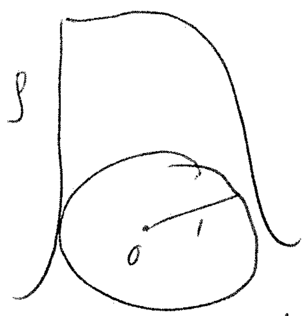
$h_j = h_j * \rho_\varepsilon \Rightarrow D^\alpha h_j = \underbrace{h_j}_{\text{bornée en } L^1(\omega)} * \underbrace{(D^\alpha \rho_\varepsilon)}_{C^\infty}$ unif bornée sur les compacts.

$(h_j)_j$ bornée en $L^1(\omega)$, $h_j = h_j * \rho_\varepsilon$ ($h_j$ lisse) $\Rightarrow (h_j)_j$ bornée en topologie $C^\infty(\omega)$.

(localement unif. bornée sur $\omega$).

Donc ~~$\exists$~~ $\exists\, h_{j_\nu} \xrightarrow{\text{unif.}} h$ sur $\omega$ (même $C^\infty$). ~~Donc~~ $\Rightarrow u_{j_\nu} = h_{j_\nu} + N * (\psi \mu_{j_\nu}) \xrightarrow{L^1_{loc}(\omega)} u = h + N * (\psi \mu)$

# Technique de régularisation



$B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$

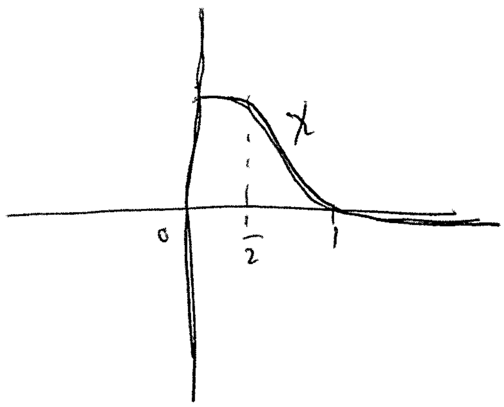
Soit $\rho : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $\operatorname{Supp} \rho \subset B(0,1)$

$\rho \geq 0$

$\rho(x)$ ne dépend que de $|x| = \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

## Exemple




Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C^\infty$, $\chi \geq 0$.

$\operatorname{Supp} \chi \subset [0,1]$.

$\chi \equiv 1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.

$\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\, dt = c$ — (la valeur qu'il faut).

$$\left( \int_{\mathbb{R}} \chi = \int_0^{\frac{1}{2}} \chi + \int_{\frac{1}{2}}^1 \chi = \frac{1}{2} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \chi}_{=\frac{1}{2}} \right).$$

Prendre $\rho(x) := \chi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(|x|)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\, t^{n-1}\, dt$$

$|x| = t$

$dx = t^{n-1}\, dt\, d\theta$

---

## Noyaux régularisants associés à ρ

$\forall \varepsilon > 0$

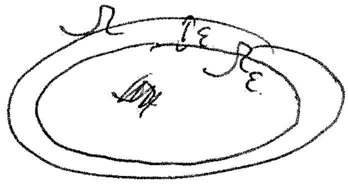
$\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\operatorname{Supp} \rho_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

Si $T = \sum T_i \, dx_i$ est un courant dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\rightsquigarrow$

$$T * \rho_\varepsilon := \sum (T_i * \rho_\varepsilon) \, dx_i \qquad \text{formes } C^\infty, \quad \varepsilon > 0.$$

sur $\Omega_\varepsilon := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C_\Omega) > \varepsilon \}$.

On a : $\underbrace{T * \rho_\varepsilon}_{\substack{C^\infty \\ \text{formes}}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} T$ convergence faible.




$$\left( \begin{array}{l} \langle T * \rho_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, \rho_\varepsilon * \varphi \rangle \\ \rho_\varepsilon * \varphi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathcal{D}^r(\Omega)} \varphi \end{array} \right\} , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}^r(\Omega) \ \text{fonction test} \Bigg)$$

<u>Observation</u> Si $f$ est $C^\infty$, $f * \rho_\varepsilon = f \quad \forall \varepsilon$.

# Fonctions plurisousharmoniques (psh)

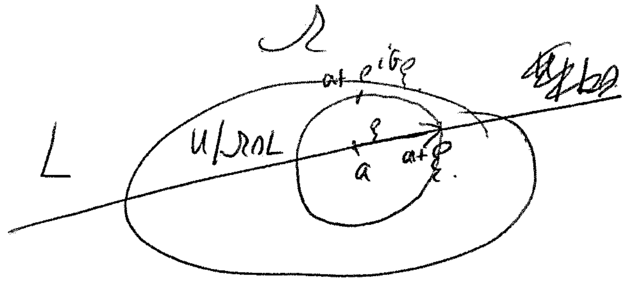
**Définition** $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ , $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert

est psh si

a) $u$ est s.c.s.

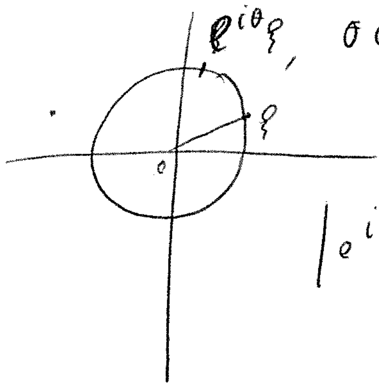
b) $\forall L \subset \mathbb{C}^n$ droite complexe,

$\{a + \lambda\xi \,/\, \lambda \in \mathbb{C}\} = L$




$u|_{\Omega \cap L} \in Sh(\Omega \cap L)$. (c-à-d. s-harmonique dans toutes les directions).

$\boxed{Psh(\Omega)}$




$e^{i\theta}\xi$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$|e^{i\theta}\xi| = |\xi| \in \mathbb{R}$

**Observation** Si (a) a lieu,

(b) $\Leftrightarrow$ $\forall a \in \Omega$
$\forall \xi \in \mathbb{C}^n$, $|\xi| < d(a, \complement_\Omega)$

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}\xi)\, d\theta.$$

Intégrer sur $\xi \in S(0,1)$ :

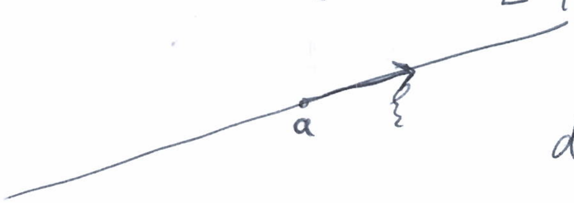
$$u(a) \leq \mu_S(u; a, 1).$$

Donc $\boxed{Psh(\Omega) \subset Sh(\Omega)}$

Propriétés : les mêmes que pour les fonctions sh.

Soit $u\in C^2(\Omega,\mathbb{R})$, $\Omega\subset\mathbb{C}^n$

Soit $L=\{a+\lambda\xi \,/\, \lambda\in\mathbb{C}\}\subset\mathbb{C}^n$




une droite complexe.

$u_{|L}: \mathbb{C}\ni\lambda \xrightarrow{C^2} u(a+\lambda\xi)$ est s-harmonique $\Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\bar{\lambda}}u(a+\lambda\xi)=\sum_{1\le j,k\le n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(a+\lambda\xi)\,\xi_j\bar{\xi}_k\ge 0\qquad\forall\lambda\in\mathbb{C}$$

Donc,

Proposition Soit $u\in C^2(\Omega,\mathbb{R})$, $\Omega\subset\mathbb{C}^n$.

Alors $u\in Psh(\Omega)$ $\Longleftrightarrow$ la forme hermitienne

$$(Hu)_a(\xi,\xi):=\sum_{1\le j,k\le n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\,\partial\bar{z}_k}(a)\,\xi_j\bar{\xi}_k\ge 0\qquad\forall a\in\Omega,\ \forall\xi\in\mathbb{C}^n$$

$$\Big(\underbrace{\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(a)\,dz_j\otimes d\bar{z}_k}_{\text{Noté}}\ge 0\Big)\qquad\Big(\Longleftrightarrow\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(a)\,dz_j\otimes d\bar{z}_k\ge 0\Big)$$

$\partial\bar{\partial}u(\cdot,\cdot):\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $\quad\partial\bar{\partial}u\ge 0\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}(\partial\bar{\partial}u)_a(\xi,\xi)\ge 0\quad\forall\xi\in\mathbb{C}^n,\ \forall a\in\Omega.$

$$(\partial\bar{\partial}u)_a(\xi,\eta)=\sum_{j,k=1}^{n}\underset{\substack{\cap\\ C^0(\Omega,\mathbb{R})}}{\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}}(a)\,\xi_j\bar{\eta}_k$$

$\Omega\ni a\xrightarrow{C^0}(\partial\bar{\partial}u)_a(\xi,\xi)$ avec $\xi\in\mathbb{C}^n$ fixé.

( we know this
$\Longleftrightarrow$ the (1,1)-form $i\partial\bar{\partial}u\ge 0$ )

Encore vrai au sens des distributions.

## Théorème

a) Si $u \in Psh(\Omega)$ et $u \not\equiv -\infty$ sur toute composante connexe de $\Omega$, alors

$\forall \xi \in \mathbb{C}^n$, la distribution

$$Hu(\xi) := \sum_{j,k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}}_{\substack{\text{distribution} \\ \in \mathcal{D}'(\Omega)}} \xi_j \bar{\xi}_k \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{distribution.}$$

est une mesure positive.

(i.e. $u \in Psh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow$
$$\underbrace{\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \otimes d\bar{z}_k}_{\text{hermitian form}} \geq 0$$
$\iff$ the (1,1)-current $i\partial\bar{\partial} u \geq 0$)

b) Réciproquement,

si $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tq. $Hv(\xi) \geq 0$ est une mesure positive pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$,

$\exists !$ $u \in Psh(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$ tq. $v$ soit la distribution associée à $u$. fonction.

**Preuve** a) Soit $u \in Psh(\Omega)$.

Régularisation : $\underbrace{u * \rho_\varepsilon}_{\in\, C^\infty(\Omega_\varepsilon) \cap Psh(\Omega_\varepsilon)} \downarrow u \Rightarrow$

$\Downarrow$
($u * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u$ dans $L^1_{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$)

$$\underbrace{H(u*\rho_\varepsilon)(\xi)}_{\geq 0} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{faiblement}} Hu(\xi) \geq 0.$$

$\Rightarrow$

b) Si $Hv \geq 0 \Rightarrow H(v * \rho_\varepsilon) = (\underbrace{Hv}_{\geq 0}) * \rho_\varepsilon \geq 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v * \rho_\varepsilon \in Psh(\Omega) \\ (v * \rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \text{ famille croissante} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, v * \rho_\varepsilon \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\downarrow} u, \text{ et } u \in Psh(\Omega).$$

**Proposition** Le cône convexe $Psh(\Omega)\cap L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$ est fermé et a la propriété de Heine-Borel.

