Chapitre 1 Fibrés vectoriels et connexions

I) Définitions générales

Soit X un espace topologique et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (le corps des scalaires)

Définition On appelle fibré vectoriel topologique de rang r sur X tout espace topologique E muni d'une projection continue $p : E \to X$ et d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ $(\forall x \in X)$ satisfaisant l'axiome de trivialité locale (de la structure d'espace vectoriel) :

$\exists\, \mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de X

$$\forall \alpha \in I \quad \exists \quad E_{|U_\alpha} := p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\simeq]{\theta_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{K}^r \quad \text{homéomorphisme}$$

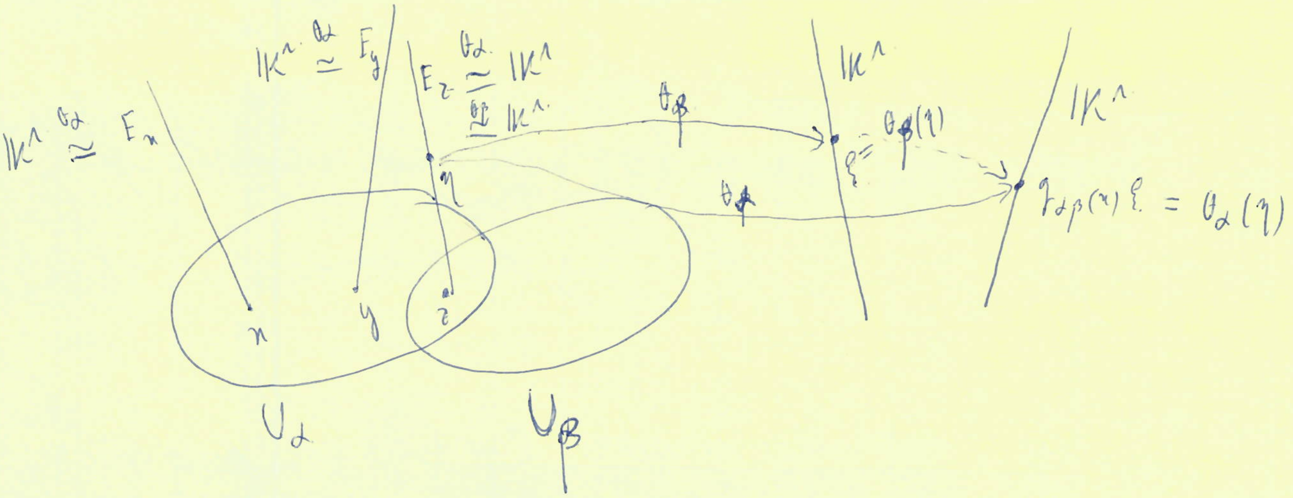
tel que $\forall x \in U_\alpha$, $E_x \xrightarrow{\theta_\alpha} \{x\} \times \mathbb{K}^r \simeq \mathbb{K}^r$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Terminologie X = la base du fibré

E = l'espace total du fibré

$\theta_\alpha : E_{|U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ est une trivialisation locale $\forall \alpha \in I$



$$E_{|U_\alpha} \overset{\theta_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{K}^n \qquad E_{|U_\beta} \overset{\theta_\beta}{\simeq} U_\beta \times \mathbb{K}^n$$ trivialisations locales.

<u>Automorphismes de transition</u>

$$\begin{tikzcd}
E_{|U_\alpha\cap U_\beta} \arrow[r, "\theta_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}", "\simeq"'] \arrow[dr, "\theta_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}"', "\simeq"] & (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n \\
 & (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n \arrow[u, "\simeq"', "\theta_{\alpha\beta} := \theta_\alpha\circ\theta_\beta^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\xi & \eta \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & g_{\alpha\beta}(x)\,\xi \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\theta_\beta^{-1}", "\simeq"'] \arrow[rr, bend right, "\theta_{\alpha\beta}"'] & E_x \arrow[r, "\theta_\alpha", "\simeq"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta,$

$$\xi \longmapsto g_{\alpha\beta}(x)\,\xi$$

, où $g_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est un <u>isomorphisme</u> de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