. Define the complex hessian of $u$ at $a$: $(Hu)(a) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_k}(a)\, dz_j \otimes d\bar z_k$

. We know: $(Hu)(a) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(i\partial\bar\partial u)(a)}_{(1,1)\text{ form}} \geq 0$

. if $u \in C^2$, then
$u \in Psh(\Omega) \Leftrightarrow (Hu)(a) \geq 0 \quad \forall a \in \Omega$

. if $u \not\equiv -\infty$, then $u \in Psh$ "$\Leftrightarrow$" $(Hu)(\xi)$ is a positive measure $\forall \xi$ "$\Leftrightarrow$" $i\partial\bar\partial u \geq 0$ as currents

## Lien avec les fonctions holomorphes

$X$ variété complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$

$u : X \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$

Le Hessien complexe de $u$ au point $a \in X$.

$$(Hu)(a) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_k}(a)\, dz_j \otimes d\bar z_k \;:\; T^{1,0}X \times T^{1,0}X \longrightarrow \mathbb{C}$$

forme hermitienne sur $TX$.

$$(Hu)(a)(\xi,\eta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_k}(a)\, \xi_j \otimes \bar\eta_k$$

$$\xi = \sum_{l=1}^{n} \xi_l \frac{\partial}{\partial z_l}, \quad \eta = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \frac{\partial}{\partial z_\lambda}$$

**Proposition**

$F : X \longrightarrow Y$ application holomorphe entre var. complexes.

$v : Y \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$, $\quad v \circ F : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\partial\bar\partial v$ est une forme continue sur $Y$.

Alors $\boxed{\partial\bar\partial(v\circ F) = F^*(\partial\bar\partial v)}$ (~~Car~~ $F$ hol $\Rightarrow$ $F^*(\partial\bar\partial v) = \partial\bar\partial(F^* v) = \partial\bar\partial(v \circ F)$)

$\cancel{\sum_{j,k} \frac{\partial^2 (v\circ F)}{\partial z_j \partial \bar z_k}(a)\, dz_j \otimes d\bar z_k = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 v}{\partial z_j \partial \bar z_k}(F(a))\, d}$

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{w}_\ell}\left(F(a)\right).\frac{\partial \overline{F}_\ell}{\partial \overline{z}_k}(a)$$

Par ailleurs, en coordonnées locales, on a :

$$H(v\circ F)(a) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 (v\circ F)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a)\, dz_j \otimes d\overline{z}_k = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial (v\circ F)}{\partial \overline{w}_\ell}\cancel{(F(a))}\frac{\partial \overline{F}_\ell}{\partial \overline{z}_k}(a)\right) dz_j \otimes d\overline{z}_k$$

$$= \sum_{j,k,\ell,\lambda=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial w_\lambda \partial \overline{w}_\ell}\left(F(a)\right) \cdot \frac{\partial F_\lambda}{\partial z_j}(a)\, \frac{\partial \overline{F}_\ell}{\partial \overline{z}_k}(a)\, dz_j \otimes d\overline{z}_k$$

$$\boxed{H(v\circ F)(a)(\xi,\xi) = \sum_{j,k,\ell,\lambda=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial w_\lambda \partial \overline{w}_\ell}(F(a)) \underbrace{\frac{\partial F_\lambda}{\partial z_j}(a)\,\xi_j}_{\partial F_\lambda(a)(\xi)} \underbrace{\frac{\partial \overline{F}_\ell}{\partial \overline{z}_k}(a)\,\overline{\xi}_k}_{\overline{\partial F_\ell(a)(\xi)}} = (Hv)(F(a))\left(F'(a)\cdot\xi,\ F'(a)\cdot\xi\right)}$$

$$F'(a) : T_a^{1,0}X \longrightarrow T_{F(a)}^{1,0}Y$$
$$\xi \longmapsto F'(a)\cdot\xi$$

Donc $(Hu)(a)$ est indép du choix des coordonnées locales holomorphes.

(en prenant $F$ = changement de carte).

et $\left((Hv)(F(a)) \geq 0 \text{ sur } Y \Rightarrow H(v\circ F)(a) \geq 0 \text{ sur } X\right)$.

Donc $\boxed{\text{psh = cadre sens sur une variété complexe.}}$

- $Hu$ is well defined on a complex manifold
- psh functions make sense on a complex manifold

Théorème

$F : X \longrightarrow Y$ holomorphe.

Alors $v \in Psh(Y) \Rightarrow F\circ v \in Psh(X)$.

(déjà vu ci-dessus pour $v \in C^2$)

Preuve Suffit : $\left.\begin{array}{l} X = \Omega_1 \subset \mathbb{C}^n \\ Y = \Omega_2 \subset \mathbb{C}^p \end{array}\right\}$ ouverts

Déjà
Connu si $v$ est $C^2$.

En général, $\underbrace{v * \rho_\varepsilon}_{C^\infty \text{ psh}} \downarrow v$ $\quad \varepsilon \downarrow 0$.

<u>Proposition</u> $X$ var. complexe
$f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

Alors $\log|f| \in Psh(X)$.

Si $f_1, \ldots, f_N : X \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \geq 0$, alors

$$\log\left(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_N|^{\alpha_N}\right) \in Psh(X).$$

<u>Preuve</u> On sait déjà que

$\mathbb{C} \ni z \longmapsto \log|z| \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (par le noyau de Newton) est <u>sous-harmonique</u>

Donc, $\forall f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, holomorphe.

$$f^*(\log|z|) = \log|f| \in Psh(X).$$

$$\log\left(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_N|^{\alpha_N}\right) = \log\left(e^{\alpha_1 \log|f_1|} + \cdots + e^{\alpha_N \log|f_N|}\right)$$

$\alpha_i \log|f_i| \in Psh(X)$ $\forall i = 1, \ldots, N$. (par ce qui précède)

On conclut par convexité et croissance séparée de

$$\chi(t_1, \ldots, t_N) = \log\left(e^{t_1} + \cdots + e^{t_N}\right)$$

# Pseudoconvexité

**Définition** $X$ espace topologique

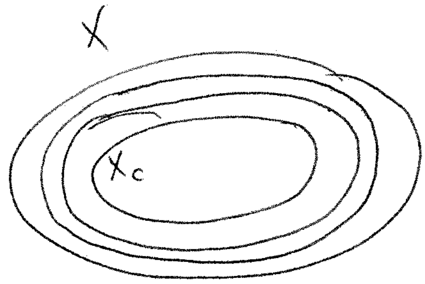
$\psi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction.

$\psi$ est dit <u>fonction d'exhaustion</u> (exhaustion) de $X$ si

$\forall c \in \mathbb{R}, \quad X_c := \{ z \in X \mid \psi(z) < c \} \subset\subset X$ est relativement compact dans $X$.

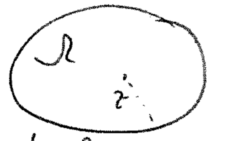
ensemble de niveau (sous-niveau)

(c-à-d $\overline{X_c}$ est compact dans $X$).




**Exemple** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert.

$\Omega \ni z \longmapsto -\log d(z, \complement\Omega)$ est une exhaustion (continue) de $\Omega$.




$-\log d(z, \complement\Omega) \xrightarrow[z \to \partial\Omega]{} +\infty$

De manière équivalente,

$\psi$ est une exhaustion de $X \iff \psi(z) \longrightarrow +\infty$ lorsque $z \longrightarrow \partial X$

(c-à-d. $\psi(z) \longrightarrow +\infty$ relativement au filtre des complémentaires $X \setminus K$ des compacts $K \subset X$).

Si $X = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert,

$\psi$ est une exhaustion de $\Omega \iff \psi(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow \partial\Omega$ ou $x \longrightarrow \infty$

**Définition** $X$ variété complexe.

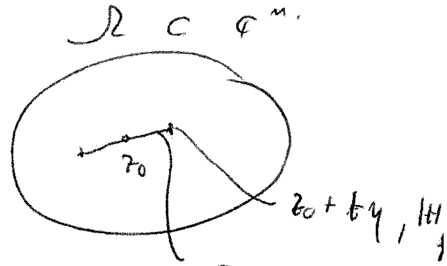
a) $X$ est dite <u>faiblement pseudoconvexe</u> $\overset{\text{déf.}}{\iff} \exists \psi \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$ tq. $\psi$ soit une exhaustion de $X$.

b) $X$ — " — <u>strictement (fortement) pseudoconvexe</u> $\overset{\text{déf.}}{\iff} \exists \psi \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$ tq. $\psi$ soit une exhaustion de $X$

$\psi$ soit <u>st. psh</u> (c-à-d. $H\psi(x) > 0$ $\forall x \in X$ défini positive)

# I) Ouverts pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$

On pose $X := \Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert.




$\bar{D} := z_0 + \overline{D(1)}\,\eta$ $(t = e^{i\theta})$

$\overline{D(1)} \subset \mathbb{C}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

## Critère de plurisousharmonicité

Soit $v : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ s.c.s.

Alors : $v \in Psh(\Omega) \iff \forall\ \bar{D} := z_0 + \overline{D(1)}\,\eta \subset \Omega$ disque fermé

$\forall\ P \in \mathbb{C}[t]$ polynôme (d'une variable $t \in \mathbb{C}$)

on a : $\Big( v(z_0 + t\eta) \leq \mathrm{Re}\, P(t) \quad \forall |t| = 1 \implies v(z_0) \leq \mathrm{Re}\, P(0) \Big)$.

Preuve $\{z_0 + t\eta \mid |t| = 1\}$ = le bord du disque de $\mathbb{C}$. (le cercle).

"$\Rightarrow$" Soit $v \in Psh(\Omega)$.

$\mathrm{Re}\, P(t)$ harmonique $\forall P \in \mathbb{C}[t]$ $\Big\} \implies$

$t \longmapsto v(z_0 + t\eta) - \mathrm{Re}\, P(t)$ est s-harmonique au voisinage de $\overline{D(1)}$

principe du maximum appliqué à $t \longmapsto v(z_0 + t\eta) - \mathrm{Re}\, P(t)$.

"$\Leftarrow$" $v$ s.c.s. $\implies \exists\ v_\nu \downarrow v$ sur $\partial\Delta$

$\partial\Delta$ compact

suite décroissante ($\nu \to +\infty$).

$v_\nu : \partial\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\forall \nu$.

$\partial\Delta \simeq S^1$ homéomorphisme.

$P \in \mathbb{C}[t], \rightsquigarrow P(e^{i\theta})$ polynôme trigonométrique.

$\{\mathrm{Re}\, P(e^{i\theta}) \mid P \in \mathbb{C}[t]\} \subset C^0(S^1, \mathbb{R}) \implies$ on peut supposer que

dense !

$v_\nu(z_0 + e^{i\theta}\eta) = \mathrm{Re}\, P_\nu(e^{i\theta}), \ \forall \nu$

$S^1 = \partial\overline{D(1)}$ où $P_\nu \in \mathbb{C}[t]$.

Donc on a : $v(z_0 + t\eta) \leq \underbrace{\mathrm{Re}\, P_\nu(t)}_{= v_\nu(z_0 + t\eta)} \quad \forall |t| = 1 \overset{\text{hypothèse}}{\implies} v(z_0) \leq \mathrm{Re}\, P_\nu(0) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, P_v(e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_j(z_0 + e^{i\theta}\eta)\, d\theta \xrightarrow[j\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0+e^{i\theta}\eta)\, d\theta$$

Re $P_v$ harmonique — convergence monotone

Donc $v$ satisfait l'inégalité de la moyenne. $\overset{\text{vu ici}}{\Longrightarrow}$ $v \in Psh(\Omega)$.
en restriction à toute droite complexe

## Fonctions pluri-harmoniques

Définition $u: X \to \mathbb{R}$ est pluriharmonique $\Leftrightarrow$ $u, -u$ sont plurisousharmoniques

Observation

a) $u$ pluriharmonique $\Rightarrow$ $u$ harmonique $\Rightarrow$ $u \in C^\infty$.

b) $\forall z = (z_1, \ldots, z_n)$ système de coordonnées holomorphes locales,

$u$ est pluriharmonique $\Leftrightarrow$ $i\partial\bar\partial u = 0$ $\Leftrightarrow$ $Hu = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar z_k} = 0 \quad \forall j, k.$$

c) Si $f \in \mathcal{O}(X)$ $\Rightarrow$ Re $f$, Im $f$ sont pluriharmoniques.

Preuve $\mathrm{Re}\, f = \frac{f+\bar f}{2}$, $\mathrm{Im}\, f = \frac{f - \bar f}{2i}$

$\frac{\partial f}{\partial \bar z_k} = 0$, $\frac{\partial \bar f}{\partial z_j} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar z_k}(\mathrm{Re} f) = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar z_k}(\mathrm{Im} f) = 0$$

Théorème (réciproquement)

Si $H^1_{DR}(X, \mathbb{R}) = 0$ (par exemple, si $X$ est simplement connexe),

$\forall u: X \to \mathbb{R}$ pluriharmonique $\exists f \in \mathcal{O}(X)$ t.q. $u = \mathrm{Re}\, f$.

Preuve

$u \in C^\infty(X)$, $\partial u$ (1,0)-forme $C^\infty$ sur $X$

$$d(\partial u) = \bar\partial \partial u = 0 \xRightarrow{H^1_{DR}(X,\mathbb{R})=0} \exists\, q \in C^\infty(X) \text{ tq. } \partial u = dq.$$

$\left( H^1_{DR}(X,\mathbb{R}) = 0 \iff \right.$ toute 1-forme $C^\infty$ d-fermée sur $X$ est d-exacte $\left.\right)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial u = \partial q \\ \bar\partial q = 0 \Rightarrow q \in \mathcal{O}(X). \end{cases}$$

$$\underbrace{\partial(u-q) = 0 \Rightarrow \bar\partial(u - \bar q) = 0}_{\Downarrow} \quad (\text{car } u = \bar u)$$

$$du - \partial q - \bar\partial \bar q = 0 \iff du - \underbrace{(\partial q + \bar\partial q)}_{dq} - \underbrace{\overline{(\partial q + \bar\partial q)}}_{d\bar q = \overline{dq}} = 0 \iff$$

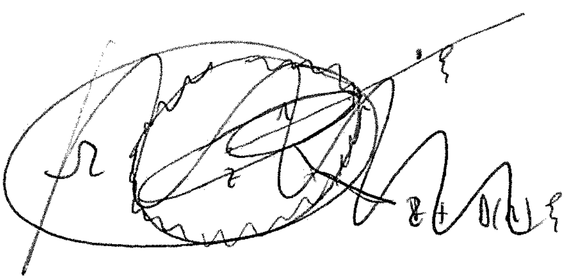
$$\iff d(u - q - \bar q) = 0 \text{ sur } X.$$

$$\iff d(u - 2\,\mathrm{Re}\, q) = 0 \text{ sur } X.$$

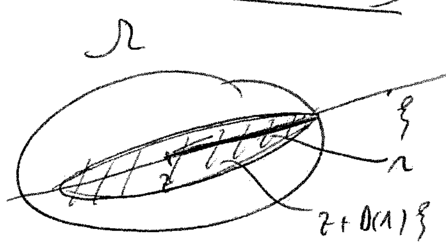
Donc $u = 2\,\mathrm{Re}\, q + c = \mathrm{Re}(2q + c)$, où $c$ est constante sur chaque composante connexe de $X$.

---

Notation




$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert




$$\forall z \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \quad \delta_\Omega(z,\xi) := \sup\{\lambda \geq 0 \mid z + D(\lambda)\xi \subset \Omega\}.$$

(la distance de $z$ à $\partial\Omega$ ~~...~~ dans la direction complexe $\xi$)

Donc, par définition, ~~$z + \delta_\Omega(z,\xi)\xi \in \partial\Omega$~~ $\boxed{z + w\xi \in \Omega}$ $\forall w \in \mathbb{C}$ tq. $|w| < \delta_\Omega(z,\xi)$

**Théorème** Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Alors :

(a) $\Omega$ est strictement pseudoconvexe

$\Updownarrow$

(b) $\Omega$ est faiblement pseudoconvexe

$\Updownarrow$

(c) $\exists\, \varphi : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ exhaustion psh de $\Omega$.

$\Updownarrow$

(d) $(z, \xi) \longmapsto -\log \delta_\Omega(z, \xi)$ est psh sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$

$\Uparrow$ $\Omega \times \mathbb{C}^n$

$\Updownarrow$

(e) $\Omega \ni z \longmapsto -\log d(z, \complement_\Omega)$ ~~est~~ psh sur $\Omega$.

Si une de ces conditions a lieu, $\Omega$ est dit un <u>ouvert pseudoconvexe</u>.

**Démonstration**

a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) évidentes.

c) $\Rightarrow$ d). On va utiliser le critère de psh.

Soit $\bar{D} := (z_0, \xi_0) + \overline{D(1)}\,(\eta, \alpha) \subset \Omega \times \mathbb{C}^n$

un disque fermé

soit $P(t) \in \mathbb{C}[t]$

t.q. $-\log \delta_\Omega(z_0 + t\eta, \xi_0 + t\alpha) \leq \operatorname{Re} P(t) \quad \forall t, |t| = 1 \quad (*)_t$

On veut vérifier $(*)_t$ pour $|t| < 1$.

Soit $h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ holomorphe

$$\boxed{h(t, w) := z_0 + t\eta + w e^{-P(t)}(\xi_0 + t\alpha)}$$

On a s.c.s.

**Obs** $\forall w \in \mathbb{C}$, on a :

$|w| < \delta_\Omega(z, \xi) \Leftrightarrow z + w\xi \in \Omega$

On veut :

$\left|e^{-P(t)}\right| \leq \delta_\Omega(z_0 + t\eta, \xi_0 + t\alpha) \quad \forall t, |t| < 1$

$\Leftrightarrow$

$h(t, 1) = z_0 + t\eta + e^{-P(t)}(\xi_0 + t\alpha) \in \Omega \quad \forall t, |t| < 1$

$(*)_t$

$\Updownarrow$

$\left|e^{-P(t)}\right| = e^{-\operatorname{Re} P(t)} \leq \delta_\Omega(z_0 + t\eta, \xi_0 + t\alpha) \quad \forall t, |t| = 1$

On sait que :

$$h\left(\overline{D(1)} \times \{0\}\right) \Subset \Omega \qquad \left(\text{car } z_0 + t\eta \in \Omega \quad \forall t \in \overline{D(1)}\right)$$

$$h\left(\partial D(1) \times D(1)\right) \subset \Omega \qquad \text{car}$$

$$\left[\begin{array}{l} \{z_0 + t\eta + w\, e^{-P(t)} (\xi_0 + t\alpha)\}, \quad |w| < 1 \\ \quad |t| = 1 \\ (*)_t \text{ pour } |t| = 1 : \quad \left|e^{-P(t)}\right| = e^{-\mathrm{Re}\, P(t)} \leq \delta_\Omega(z_0 + t\eta, \xi_0 + t\alpha) \end{array}\right]$$

On veut $h\left(\overline{D(1)} \times D(1)\right) \subset \Omega$.

Soit $J := \{r \geq 0 \mid h\left(\overline{D(1)} \times \overline{D(r)}\right) \subset \Omega\}$. $\Rightarrow J = [0, R[$ pour quelque $R > 0$.

$\Rightarrow h\left(\overline{D(1)} \times \overline{D(R)}\right) \subset \Omega$.

<u>Supposons que $R < 1$ :</u>

Soit $\psi : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ une exhaustion psh

Soit $K := h\left(\partial D(1) \times \overline{D}(R)\right) \Subset \Omega$. , Soit $c := \sup_K \psi$.

(car $\overline{D}(R) \subset\subset D(1)$ si $R < 1$)

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow[\text{holomorphe}]{h} \Omega \xrightarrow{\psi} [-\infty, +\infty[.$$

$\psi \circ h \in \mathrm{Psh}$. sur un voisinage de $\overline{D(1)} \times D(R)$.

Principe du maximum relativement à $t$ :

$$(\psi \circ h)(t, w) \leq c \quad \text{sur } \overline{D(1)} \times D(R).$$

$$\Rightarrow h\left(\overline{D(1)} \times D(R)\right) \subset \Omega_c \subset\subset \Omega.$$

$\Rightarrow h\left(\overline{D(1)} \times \overline{D}(R+\varepsilon)\right) \subset \Omega$ pour un certain $\varepsilon$. Contradiction avec le choix de $R$.

On veut $R \geq 1$.

Supposons que $R < 1$. $\Rightarrow \overline{D(R)} \subset\subset D(1)$

$$K := h\left(\partial D(1) \times \overline{D(R)}\right) \subset\subset h\left(\partial D(1) \times D(1)\right) \subset \Omega$$

Compact

Soit $\psi : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ une exhaustion psh de $\Omega$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \supset \overline{D(1)} \times \overline{D(R)} \arrow[r, "h", "\text{hol.}"'] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ h \text{ psh.}"'] & \Omega \arrow[r, "\psi", "\text{psh.}"'] & {[-\infty, +\infty[} \end{tikzcd}$$

$\psi \circ h$ est en fait psh sur un voisinage de $\overline{D(1)} \times \overline{D(R)} \subset \mathbb{C}^2$.

Soit $c := \sup_K \psi$. $\Rightarrow (\psi \circ h)(t, w) \leq c$, $\forall (t, w) \in \partial D(1) \times \overline{D(R)}$

$\underset{\text{du max. en } t}{\overset{\text{principe}}{\Longrightarrow}} (\psi \circ h)(t, w) \leq c$, $\forall (t, w) \in \overline{D(1)} \times \overline{D(R)}$

$$\Rightarrow h\left(\overline{D(1)} \times \overline{D(R)}\right) \subset \Omega_c \underset{\substack{\uparrow \\ \psi \text{ exhaustion}}}{\subset\subset} \Omega$$

$\Rightarrow h\left(\overline{D(1)} \times \overline{D(R+\varepsilon)}\right) \subset \Omega$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

Contrad. avec le choix de $R$.

On veut :

$$\left| e^{-P(t)} \right| \leq \delta_\Omega \left( z_0 + t\eta , \xi_0 + t\alpha \right) \quad \forall t , \ |t| < 1$$

$\Updownarrow$

$$|w| \left| e^{-P(t)} \right| < \delta_\Omega \left( z_0 + t\eta , \xi_0 + t\alpha \right) , \ \forall t , \ |t|<1$$
$$\forall w \in \mathbb{C} , \ |w| < 1$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{z_0 + t\eta + w e^{-P(t)} \left( \xi_0 + t\alpha \right)}_{\substack{\| \text{not} \\ h(t,w)}} \in \Omega , \ \forall t , \ |t| < 1$$
$$\forall w \in \mathbb{C} , \ |w| < 1$$

$h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^n$ , holomorphe.