(= une matrice inversible $n\times n$ sur $\mathbb{K}$ à coefficients <u>continus</u>)

On a : $\theta_{\alpha\beta} : (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n \longrightarrow (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{K}^n$

$$(x,\xi) \longmapsto (x,\ g_{\alpha\beta}(x)\,\xi)$$

Les relations de transition sur $U_\alpha \cap U_\beta \cup U_\gamma$.

$$\theta_{\alpha\beta} \circ \theta_{\beta\gamma} = \theta_{\alpha\gamma}$$

On obtient (α) $\boxed{g_{\alpha\beta}(x)\ g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)}$ $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in I$

(produit de matrices $n \times n$ sur $\mathbb{K}$ =
= composé d'isomorphismes $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$)

(α) est appelée la condition du cocycle.

Inversement : Construction d'un fibré à partir de matrices de transitions

Données : . $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de l'espace topologique X.

. $\forall (\alpha, \beta) \in I \times I$, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Gl_n(\mathbb{K})$ continue en $x \in U_\alpha \cap U_\beta$

t. q. $\boxed{g_{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}.}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Alors on peut construire de manière naturelle un fibré topologique $E \xrightarrow{f} X$ ayant les $g_{\alpha\beta}$ pour matrices de transition.

. On pose $E = \coprod_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{K}^n \Big/ \sim$,

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par

$(\alpha, x, \xi) \in I \times U_\alpha \times \mathbb{K}^n$ $\quad (\alpha, x, \xi) \sim (\beta, y, \eta) \overset{\text{déf}}{\iff} \begin{cases} x = y \in U_\alpha \cap U_\beta \\ \xi = g_{\alpha\beta}(x)(\eta) \end{cases}$

$(\beta, y, \eta) \in I \times U_\beta \times \mathbb{K}^n$

- $p : E \longrightarrow X$

$(\alpha, x, \xi) \longmapsto x.$

- la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel est donnée par :

$$\begin{cases} (\alpha, x, \xi_1) + (\alpha, x, \xi_2) = (\alpha, x, \xi_1 + \xi_2) \\ \lambda(\alpha, x, \xi) = (\alpha, x, \lambda \xi) \end{cases}$$

<u>Exemples</u>

(1) Le <u>fibré trivial</u> de rang n sur X

$E = X \times \mathbb{K}^n$

$\mathcal{U} = (X)$; $\theta = id.$

$(x, \xi) \in E_x = \{x\} \times \mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}^n$

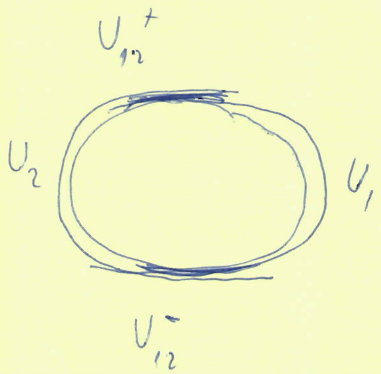
$(x, \xi) + (x, \eta) = (x, \xi + \eta)$

$\lambda(x, \xi) = (x, \lambda \xi)$

(2) Le <u>ruban de Möbius</u>

$X = S^1$ le cercle

$E \longrightarrow S^1$ un fibré réel de rang 1 sur S^1



$S^1 = U_1 \cup U_2$, U_1, U_2 ouverts

$g_{12}(x) \in \mathbb{R}^* \quad (= Gl_1(\mathbb{R})) \quad \forall x \in U_1 \cap U_2$

$$g_{12}(x) = \begin{cases} +1 & \text{sur } U_{12}^+ \\ -1 & \text{sur } U_{12}^- \end{cases}$$

Structures supplémentaires

X variété C^∞ réelle (ou variété anal. complexe)

Définition On dit que E est un fibré vectoriel C^∞ (resp. holomorphe) si on a l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

(i) E (l'espace total) est une variété diff. C^∞ (resp. holom)

$p : E \longrightarrow X$ est diff C^∞ (resp. holom)

$\theta_\alpha : E_{|U_\alpha} \xrightarrow{\ \simeq\ } U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ difféo C^∞ (resp. holom).