On sait déjà que : $\begin{cases} \cdot \ h \left( \partial D(1) \times D(1) \right) \subset \Omega & \text{(car pour } |t|=1 \text{ ça marche, par hypothèse)} \\ \cdot \ h \left( \overline{D(1)} \times \{0\} \right) \subset \Omega & \text{(car } z_0 + t\eta \in \Omega , \ \forall t \in \overline{D(1)} \text{).} \end{cases}$

On veut : $h \left( D(1) \times D(1) \right) \subset \Omega . \iff h \left( \overline{D(1)} \times D(1) \right) \subset \Omega .$

(car on sait déjà pour $|t| = 1$)

Soit $J := \left\{ r \geq 0 \ \middle| \ h \left( \overline{D(1)} \times \overline{D(r)} \right) \subset \Omega \right\} \Rightarrow J = [0, R]$ , avec un certain $R > 0$.

$$\left( \Rightarrow h \left( \overline{D(1)} \times \overline{D(R)} \right) \subset \Omega \right)$$

d) ⇒ e)

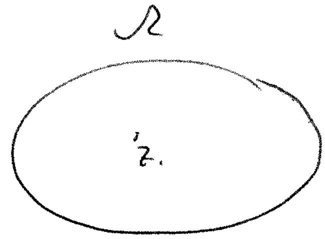
$\Omega \ni z \longmapsto -\log d(z, \partial\Omega)$ est continue.

$$-\log d(z, \complement_\Omega) = \sup_{\xi \in \overline{B}} \left(-\log \delta_\Omega(z,\xi)\right) \Rightarrow \Omega \ni z \longmapsto -\log d(z, \partial\Omega)$$

vérifie l'inégalité de la moyenne.

Donc, elle est psh sur $\Omega$.

e) ⇒ a) On pose



$$u(z) = \underbrace{|z|^2}_{\substack{\text{toujours} \\ \text{st. psh.}}} + \max\{\underbrace{-\log d(z, \complement_\Omega)}_{\substack{\text{toujours une} \\ \text{exhaustion } \cancel{(\ldots)} \\ \text{(psh)}}}, 0\}$$

continue.

$u$ est $\underbrace{\text{continue}}_{\text{une exhaustion}}$ et st. psh. de $\Omega$.

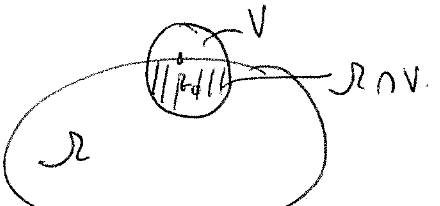
($u$ est une exhaustion car $|z|^2 \geq 0$ et l'autre est une exhaustion).

On régularise $u$ pour la rendre $C^\infty$ (Richberg):

$\exists\, \varphi \in C^\infty(\Omega)$ st. psh t.q. $u \leq \varphi \leq u+1 \Rightarrow \varphi$ est une exhaustion $C^\infty$ de $\Omega$

---

## La forme de Levi du bord



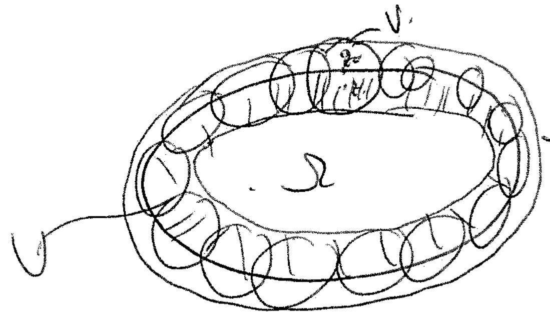

La pseudoconvexité est une propriété locale du bord.

**Théorème** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert tel que

$\forall z_0 \in \partial\Omega$ $\exists\, V$ voisinage de $z_0$ dans $\mathbb{C}^n$ t.q. $\Omega \cap V$ est pseudoconvexe.

Alors $\Omega$ est pseudoconvexe.

Démonstration




$\forall z_0 \in \partial\Omega$ $\exists V$ voisinage de $z_0$ t.q.

$\Omega \cap V \ni z \longmapsto -\log d(z, \complement(\Omega\cap V))$ is psh.

Mais $d(z, \complement(\Omega \cap V)) = d(z, \complement_\Omega)$ si $z \sim z_0$

Donc $\exists U$ voisinage de $\partial\Omega$ t.q.

$\Omega \cap U \ni z \longmapsto -\log d(z, \complement_\Omega)$ est psh.

On va construire une exhaustion psh $\psi$ de $\Omega$.

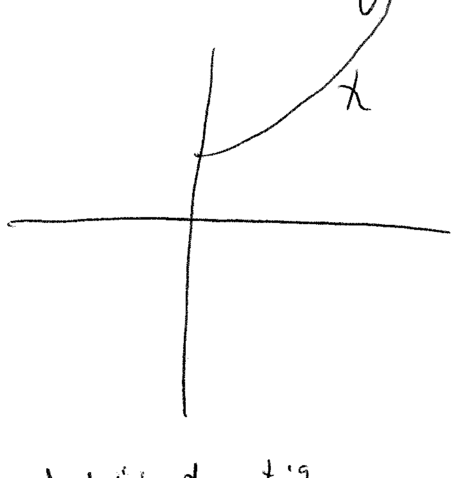
On pose

$$\psi(z) := \max\{\underbrace{\chi(|z|)}_{\substack{\text{psh}\\ \text{sur } \mathbb{C}^n}}, \underbrace{-\log d(z, \complement_\Omega)}_{\substack{\text{continue}\\ \text{une exhaustion de } \Omega\\ \text{psh sur } \Omega\cap U}}\}$$

(peut-être pas psh sur $\Omega \setminus U$ a priori)

est une exhaustion de $\Omega$.

où $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, strictement croissante, à croissance suffisamment rapide à l'infini telle que




$\chi(|z|) \geq \underbrace{-\log d(z, \complement_\Omega)}$ dans un voisinage de $\Omega \setminus U$

continue, donc bornée sur les compacts

il suffit de choisir $\chi$ t.q.

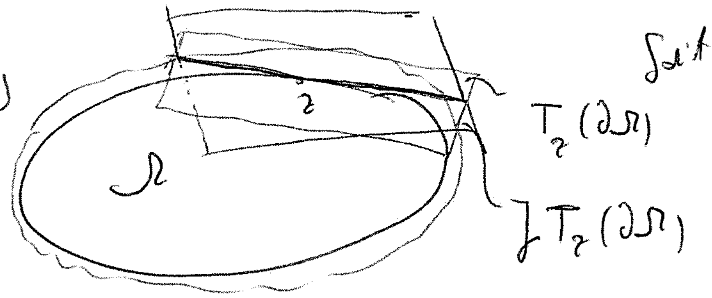
$$\chi(r) > \sup_{z \in (\Omega\setminus U)\cap \bar{B}(r)} -\log d(z, \complement_\Omega) \quad \forall r \geq 0.$$

(car $\bar{B}(r) \subset \mathbb{C}^n$ est compacte)

On a, alors, $\psi(z) = \chi(|z|)$ sur $\Omega \setminus U$ (sur un voisinage de $\Omega \setminus U$).

$\Rightarrow \psi \in Psh(\Omega)$.

## Caractérisation géométrique de la psc. dans le cas des bords de classe $C^2$




Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine.

Définition $\partial\Omega$ est dit de classe $C^2$ si

$\exists\, \rho : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2$ ($U$ est un voisinage de $\bar\Omega$)
$U \supset \bar\Omega$

fonction définissante de $\Omega$, c-à-d

$$\begin{cases} \rho < 0 & \text{sur } \Omega \\ \rho = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ d\rho \neq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$(\partial\Omega = \{z \in U \mid \rho(z) = 0\})$

(le bord $\partial\Omega$ est lisse)

Observation $\left.\begin{array}{l}\rho \text{ est à valeurs réelles} \\ d\rho \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega\end{array}\right\} \Rightarrow \partial\Omega := \rho^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est une sous-variété réelle de classe $C^2$ de $\mathbb{C}^n$.

$\dim_{\mathbb{R}} \partial\Omega = 2n-1$

__Définition__ Soit $T_{\partial\Omega} \subset T(\mathbb{R}^{2n})$ le fibré tangent (réel) de $\partial\Omega$.

$$\begin{array}{c} T(\mathbb{R}^{2n}) \\ \| \\ T\,\mathbb{C}^n \\ \big\downarrow J \end{array} \quad \text{la structure complexe de } \mathbb{C}^n$$

$$J\,T_{\partial\Omega} \subset T\,\mathbb{C}^n$$

$\forall z \in \partial\Omega$, l'__espace tangent holomorphe__ de $\partial\Omega$ en $z$ est :

$${}^{h}T_{\partial\Omega,z} := T_{\partial\Omega,z} \cap J\,T_{\partial\Omega,z} \qquad \left( \dim_{\mathbb{R}} {}^{h}T_{\partial\Omega,z} = 2n-2,\ \dim_{\mathbb{C}} {}^{h}T_{\partial\Omega,z} = n-1 \right)$$

le plus grand ~~sous~~-espace vectoriel __complexe__ contenu dans l'espace vectoriel réel $T_{\partial\Omega,z}$.

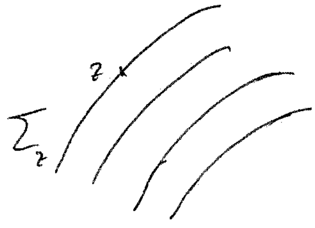
---

__Question__ Étant donné $z \in \partial\Omega$, ~~existe~~-t-il une variété complexe $\Sigma_z$ t.q.

$z \in \Sigma_z \subset \partial\Omega$ sous-variété réelle de $\partial\Omega$ (au voisinage de $z \in \partial\Omega$)

et $T_z \Sigma_z = {}^{h}T_{\partial\Omega,z}$ $\quad \forall z \in \partial\Omega$ ?

(Si $\Sigma_z$ existe, $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma_z = n-1$).




feuilletage de $\partial\Omega$ par des hypersurfaces holomorphes de ~~...~~ $\mathbb{C}^n$

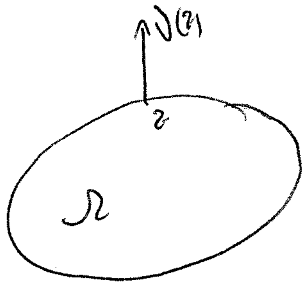
---

__Lemme__ $${}^{h}T_{\partial\Omega,z} = \left\{ \underset{(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\xi} \in \mathbb{C}^n \,\Big|\, \partial\rho(z)(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)\,\xi_j = 0 \right\} \subset \mathbb{C}^n$$

un hyperplan complexe.

$\partial\rho(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z)\, dz_j \ :\ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ; $\quad dz_j(\xi) = \xi_j$

(c-à-d, $\dim_{\mathbb{C}} {}^{h}T_{\partial\Omega,z} = n-1$).




$$\Omega = \{ z \in U \,/\, \rho(z) = 0 \}.$$

$$T_z(\partial\Omega) = \{ \xi \in \underset{\underset{\mathbb{C}^n}{\wr\wr}}{\mathbb{R}^{2n}} \,/\, \underbrace{(d\rho)(z)(\xi) = 0}_{\displaystyle \sum \frac{\partial\rho}{\partial x_j}(z)\, dx_j(\xi) + \sum \frac{\partial \rho}{\partial y_j}(z)\, dy_j(\xi)} \}.$$

preuve : facile.

Définition Si $\rho \in C^2(\bar\Omega)$ est une fonction définissante de $\Omega$, la forme de Levi est :

$\forall z \in \partial\Omega$ $\qquad L_{\partial\Omega, z}(\cdot,\cdot) : {}^hT_{\partial\Omega} \times {}^hT_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\forall \xi, \eta \in {}^hT_{\partial\Omega} \subset \mathbb{C}^n$

$\begin{pmatrix} \xi = (\xi_1 \to \xi_n) \\ \eta = (\eta_1 \to \eta_n) \end{pmatrix}$

$$\boxed{L_{\partial\Omega, z}(\xi, \eta) = \frac{1}{|\nabla\rho(z)|} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z)\, \xi_j \bar\eta_k}$$

où $\nabla\rho(z)$ est le gradient de $\rho$ en $z$. ($\neq 0$ par hypothèse).

Donc $\underline{L_{\partial\Omega} = \frac{1}{|\nabla\rho|} i\partial\bar\partial\rho}$

Fait $L_{\partial\Omega}$ ne dépend pas du choix de la fonction définissante $\rho \in C^2(\bar\Omega)$ de $\Omega$

En effet,

Lemme (Calcul intrinsèque de $L_{\partial\Omega}$).

$\forall \xi, \eta \in C^1(\partial\Omega, {}^hT_{\partial\Omega})$ (champs de vecteurs hol. de classe $C^1$),

$$\boxed{\langle [\xi,\eta], J\nu \rangle = 4 \,\mathrm{Im}\, L_{\partial\Omega}(\xi,\eta)}$$

où $\nu$ le vecteur normal unitaire extérieur de $\partial\Omega$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est le produit scalaire hermitien de $\mathbb{C}^n$.

<u>Démonstration</u>

On étend $\xi, \eta$ comme champs de vecteurs (dans $T(\mathbb{R}^{2n})$ au voisinage de $\partial\Omega$).

On pose : $\xi' := \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j} \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n)$

$$\left( T(\mathbb{R}^{2n}) \ni \xi \longmapsto \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \in T^{1,0}(\mathbb{C}^n) \quad \mathbb{R}\text{-isomorphisme de } \mathbb{R}\text{-espaces vectoriels} \right)$$

$$\eta'' := \frac{1}{2}(\eta + iJ\eta) = \sum_{k=1}^{n} \bar\eta_k \frac{\partial}{\partial \bar z_k} \in T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$$

$\left.\begin{array}{l} \xi, J\xi, \eta, J\eta \text{ sont tangents à } \partial\Omega \\ \rho_{|\partial\Omega} \equiv 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$0 = \xi'\cdot(\eta''\cdot\rho) + \eta''\cdot(\xi'\cdot\rho) = \sum_{j,k=1}^{n} \left( 2\xi_j \bar\eta_k \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar z_k} + \xi_j \frac{\partial \bar\eta_k}{\partial z_j} \frac{\partial \rho}{\partial \bar z_k} + \bar\eta_k \frac{\partial \xi_j}{\partial \bar z_k} \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \right) \quad (1)$$

$\xi, \eta$ tangents à $\partial\Omega \Rightarrow [\xi,\eta]$ est tangent à $\partial\Omega$.

Donc : $\mathrm{Re} \langle [\xi,\eta], \nu \rangle = 0 \Longrightarrow \langle J[\xi,\eta], \nu \rangle \in \mathbb{R}$.

et $\left\langle [\xi,\eta], \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{J}\nu \right\rangle = -\left\langle J[\xi,\eta], \nu \right\rangle \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{|D\rho|}\left( J[\xi,\eta].\rho \right)$

$\langle u, iv\rangle = -\langle iu, v\rangle$ dans $\mathbb{C}^n$

(localement $x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ coord locales de $\mathbb{R}^{2n}$
$\partial\Omega = \{x_1 = \dots = x_{2n-1} = 0\}$ localement
$\nu = \frac{\partial}{\partial x_{2n}}$ ; $\frac{\partial\rho}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial\rho}{\partial x_{2n-1}} = 0$ ; $\frac{\partial\rho}{\partial x_{2n}}$ )

$\begin{cases} \xi = \xi' + \xi'' \\ \eta = \eta' + \eta'' \end{cases} \Rightarrow J[\xi,\eta] = \underbrace{J[\xi',\eta'] + J[\xi'',\eta'']}_{\text{conjugués}} + \underbrace{J[\xi',\eta''] + J[\xi'',\eta']}_{\text{conjugués}}$

$\overline{\xi''} = \xi'$
$\overline{\eta''} = \eta'$

$2\,\mathrm{Re}\, J[\xi',\eta'']$

$J[\xi',\eta'] = i\,\underbrace{[\xi',\eta']}_{\text{tangent à } \partial\Omega} \Rightarrow J[\xi',\eta'].\rho = 0.$

Par conjugaison, $J[\xi'',\eta''].\rho = 0.$

Donc, on trouve

$$\left\langle [\xi,\eta], J\nu \right\rangle = -\frac{2}{|D\rho|}\,\mathrm{Re}\left( J[\xi',\eta''].\rho \right).$$

Par ailleurs,

$$[\xi',\eta''] = \sum_{j,k} \xi_j \frac{\partial\overline{\eta_k}}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \bar z_k} + \sum_{j,k} \overline{\eta_k}\frac{\partial \xi_j}{\partial \bar z_k}\frac{\partial}{\partial z_j}$$

$$\mathrm{Re}\left( J[\xi',\eta''].\rho \right) = \mathrm{Re}\left( i \sum_{j,k}\left( \xi_j \frac{\partial\overline{\eta_k}}{\partial z_j}\frac{\partial\rho}{\partial \bar z_k} + \overline{\eta_k}\frac{\partial \xi_j}{\partial \bar z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\right)\right)$$

$$= -\mathrm{Im} \sum_{j,k}\left( \xi_j \frac{\partial\overline{\eta_k}}{\partial z_j}\frac{\partial\rho}{\partial \bar z_k} + \overline{\eta_k}\frac{\partial \xi_j}{\partial \bar z_k}\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} -2\,\mathrm{Im} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j\, \partial \bar z_k}\, \xi_j\, \bar\eta_k$$

Finalement,

$$\langle [\xi,\eta], J\nu \rangle = \frac{4}{|\nabla \rho|}\, \mathrm{Im} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j\, \partial \bar z_k}\, \xi_j\, \bar\eta_k = 4\,\mathrm{Im}\, L_{\partial\Omega}(\xi,\eta).$$

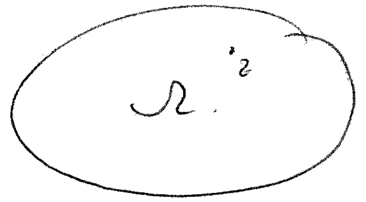
<u>Théorème</u> Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert à bord $C^2$.

Alors : $\Omega$ est pseudoconvexe $\Leftrightarrow$ $L_{\partial\Omega} \geq 0$ en tout point de $\partial\Omega$.

(c-à-d $L_{\partial\Omega, z}(\xi,\xi) \geq 0$ $\forall z \in \partial\Omega$, $\forall \xi \in$ [illegible]).

<u>Démonstration</u>

"$\Rightarrow$" Supposons $\Omega$ pseudoconvexe.



$$\bar\Omega \ni z \xmapsto{\rho} d(z, \complement\Omega) \quad \begin{cases} < 0 & \text{si } z \in \Omega \\ = 0 & \text{si } z \in \partial\Omega \\ d(\,) \neq 0 & \text{si } z \in \partial\Omega \end{cases}$$

$C^2$ près de $\partial\Omega$.

Par ailleurs,

$$\Omega \ni z \longmapsto \underbrace{-\log d(z, \complement\Omega)}_{= -\log(-\rho(z))} \quad \text{est psh} \quad (\text{car } \Omega \text{ est pc}).$$

$\Rightarrow$ $i\partial\bar\partial\left(-\log(-\rho)\right) \geq 0$ près de $\partial\Omega$ ( où $\rho$ est $C^2$).

$$\Rightarrow \sum_{j,k=1}^{n} \left( -\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j\, \partial \bar z_k}(z) + \frac{1}{\rho^2(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z) \frac{\partial \rho}{\partial \bar z_k}(z) \right) \xi_j\, \bar\xi_k \geq 0 \qquad \begin{array}{l} \forall z \text{ près de } \partial\Omega \\ \forall \xi \in \mathbb{C}^n. \end{array}$$

$$-\frac{1}{\rho(z)} = \frac{1}{|\rho(z)|} > 0$$

Si $\xi \in {}^h T_{\partial\Omega, z} \iff \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z)\, \xi_j = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar z_k}(z)\, \bar\xi_k = 0.$

Donc $\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar z_k}(z)\, \xi_j \bar\xi_k \geq 0 \quad \forall \xi \in {}^h T_{\partial\Omega, z}$

$\forall z$ près de $\partial\Omega$.

"$\Leftarrow$" Supposons que $L_{\partial\Omega, z}(\xi, \xi) \geq 0 \quad \forall z \in \partial\Omega$

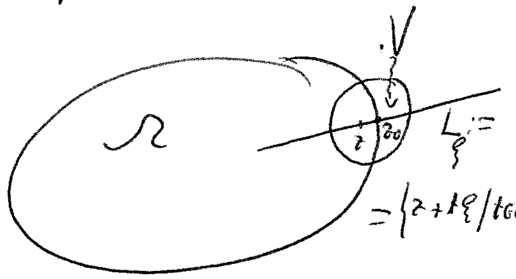
$\forall \xi \in {}^h T_{\partial\Omega, z}$

Par l'absurde : supposons que $\Omega$ n'est pas pseudoconvexe. $\Rightarrow$ $\exists\, V$ voisinage d'un $z_0 \in \partial\Omega$ t.q. $-\log\delta$ n'est pas psh sur $\Omega \cap V$.

$\Rightarrow \exists z$ au voisinage de $\partial\Omega$

$\exists \xi \in \mathbb{C}^n$

$\boxed{\delta(z) := d(z, \complement\Omega)}$




t.q. $c := \left( \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar t} \log \delta(z + t\xi) \right)\Big|_{t=0} > 0$

(c-à-d. $(-\log\delta)|_{L_\xi}$ n'est pas sous-harmonique pour une certaine droite complexe $L_\xi$)

$\iff \exists z \in L_\xi$ t.q. $\Delta_t(-\log\delta)|_{L_\xi}(z) < 0$)

Formule de Taylor : ($\delta$ est de classe $C^2$)

$$\log\delta(z + t\xi) = \log\delta(z) + \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\log\delta(z+t\xi)\right)\Big|_{t=0}}_{\frac{1}{2}a \text{ "est"}} t + \left(\frac{\partial}{\partial \bar t}\log\delta(z+t\xi)\right)\Big|_{t=0} \bar t}_{= \operatorname{Re}(at) = \frac{1}{2}(at + \bar a \bar t)} +$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log\delta(z+t\xi)\right)\Big|_{t=0}}_{= \frac{1}{2} b} t^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar t^2}\log\delta(z+t\xi)\right)\Big|_{t=0} \bar t^2}_{= \operatorname{Re}(b t^2)} +$$

$+ \; c|t|^2 + o(|t|^2)$ , avec $a, b \in \mathbb{C}$

Soit $z_0 \in \partial\Omega$ t.q. $\delta(z) = |z - z_0|$ (c-à-d, $z_0 \in \partial\Omega$ est le point de $\partial\Omega$ le plus proche de $z$)

Posons : $h(t) = z + t\xi + e^{at+bt^2}(z_0 - z)$ , $t \in \mathbb{C}$. (Donc $h(t) \in L_\xi \;\; \forall t \in \mathbb{C}$).