$\Updownarrow$

(ii) E est construit à partir de matrices de transition $(g_{\alpha\beta}(x))$ diff. C^∞ (resp. holom)

Exemples

1) X var. réelle de classe C^k, $\dim_{\mathbb{R}} X = n$.

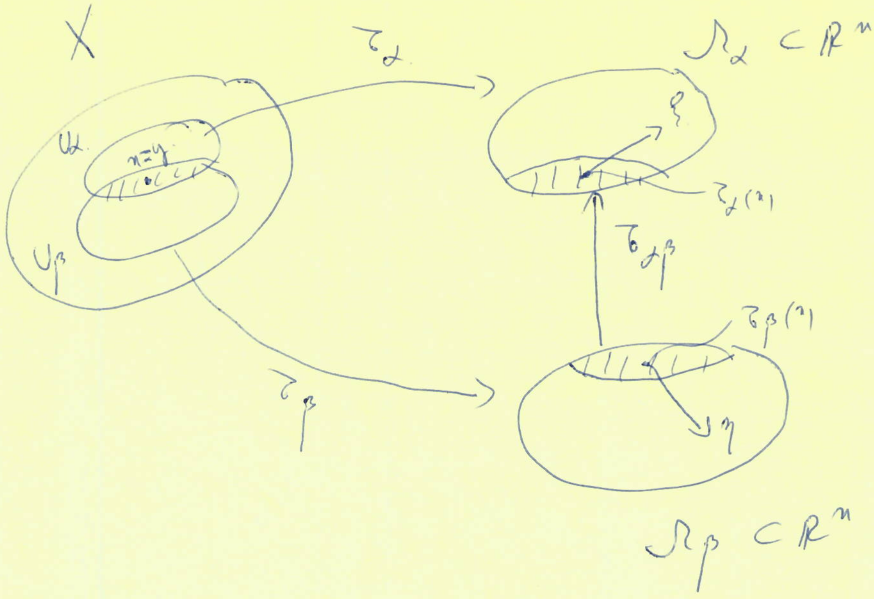
Cartes de coordonnées : $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\underset{\text{ouvert}}{U_\alpha \subset X}$

$\tau_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\ \simeq\ } \underset{\text{ouvert}}{\Omega_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ C^k-difféo. $\forall \alpha$

$\cancel{\tau_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta}$

$\tau_{\alpha\beta} := \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : \tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ C^k-difféo

$\qquad\qquad\qquad\qquad \underset{\mathbb{R}^n}{\cap}$ ouvert $\qquad\qquad\qquad \underset{\mathbb{R}^n}{\cap}$ ouvert.



Le fibré tangent de X : $\quad TX \overset{\text{déf.}}{=} \left(\coprod_\alpha U_\alpha \times \mathbb{R}^n \right) \Big/ \sim$

$$(\alpha, x, \xi) \sim (\beta, y, \eta) \iff \begin{cases} x = y \in U_\alpha \cap U_\beta \\ \xi = d\tau_{\alpha\beta}(\tau_\beta(x))\,(\eta) \end{cases}$$

Donc les matrices de transition de $TX \longrightarrow X$ $\quad (\text{rang } TX = n = \dim_{\mathbb{R}} X)$ sont :

$$g_{\alpha\beta}(x) = d\tau_{\alpha\beta}(\tau_\beta(x)) \qquad \text{de classe } C^{k-1}$$

Opérations algébriques sur les fibrés

- Somme directe

$E \xrightarrow{p} X \qquad \text{rang } E = r$

$F \xrightarrow{q} X \qquad \text{rang } F = r'$

$E \oplus F \longrightarrow X$? $\quad$ t.q. $\quad (E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x \quad \forall x \in X$