On a : $h(0) = z + (z_0 - z) = z_0$.

$$\delta(h(t)) = \delta(\underbrace{z + t\xi + e^{at+bt^2}(z_0 - z)}_{\in L_\xi}) \geq \cancel{\delta(z+t\xi) - \delta(e^{at+bt^2}(z_0-z))}$$

$$= d(z + t\xi + e^{at+bt^2}(z_0 - z), z_0)$$

$$= |z + t\xi + e^{at+bt^2}(z_0 - z) - z_0|$$

$$\geq \underbrace{\delta(z+t\xi)}_{\geq (|z+t\xi-z_0|)} - |e^{at+bt^2}| \underbrace{|z_0 - z|}_{\geq (\delta(z))} = \delta(z) e^{\mathrm{Re}(at+bt^2)} e^{c|t|^2} e^{o(|t|^2)} - |e^{at+bt^2}| \delta(z)$$

$$\geq \delta(z) |e^{at+bt^2}| \left(e^{\frac{c}{2}|t|^2} - 1\right) \geq \delta(z) \frac{c}{3} |t|^2 \quad \text{si } |t| << 1$$

$(e^x - 1 = x + \cdots)$

Par ailleurs, $\delta(h(0)) = \delta(z_0) = 0$ , En dérivant $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}$ ; on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(h(t))\Big|_{t=0} = \sum \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z_0)\, h_j'(0) = 0 \qquad \iff \quad h'(0) \in {}^hT_{\partial\Omega, z_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\bar t}\rho(h(t))\Big|_{t=0} = \sum \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial \bar z_k}(z_0)\, h_j'(0)\,\overline{h_k'(0)} > 0 \iff L_{\partial\Omega, z_0}(h'(0)) < 0.$$

Contradiction.

$(\xi = h'(0))$

__Définition__

$\partial\Omega$ est __faiblement pseudoconvexe__ $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $L_{\partial\Omega} \geq 0$ sur $\partial\Omega$.

$\partial\Omega$ est __fortement pseudoconvexe__ $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $L_{\partial\Omega} > 0$ sur $\partial\Omega$.

$\partial\Omega$ est __Levi plat__ $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $L_{\partial\Omega} \equiv 0$ sur $\partial\Omega$.

__Observation__ Si $\partial\Omega$ est $C^2$, on a :

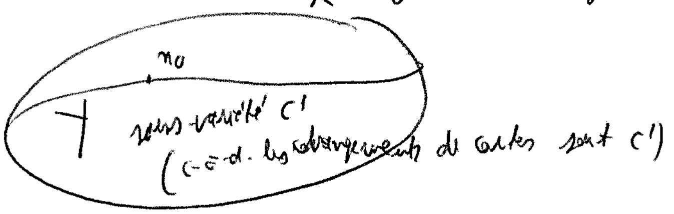
$\Omega$ est psc $\iff$ $\partial\Omega$ est faiblement psc. $\iff$ $L_{\partial\Omega} \geq 0$ sur $\partial\Omega$.

__Conséquence__

Lemme ci-dessus :

$\partial\Omega$ est Levi plat $\iff \forall\, \xi, \eta \in {}^hT_{\partial\Omega}$, $[\xi, \eta] \in {}^hT_{\partial\Omega}$ $\overset{\text{déf}}{\iff}$ le sous-fibré ${}^hT_{\partial\Omega} \subset T_{\partial\Omega}$ est __intégrable__

__Lemme__ $\quad X$ variété complexe.




Si $T_xY$ est un sous-espace __complexe__ de $T_xX$ $\quad \forall x \in Y$, alors $Y$ est analytique complexe

Démonstration

Soit $x_0 \in Y$.

$\left.\begin{array}{l} T_{x_0} Y \subset T_{x_0} X \text{ sous-espace complexe} \\ X \text{ var. anal. complexe} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, z_1, \dots, z_n$ coord. holomorphes de $X$, centrées en $x_0$

tq. $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_{x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_p}\Big|_{x_0} \right\rangle = T_{x_0} Y$

$\left( \text{et } \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}\Big|_{x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_p}\Big|_{x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\Big|_{x_0} \right\rangle = T_{x_0} X \right)$

$\Rightarrow \exists\, U = U' \times U'' \ni x_0$ voisinage tq. $Y \cap U = \{ z'' = h(z') \mid z' = (z_1, \dots, z_p) \in U',\ z'' = (z_{p+1}, \dots, z_n) \}$

où $h : U' \xrightarrow{C^1} \mathbb{C}$ et $dh(0) = 0$.

(fonctions implicites)

$\mathbb{C}^p \times \{0\} \xrightarrow{\mathbb{C}\text{-linéaire}} T_{(z', h(z'))} Y$ projection le long de $\{0\} \times \mathbb{C}^{n-p}$.

$\mathbb{C}^n \underset{\text{projection}}{\xrightarrow{\mathbb{C}\text{-linéaire}}} \mathbb{C}^{n-p}$.

$dh(z') : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ la composée. $\Rightarrow dh(z')$ est $\mathbb{C}$-linéaire $\Rightarrow h$ est holomorphe.

---

Frobenius : supposons que $\partial\Omega$ est de classe $C^k$, $k \geq 2$.

${}^h T_{\partial\Omega} \subset T_{\partial\Omega}$ intégrable $\Rightarrow {}^h T_{\partial\Omega}$ est le fibré tangent d'un feuilletage $C^k$ de $\partial\Omega$ dont les feuilles sont de dim réelle $2n-2$.

mais ${}^h T_{\partial\Omega} \subset T_{\partial\Omega}$ est un s-espace complexe $\Rightarrow$ les feuilles sont anal. complexes

Conclusion $\partial\Omega$ est Levi plat $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega$ est feuilleté par des hypersurfaces anal. complexes

4) Cas des variétés ; fortement psc $\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow$ faiblement psc

## Convexité holomorphe :

Définition 1) $X$ var-complexe.

$K \subset X$ compact

L'enveloppe holomorphe de $K$ dans $X$ :

$$\hat{K} = \hat{K}_{O(X)} := \{ z \in X \,/\, |f(z)| \le \sup_K |f| \ , \ \forall f \in O(X) \}.$$

2) $X$ est dite holomorphiquement convexe $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\hat{K}_{O(X)}$ est compacte $\forall K \subset X$ compact.

Observation

$X$ est holomorphiquement convexe $\Leftrightarrow$ $\exists (K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ suite de s-ensembles compacts tq. $K_\nu \subset X$.

$$X = \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu \qquad (\text{i.e. "suite exhaustive"}).$$

$$\hat{K}_\nu = K_\nu \qquad (\text{chaque } K_\nu \text{ est hol. convexe}).$$

$$K_{\nu-1} \subset \mathring{K}_\nu \quad \forall \nu$$

Preuve "$\Rightarrow$" On définit $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ par récurrence sur $\nu$ :

$$K_0 = \phi$$

$$K_{\nu+1} := \widehat{(K'_\nu \cup L_\nu)}_{O(X)}$$


où $K'_\nu \supset K_\nu$ est un voisinage de $K_\nu$ et $(L_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une suite de compacts de $X$ tq.

$$X = \bigcup_\nu L_\nu$$

"⇐" Si $K \subset X$ est compact $\Rightarrow \exists\, V$ fm tq. $K \subset K_V$

Donc $\hat{K} \subset \hat{K}_V = \underbrace{K_V}_{\text{compact}} \Rightarrow \hat{K}$ compact.

Théorème

$X$ holomorphiquement convexe $\Rightarrow X$ faiblement psc.

preuve : on construit une exhaustion.

Voir Demailly, Hörmander, Laurent-Thiébaut

Définition $X$ var complexe.

$X$ est dite de Stein si

a) $X$ est holomorphiquement convexe. ($\Rightarrow$ faiblement psc)

b) $\mathcal{O}(X)$ sépare les points de $X$ localement, c-à-d :

$\forall x \in X \quad \exists\, V \ni x$ (voisinage) tq. $\forall y \in V \setminus \{x\} \quad \exists\, f \in \mathcal{O}(X)$ tq. $f(y) \neq f(x)$.


Obs i) Si $X$ est de Stein, $X$ a "beaucoup de fonctions hol. globales".

Par ailleurs, si $X$ est compacte, $\mathcal{O}(X) \simeq \mathbb{C}$. (les seules fonctions hol sont les constantes).

$X$ compacte $\Rightarrow X$ faiblement pseudo-convexe

Donc, $\exists$ 2 classes très différentes ~~de variétés~~ parmi les variétés faiblement psc

• $X$ compacte

• $X$ de Stein ;

(ii) Si $X = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert, (b) est évidente

Donc, pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ :

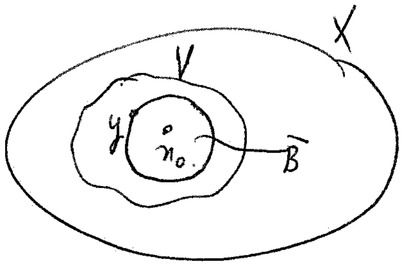
$\Omega$ de Stein $\Leftrightarrow$ $\Omega$ est holomorphiquement convexe $\Rightarrow$ $\Omega$ pseudoconvexe.

**Lemme** $X$ var. complexe qui vérifie la séparation locale des points.

Alors $\exists\, u \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$ strictement psh tq. $u \geq 0$ sur $X$.

**Démonstration**

Soit $x_0 \in X$.




Étape 1 : on montre que

$\exists\, u_0 \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$, $u_0 \geq 0$ sur $X$

tq. $u_0$ est st. psh dans un voisinage de $x_0$.

Soit $z_1, \dots, z_n$ coord hol. locales centrées en $x_0$ tq. $\bar{B} := \{\sum |z_j|^2 \leq 1\} \subset V$

($z_j \longrightarrow \lambda z_j$ si nécessaire).

la séparation locale a lieu sur $V$.

Séparation locale des points : $\forall y \in \partial B$ $\exists\, f \in \mathcal{O}(X)$ tq. $f(y) \neq f(x_0)$.

$f \longrightarrow \lambda(f - f(x_0))$ on obtient : $\begin{cases} f(x_0) = 0. \\ |f(y)| > 1 \overset{\text{Continuité}}{\Longrightarrow} |f(y')| > 1 \text{ pour } y' \sim y, \ y' \in \partial B \end{cases}$

$\partial B$ compact : $\exists\, f_1, \dots, f_N \in \mathcal{O}(X)$ tq.

$v_0 := \sum |f_j|^2$ vérifie : $\begin{cases} v_0(x_0) = 0 \\ v_0 > 1 \quad \text{sur } \partial B \end{cases}$ , $v_0 \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$, $v_0 \geq 0$ sur $X$

Posons

$$u_0(z) := \begin{cases} v_0(z) & , \text{ sur } X \setminus B \\ \max_\varepsilon \left\{ v_0(z), \dfrac{|z|^2+1}{3} \right\} & , \text{ sur } B. \end{cases}$$

(le max régularisé)

il reste à rendre $v_0$ st psh dans un voisinage de $x_0$.