On définit

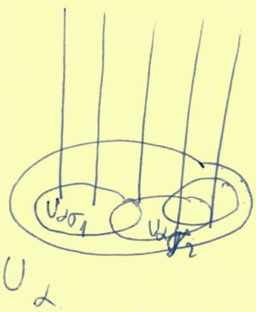
$$E \oplus F := \{ (\xi, \eta) \in E \times F \,/\, p(\xi) = q(\eta) \} \subset E \times F$$

Si $x := p(\xi) = q(\eta) \Rightarrow \xi \in E_x, \ \eta \in F_x$. sous-espace fermé.

On met la topologie induite sur $E \oplus F$ (par celle de $E \times F$)

$E : \ \mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}, \ g_{\alpha\beta}$

$F : \ \mathcal{V} = (V_\lambda)_{\lambda \in J}, \ h_{\lambda\mu}$



$E_{|U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{K}^n$.

On peut redécouper chaque U_α en $(U_{\alpha\sigma})_\sigma$ avec recollement $= id$ sur $U_{\alpha\sigma_1} \cap U_{\alpha\sigma_2}$

On pose $\mathcal{W} = (\underbrace{U_\alpha \cap V_\lambda}_{W_{\alpha\lambda}})_{(\alpha,\lambda) \in I \times J}$ et $E_{|W_{\alpha\lambda}} \simeq W_{\alpha\lambda} \times \mathbb{K}^n$ et $F_{|W_{\alpha\lambda}} \simeq W_{\alpha\lambda} \times \mathbb{K}^{n'}$ $\forall \alpha, \lambda$

On peut donc supposer, quitte à subdiviser, que E et F sont définis à partir du même recouvrement.

$E : \ \mathcal{U} = (U_\alpha) \quad g_{\alpha\beta} \quad n \times n$

rang $E \oplus F = n + n'$

$F : \ \mathcal{U} = (U_\alpha) \quad h_{\alpha\beta} \quad n' \times n'$

$E \oplus F : \ \mathcal{U} = (U_\alpha)$

$$\boxed{\underbrace{g_{\alpha\beta} \oplus h_{\alpha\beta}}_{\text{matrices de transition de } E \oplus F} = \begin{pmatrix} \overset{n \times n}{\boxed{g_{\alpha\beta}}} & 0 \\ 0 & \underset{n' \times n'}{\boxed{h_{\alpha\beta}}} \end{pmatrix}}$$

· <u>Dual de E</u>

$E \xrightarrow{f} X \rightsquigarrow E^* \longrightarrow X$ le dual de E.

$$(E^*)_x := (E_x)^* \qquad \forall x \in X$$

$E : \mathcal{U} = (U_\alpha)_\alpha \qquad g_{\alpha\beta}$

$$\begin{tikzcd}
 & (U_\alpha\cap U_\beta)\times \mathbb{K}^n & \ni & (x,\ g_{\alpha\beta}(x)(\xi)) & (x,\ {}^t g_{\alpha\beta}(x)^{-1}(\xi^*)) \\
E|_{U_\alpha\cap U_\beta} \arrow[ur, "\theta_\alpha", "\simeq"'] \arrow[dr, "\wr", "\theta_\beta"'] & & & & \\
 & (U_\alpha\cap U_\beta)\times \mathbb{K}^n \arrow[uu, "\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha\circ\theta_\beta^{-1}"'] & \ni & (x,\xi) \arrow[uu, mapsto] & (x,\xi^*) \arrow[uu, mapsto] \ \in
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (U_\alpha\cap U_\beta)\times \mathbb{K}^n \\
E^*|_{U_\alpha\cap U_\beta} \arrow[ur, "{}^t\theta_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "{}^t\theta_\beta^{-1}"'] & \\
 & (U_\alpha\cap U_\beta)\times \mathbb{K}^n \arrow[uu, "\theta^*_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

$$A \xrightarrow{u} B \text{ linéaire } \xrightarrow{\text{dualisant}} B^* \xrightarrow{{}^t u} A^* \overset{\text{inversion}}{\rightsquigarrow} A^* \xrightarrow[]{({}^t u)^{-1} \,=\, {}^t u^{-1}} B^*$$

Donc les matrices de transition de E^* sont

$$\boxed{{}^t g_{\alpha\beta}(x)^{-1}}$$

Rang $E^* = n :=$ rang E.

· <u>Produit tensoriel</u>

On veut définir $E \otimes F \longrightarrow X$ t.q. $(E\otimes F)_x = E_x \otimes F_x \quad \forall x \in X$.

$E \quad (g_{\alpha\beta}) \quad r \times r$

$F \quad (h_{\alpha\beta}) \quad r' \times r'$

$E \otimes F \; : \; \left(g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \right)$

$(rr') \times (rr')$

· Puissances symétriques et extérieures

$$(S^m E)_x = S^m E_x$$

$$(\Lambda^m E)_x = \Lambda^m E_x$$

. Sur $\mathbb{C}$, le fibré conjugué $\overline{E}$

$\overline{E} = E$ en tant qu'espace.

$$\lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \overline{E}_x,\quad \underbrace{\lambda \cdot \xi}_{\text{dans } \overline{E}_x} \overset{\text{déf.}}{=} \underbrace{\overline{\lambda} \cdot \xi}_{\text{dans } E_x.}$$

$\boxed{\overline{g_{\alpha\beta}(x)}}$ les matrices de transition.

. X variété complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$

$$\Lambda^{p,q} T^* X := \Lambda^p T^* X \otimes \Lambda^q \overline{T^* X}$$

n'est pas un fibré vectoriel holomorphe (sauf si $q = 0$)

le fibré des (p,q)-formes.

Définition Une variété analytique complexe X de dimension $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ est une variété C^∞ de dimension réelle $2n$ munie d'un atlas holomorphe (τ_α) à valeurs dans $\mathbb{C}^n$

. atlas holomorphe $\overset{\text{déf}}{=}$ les matrices de transition $\tau_{\alpha\beta}$ sont holomorphes.

i.e. X un espace topologique muni d'un atlas holomorphe :

$$X = \bigcup_\alpha U_\alpha \quad , \; \underset{\text{ouvert}}{U_\alpha \subset X}$$

$\forall \alpha$, $\tau_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \underset{\text{ouvert}}{V_\alpha \subset \mathbb{C}^n}$ ~~holomorphe~~ homéomorphisme (les cartes holomorphes)

t.q. $\forall \alpha, \beta$ l'application de transition

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{ouvert}}{\mathbb{C}^n \supset \tau_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} \arrow[r, "\tau_\beta^{-1}"] \arrow[rr, bend right] & U_\alpha \cap U_\beta \arrow[r, "\tau_\alpha"] & \underset{\text{ouvert}}{\tau_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n}
\end{tikzcd}$$

$$\tau_{\alpha\beta} := \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}$$

est holomorphe

$$\tau_\alpha(z) = \Big(\overset{z_1^{(\alpha)}}{\tau_1^{(\alpha)}}, \dots, \overset{z_n^{(\alpha)}}{\tau_n^{(\alpha)}}\Big)$$ les composantes de τ_α dans $\mathbb{C}^n$

sont appelées coordonnées holom. locales sur U_α définies par la carte τ_α

$$\left(z_1^{(\alpha)}, \dots, z_n^{(\alpha)}\right) = \tau_{\alpha\beta}\left(z_1^{(\beta)}, \dots, z_n^{(\beta)}\right) \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta .$$

I) Connexions sur un fibré vectoriel

X variété différentiable ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$E \xrightarrow{p} X$ $\mathbb{K}$-fibré vectoriel C^∞ de rang r.