$z \mapsto |z|^2$ est le prototype d'une fonction st. psh.
$\|$
$|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$.

mais n'a de sens que si on a des coordonnées hol, donc localement sur une variété mais globalement dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Donc, $u_0 \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$, $u_0 = v_0$ sur $X \setminus B$

et $u_0 = v_0$ dans un voisinage de $\partial B$.

$u_0(z) = \dfrac{|z|^2+1}{3}$ dans un voisinage de $x_0$.

($\Rightarrow$ st. psh près de $x_0$).

Étape 2 : $\exists\ X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$ t.q. $V_j \subset X$ ouvert

recouvrement dénombrable de $X$

$\exists\ u_j \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$, $u_j \geq 0$ sur $X$

$u_j$ st psh dans $V_j$

Soit $\varepsilon_j > 0$ t.q. $\varepsilon_j \searrow 0$ suffisamment vite pour que

$$u := \sum_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j u_j \in C^\infty(X).$$

Alors $u \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$, $u \geq 0$ sur $X$, $u$ est st psh sur $X$.

Théorème $X$ de Stein $\Rightarrow$ $X$ strictement psc

preuve $X$ de Stein $\overset{\text{déf}}{\Longrightarrow}$ $X$ hol. convexe $\overset{\text{Thm}}{\Longrightarrow}$ $X$ faiblement psc. $\Rightarrow$ $\exists\ \psi \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$
et exhaustive.

Rendre $\varphi$ st. psh :

Thm précédent $\overset{\text{réfutation}}{\Rightarrow}$ locale des points. $\exists\, u \in Psh(X) \cap C^\infty(X)$ strictement psh. tq. $u \geq 0$ sur $X$.

Posons

$$\varphi' := \varphi + u \in Psh(X) \cap C^\infty(X) \quad \text{strictement psh}$$

$\varphi'$ est une exhaustion de $X$ car $\varphi$ l'est ~~et~~ $u \geq 0$ sur $X$.

$$\left( u \geq 0 \Rightarrow \varphi \leq \varphi + u = \varphi' \text{ sur } X \Rightarrow \{z \in X \mid \varphi'(z) < c\} \subset \{z \in X \mid \varphi(z) < c\} \quad \forall c \in \mathbb{R}. \right)$$

Problème de Levi : la réciproque

Résolu dans l'affirmatif par . Oka ('53) (pour $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ domaine)

. Grauert ('58) : cas général des variétés.

preuve relativement récente (années 90) : preuve géométrique utilisant les estimées $L^2$ pour l'opérateur de C-R $\bar\partial$

(on le fera si on a le temps à la fin du cours).

Théorème (solution du problème de Levi) $X$ de Stein $\Leftrightarrow$ $X$ est fortement psc.

Théorème (très important).

$X$ de Stein, $\dim_{\mathbb{C}} X = n \Rightarrow$ . $\exists\, X \hookrightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$

plongement comme $n$-var. fermée

. $\exists\, X \hookrightarrow \mathbb{C}^{2n}$.

plongement comme $n$-var. fermée.

preuve : voir Hörmander.

Donc : $X$ de Stein $\Rightarrow$ $X$ sous-var. affine.

Stein : l'analogue anal des sous-var. affines

## Courants positifs

$V$ e.v. complexe, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ ; $z_1, \dots, z_n$ coordonnées sur $V$.

$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\}$ la base correspondante de $V$.

$\{ dz_1, \dots, dz_n \}$ la base duale de $V^*$

L'algèbre extérieure :

$$\Lambda V^*_{\mathbb{C}} = \bigoplus \Lambda^{p,q} V^* , \quad \text{où } \Lambda^{p,q} V^* := \Lambda^p V^* \otimes \Lambda^q \overline{V^*}$$

Exemple (modèle) $V = T_x X$ l'espace tangent, $X$ var. complexe

Observation $V$ a une orientation canonique définie par la $(n,n)$-forme

$$\tau(z) := i\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge i\, dz_n \wedge d\bar{z}_n = 2^n\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$$

en coord. réelles

où $z_j = x_j + i y_j$.

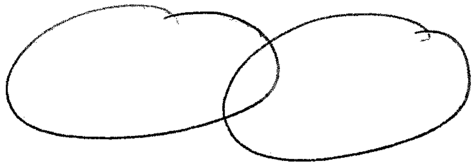
En effet, si $(w_1, \dots, w_n)$ sont d'autres coordonnées sur $V$, on a :

$$dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n = \det\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_k}\right)_{j,k \dots n} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \; ; \; d\bar{w}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{w}_n = \det\left(\frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{z}_k}\right)_{j,k} d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$

$$\Rightarrow \tau(w) = \underbrace{\left| \det\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_k}\right)_{j,k} \right|^2}_{\geq 0} \tau(z).$$

On peut donc décréter que $\tau(z)$ est une $(n,n)$-forme positive sur $V$ (forme volume sur $V$).

~~Mais~~ La positivité est indépendante du choix des coordonnées, ~~...~~, ~~...~~ $z_1, \dots, z_n$



$z = (z_1, \dots, z_n)$ $\qquad$ $w = (w_1, \dots, w_n)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f\, i\, dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge \dots \wedge i\, dz_n \wedge d\bar z_n, \text{ avec } f \geq 0 \\ \text{sont les } (n,n)\text{-formes positives} \end{array}}$$

En particulier, toute variété complexe a une orientation canonique. (La positivité d'une $(n,n)$-forme a un sens intrinsèque sur $X$).

<u>Concept de positivité pour les $(p,p)$-formes</u> (généralisation de la positivité des $(n,n)$-formes).

<u>Définition</u>

i) Une $(q,q)$-forme $v \in \Lambda^{q,q} V^*$ est dite <u>fortement positive</u> si

$$v = \sum \gamma_s \underbrace{i\alpha_{s,1} \wedge \bar\alpha_{s,1} \wedge \dots \wedge i\alpha_{s,q} \wedge \bar\alpha_{s,q}}_{\text{le prototype des } (q,q)\text{-formes fortement positives}}$$

où $\gamma_s \geq 0$ et $\alpha_{s,j} \in V^*$

ii) Une $(p,p)$-forme $u \in \Lambda^{p,p} V^*$ est dite <u>positive</u> si

$u \wedge i\alpha_1 \wedge \bar\alpha_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_q \wedge \bar\alpha_q \geq 0$ est une $(n,n)$-forme positive,

$\forall\, \alpha_j \in V^*$, $1 \leq j \leq q := n-p$.

<u>Observation</u>

$u$ $(p,p)$-forme fortement positive $\Rightarrow$ $u$ $(p,p)$-forme positive.

Démonstration

Règles de commutation.

$$i\alpha_1\wedge\bar\alpha_1\wedge\dots\wedge i\alpha_p\wedge\bar\alpha_p = i^{p^2}\underbrace{(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_p)}_{\substack{\text{noté}\\ \alpha\in\Lambda^{p,0}V^*}}\wedge\underbrace{(\bar\alpha_1\wedge\dots\wedge\bar\alpha_p)}_{\substack{\text{noté}\\ \bar\alpha}} = i^{p^2}\alpha\wedge\bar\alpha$$

$$\underbrace{i^{p^2}\beta\wedge\bar\beta}_{\text{fortement positive}}\wedge\underbrace{i^{m^2}\gamma\wedge\bar\gamma}_{\text{fortement positive}} = i^{(p+m)^2}\beta\wedge\gamma\wedge\overline{\beta\wedge\gamma}, \quad \forall\beta\in\Lambda^{p,0}V^*,\ \forall\gamma\in\Lambda^{m,0}V^*$$

Prendre $m=q=n-p$. Alors $\beta\wedge\gamma=\lambda\, dz_1\wedge\dots\wedge dz_n\in\Lambda^{n,0}V^*$, pour un certain $\lambda\in\mathbb{C}$

$$i^{n^2}\beta\wedge\gamma\wedge\overline{\beta\wedge\gamma} = |\lambda|^2\underbrace{i^{n^2}dz_1\wedge\dots\wedge dz_n\wedge d\bar z_1\wedge\dots\wedge d\bar z_n}_{\substack{\shortparallel\\ \tau(z):=i\,dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\dots\wedge i\,dz_n\wedge d\bar z_n}}$$

$(n,n)$-forme positive.

Prendre $\gamma=\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_q\in\Lambda^{q,0}V^*$, avec $\alpha_1,\dots,\alpha_q\in V^*$, on a :

$$i^{q^2}\gamma\wedge\bar\gamma = i\alpha_1\wedge\bar\alpha_1\wedge\dots\wedge i\alpha_q\wedge\bar\alpha_q \quad \text{fortement positive.}$$

Donc, si $\beta=\beta_1\wedge\dots\wedge\beta_p\in\Lambda^{p,0}V^*$, $i^{p^2}\beta\wedge\bar\beta$ est fortement positive

et $(i^{p^2}\beta\wedge\bar\beta)\wedge(i^{q^2}\gamma\wedge\bar\gamma)$ est une $(n,n)$ forme positive.

$\Rightarrow$ $i^{p^2}\beta\wedge\bar\beta$ est positive.

Lemme $z_1, \dots, z_n$ coordonnées arbitraires sur $V$.

Alors :

i) $\Lambda^{p,p} V^*$ a une base formée de formes fortement positives.

$$\beta_s = i\beta_{s,1} \wedge \overline{\beta_{s,1}} \wedge \dots \wedge i\beta_{s,p} \wedge \overline{\beta_{s,p}} \quad ; \quad 1 \leq s \leq \binom{n}{p}^2$$

où chaque $\beta_{s,l} = dz_j \pm dz_k$ ou $\beta_{s,l} = dz_j \pm i\,dz_k$, $1 \leq j, k \leq n$.

ii) Si $u \in \Lambda^{p,p} V^*$ est positive $\Rightarrow \bar{u} = u$ (c-à-d $u$ est réelle).

En coordonnées :

si $u = i^{p^2} \sum_{|I|=|J|=p} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$ est positive $\Rightarrow \overline{u_{IJ}} = u_{JI}$ $\quad (\Leftrightarrow u = \bar{u})$.

(symétrie hermitienne)

Preuve : exercice.

Critère de positivité

Soit $u \in \Lambda^{p,p} V^*$. Alors

$u$ est positive $\Leftrightarrow \forall S \subset V$, $\dim_{\mathbb{C}} S = p$, $\forall p \leq n$, $u_{|S}$ est une forme volume positive sur $S$.
sous-espace complexe.

Preuve $\exists (z_1, \dots, z_n)$ coordonnées de $V$ t.q.

$$S = \{ z_{p+1} = \dots = z_n = 0 \}.$$

Alors $u_{|S} = \lambda_S\, i\,dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge i\,dz_p \wedge d\bar{z}_p$, où $\lambda_S$ est déterminé par

$$\underbrace{u \wedge i\,dz_{p+1} \wedge d\bar z_{p+1} \wedge \dots \wedge i\,dz_n \wedge d\bar z_n}_{\text{fortement positive}} = \lambda_S\, i\,dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge \dots \wedge i\,dz_p \wedge d\bar z_p \wedge i\,dz_{p+1} \wedge d\bar z_{p+1} \dots \wedge i\,dz_n \wedge d\bar z_n$$

$$= \lambda_S\, \tau(z)$$

"$\Rightarrow$" Si $u$ est positive $\Rightarrow \lambda_S \geq 0 \Rightarrow u_{|S}$ est positive $\forall S$

$\forall S$

"$\Leftarrow$" Si $u_{|S}$ est positive $\forall S \subset V \Rightarrow u \wedge \bigwedge_{j>p} i\,dz_j \wedge d\bar z_j \geq 0 \quad \forall S$

$\Rightarrow u$ positive car les formes $\bigwedge_{j>p} i\,dz_j \wedge d\bar z_j$ engendrent toutes les $(n-p)$-formes fortement positives quand $S$ tourne dans $V$.

<u>Corollaire</u> Soit $u = i \sum_{j,k} u_{jk}\, dz_j \wedge d\bar z_k$ forme de type $(1,1)$.

Alors :

$u$ est positive $\Leftrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (\xi, \eta) \longmapsto \sum_{j,k} u_{jk}\, \xi_j \bar\eta_k$ est une forme <u>hermitienne</u> <u>semi-positive</u>

$$\left( \text{c-à-d}, \ \sum_{j,k} u_{jk}\, \xi_j \bar\xi_k \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad u_{jk} = \bar u_{kj}. \right)$$

<u>Preuve</u> Soit $\xi \in \mathbb{C}^n$ et $S = L_\xi := \{ t\xi \mid t \in \mathbb{C} \} \subset V$
la droite complexe engendrée par $\xi$.

$z_j(t) = t\xi_j$ la coordonnée de $S$ ; $dz_j = \xi_j\, dt$

$$u_{|S} = \left( \sum_{j,k} u_{jk}\, \xi_j \bar{\xi}_k \right) i\, dt \wedge d\bar{t}$$

Par critère, $u$ positive $\Leftrightarrow$ $\forall\, \xi \in V$, $u_{|L_\xi}$ est positive. $\Leftrightarrow$ $\sum_{j,k} u_{jk}\, \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0$ $\forall\, \xi \in V$.

Remarque (i) il existe une bijection canonique

$$h(z) = \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}(z)\, dz_j \otimes d\bar{z}_k \longmapsto u(z) = i \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

formes hermitiennes sur $V$. $\qquad$ (1,1)-formes réelles sur $V$.

$$\left( \overline{h_{jk}} = h_{kj} \quad \forall\, j,k \right)$$

Elle est indépendante du choix de coordonnées de $V$ :

$$\begin{array}{cc} dz_j(\cdot) & d\bar{z}_k(\cdot) \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} \xi_j & \bar{\xi}_k \\ \eta_j & \bar{\eta}_k \end{vmatrix}$$

$$\boxed{u_z(\xi,\eta) = i \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}(z) \left( \xi_j \bar{\eta}_k - \bar{\xi}_k \eta_j \right) = -2\, \mathrm{Im}\, h_z(\xi,\eta)}, \quad \forall\, \xi,\eta \in V.$$

$$h_z(\xi,\eta) = \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}(z)\, \xi_j \bar{\eta}_k \Rightarrow \overline{h_z(\xi,\eta)} = \sum_{j,k} h_{kj}(z)\, \bar{\xi}_j \eta_k = \sum_{\substack{j,k \\ j \leftrightarrow k}} h_{jk}(z)\, \eta_j \bar{\xi}_k$$

$$\underbrace{h_z(\xi,\eta) - \overline{h_z(\xi,\eta)}}_{\substack{\| \\ 2i\, \mathrm{Im}\, h_z(\xi,\eta)}} = \sum_{j,k=1}^{n} h_{jk}(z) \left( \xi_j \bar{\eta}_k - \eta_j \bar{\xi}_k \right)$$

(ii) La forme hermitienne $h$ est $\geq 0$ $\Leftrightarrow$ la (1,1)-forme $u$ est $\geq 0$ (faiblement) (démontrer dans le corollaire).

$h = (h_{j\bar{k}})_{j,k}$ est diagonalisable $\Rightarrow$ toute forme $(1,1)$ positive. $u \in \Lambda^{1,1} V^*$ s'écrit

$$u = \sum_{j=1}^{r} i\, \gamma_j \wedge \bar{\gamma}_j \ , \quad \gamma_j \in V^* \ , \quad r = \mathrm{rang}(u).$$

(le nombre de v.p. $> 0$ de $h$)

$\Rightarrow$ $u$ est fortement positive.

<u>Corollaire</u> Pour les $(p,p)$-formes, avec $p = 0, 1, n-1, n$, on a l'équivalence :

positive $\Leftrightarrow$ fortement positive.

<u>Remarque</u> Si $2 \leq p \leq n-2$, positive $\not\Rightarrow$ fortement positive.

<u>Définition</u> (courants positifs ; utilisant la dualité formes $p$ $\leftrightarrow$ formes fortement $p$)

$X$ var. complexe.

$T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ bidimension $(p,p)$.

$T$ est <u>positif</u> $\Leftrightarrow$ $\langle T, u \rangle \geq 0$ $\quad \forall\, u \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$ fortement positive en tout point $x \in X$.

(c-à-d. $u(x) \in \Lambda^{p,p} T_x^* X$ est fortement positive)

$T$ est <u>fortement positif</u> $\Leftrightarrow$ $\langle T, u \rangle \geq 0$ $\quad \forall\, u \in \mathcal{D}_{p,p}(X)$ positive en tout point $x \in X$

<u>Notation</u> $\mathcal{D}'^{\,+}_{p,p}(X)$ : les courants positifs

$\cup$ $\qquad$ Cônes convexes.

$\mathcal{D}'^{\,\oplus}_{p,p}(X)$ : courants fortement positifs

Obs

T positif $\Leftrightarrow$ $T \wedge u \in \mathcal{D}'^{n,n}(X)$ est une mesure positive

$\forall u \in C^{\infty}_{r,r}(X)$ faiblement fortement positive

— $u$ —

$J : V \longrightarrow V$ s.t. $J^2 = -id$, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$

$\mathbb{R}$-linear.

<u>Obs</u> $J$ is an $\mathbb{R}$-isom of $\mathbb{R}$-vector spaces.

<u>Proof</u> . $J$ is injective: $Ju = 0 \Rightarrow J^2 u = 0 \Rightarrow -u = 0 \Rightarrow u = 0$.

<u>Lemma</u> $\exists \{e_1, .., e_n, f_1, .., f_n\}$ $\mathbb{R}$-basis of $V$ s.t.

$$\begin{cases} J e_j = f_j \\ J f_j = -e_j \end{cases} \quad \forall j$$

<u>Proof</u> Let $e_1 \in V \setminus \{0\}$ and put $f_1 := Je_1$. Then $Jf_1 = -e_1$.

if $Je_1 = \lambda e_1$ with $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ $\underbrace{J^2 e_1}_{= -e_1} = \lambda J e_1 = \lambda^2 e_1 \Rightarrow \lambda^2 = -1$ impossible since $\lambda \in \mathbb{R}$
$\lambda \in \mathbb{R}$.

. Choose any $e_2 \notin \langle e_1, Je_1 \rangle$. Put $f_2 := J e_2 \notin \langle e_1, Je_1 \rangle$

q.e.d.

Let $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Then, $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = 2n$.

<u>Def</u> $\tilde{J} : V_{\mathbb{C}} \longrightarrow V_{\mathbb{C}}$, $\tilde{J}(u + iv) := Ju + iJv$.

. $\tilde{J}$ is $\mathbb{C}$-linear.

. $\tilde{J}^2 = -id_{V_{\mathbb{C}}} \Rightarrow$ eigenvalues $i, -i$ $\rightsquigarrow$ $V^{1,0}, V^{0,1}$ eigenspaces, $\underbrace{V_{\mathbb{C}}}_{\mathbb{C}\text{-dim } 2n} = \underbrace{V^{1,0}}_{\mathbb{C}\text{-dim } n} \oplus \underbrace{V^{0,1}}_{\mathbb{C}\text{-dim } n}$

$V^{1,0} = \ker(\tilde{J} - i\, id)$, $V^{0,1} = \ker(\tilde{J} + i\, id)$

$V^{1,0} = \langle u_1, .., u_n \rangle_{\mathbb{C}}$, $V^{0,1} = \langle v_1, .., v_n \rangle_{\mathbb{C}}$

Put $\begin{cases} u_j := \frac{1}{2}(e_j - i f_j) \\ v_j := \frac{1}{2}(e_j + i f_j) \end{cases}$ $j = 1, .., n$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \tilde{J} u_j = i u_j \\ \tilde{J} v_j = -i v_j \end{cases}$ $j = 1, .., n$.

**Lemma** $V \xrightarrow{T^{1,0}} V^{1,0}$ is an $\mathbb{R}$-isom of $\mathbb{R}$-vector spaces.

$$\varrho \longmapsto \frac{1}{2}(\varrho - iJ\varrho)$$

$$\left\{\begin{array}{l} e_j \xrightarrow{T^{1,0}} u_j = \frac{1}{2}(e_j - i f_j) \\ \underset{\underset{Je_j}{\shortparallel}}{f_j} \xrightarrow{T^{1,0}} \frac{1}{2}(f_j - i\underbrace{Jf_j}_{\shortparallel \atop -e_j}) = \frac{i}{2}(e_j - if_j) = iu_j \end{array}\right\} \mathbb{C}\text{-proportional}$$

Moreover, $T^{1,0}$ induces a $\mathbb{C}$-vector space structure on $V$ for which $T^{1,0}$ is $\mathbb{C}$-linear:

$$T^{1,0} : (V, J) \longrightarrow (V^{1,0}, \tilde{J})$$

$\mathbb{C}$-isom. of $\mathbb{C}$-vector spaces.

$$\boxed{T^{1,0}(J\varrho) = i(T^{1,0}\varrho)}$$

**Proof** · $T^{1,0}$ is well defined: $\tilde{J}\left(\frac{1}{2}(\varrho - iJ\varrho)\right) = \frac{i}{2}(\varrho - iJ\varrho)$

· $T^{1,0}$ is injective: $(\varrho - iJ\varrho) \underset{\text{in } V^{1,0}}{=} 0 \Rightarrow \varrho = 0$.

Exple

---

**Lemma** $V \xrightarrow{T^{0,1}} V^{0,1}$ $\mathbb{R}$-isom, $(\underbrace{V, \overline{J}}_{\overline{V} \atop \|\text{def}}) \longrightarrow (V^{0,1}, \tilde{J})$

$\mathbb{C}$-isom.

$$\varrho \longmapsto \frac{1}{2}(\varrho + iJ\varrho)$$

$$\boxed{T^{0,1}(J\varrho) = -i\,T^{0,1}(\varrho)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} e_j \longmapsto v_j := \frac{1}{2}(e_j + if_j) \\ \underset{\underset{Je_j}{\shortparallel}}{f_j} \longmapsto \frac{1}{2}(f_j - ie_j) = -\frac{i}{2}(e_j + if_j) = -i\,v_j \end{array}\right.$$

---

**Conclusion** $\mathbb{C}V = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \simeq V \oplus \overline{V}$ where $\left.\begin{array}{l} V^{1,0} \simeq V \\ V^{0,1} \simeq \overline{V} \end{array}\right\}$ $\mathbb{C}$-isom.

---

$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}TX, \mathbb{C}) = T'X \oplus T''X$