Trivialisations locales : $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, t.q. $E|_{U_\alpha} \underset{\theta_\alpha}{\overset{C^\infty}{\simeq}} U_\alpha \times \mathbb{K}^r$

difféomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

Repères locaux associés

$e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha r}$ tels que $\forall x \in U_\alpha$, $\{e_{\alpha 1}(x), \dots, e_{\alpha r}(x)\}$ est une base de E_x qui s'envoie sur la base canonique de $\mathbb{K}^r$ par θ_α.

(c-à-d : $\theta_\alpha(e_{\alpha j}(x)) = (x, e_j)$, $j = 1, \dots, r$).

Définition $U \subset X$ ouvert.

On appelle section C^∞ (ou holomorphe) de E sur U une application C^∞ (ou holomorphe)

$s : U \longrightarrow E$ t.q. $p \circ s = id_U \iff s(x) \in E_x \quad \forall x \in U$.

$$U \cap U_\alpha \xrightarrow{s|U_\alpha} E|_{U \cap U_\alpha} \xrightarrow{\theta_\alpha} (U \cap U_\alpha) \times \mathbb{K}^r$$

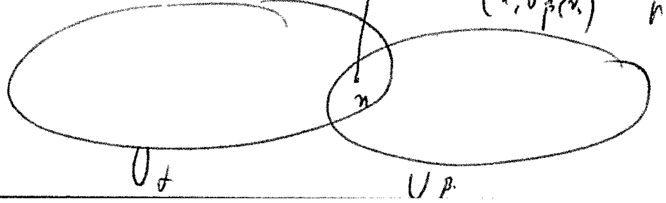
$$x \longmapsto s(x) \longmapsto (x, \sigma_\alpha(x))$$

$s(x) \in E_x$, où $\sigma_\alpha(x) = (\sigma_{\alpha 1}(x), \dots, \sigma_{\alpha r}(x)) \in \mathbb{K}^r$

E_x

$s(x) = (x, \sigma_\alpha(x))$ ~~dans~~ p.r.a. θ_α

$(x, \sigma_\beta(x))$ p.r.a. θ_β



U_α U_β

Relation de transition

$$(*) \quad \boxed{\sigma_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\,\sigma_\beta(x)} \qquad \forall\, x \in U \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

Inversement, si les $\sigma_\alpha : U \cap U_\alpha \longrightarrow \mathbb{k}^r$ satisfont $(*)$, elles se recollent en une section s de E sur U.

Notation

$C^\infty(U, E) = \{ s : U \longrightarrow E \mid s$ section C^∞ de E sur $U \}$

$\Gamma(U, E)$ sections hol. de E sur U.

Conclusion Une fois fixée une famille de trivialisations locales de E

$$(U_\alpha, \theta_\alpha)_\alpha \quad , \; E|U_\alpha \overset{\theta_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{k}^r.$$

la donnée d'une section s de E sur U consiste en la donnée d'une famille

$$\sigma_\alpha : U \cap U_\alpha \longrightarrow \mathbb{k}^r \qquad \text{d'applications}$$

satisfaisant $(*)$.

Obs

$E|U \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{k}^r$ trivialisation $\longrightarrow$ $\forall\, x \in U, \quad e_j(x) := \theta^{-1}(x, f_j)$

$f_1, \dots, f_r$ la base canonique de $\mathbb{k}^r$ $\qquad (e_1, \dots, e_r)$ un repère de E sur U.

inversement

Si $e_1, \dots, e_r$ est un repère de E sur U $\longrightarrow$ trivialisation de E sur U

(c-à-d. $\{e_1(x), \dots, e_r(x)\}$ est une base de E_x, $\forall\, x \in U$) $\qquad E|U \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{k}^r$

$\theta(e_j(x)) := (x, f_j), \; j = 1, \dots, r.$

Si $E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{k}^n$ est une trivialisation, $\{e_1, \dots, e_n\}$ le repère de E associé, toute section s de E sur U est donnée ~~par une~~ comme $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ où

$$\sigma_1, \dots, \sigma_n : U \longrightarrow \mathbb{k}.$$

On note $\boxed{s(x) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) \otimes e_j(x)}$, $x \in U$. où $s \overset{\theta}{\simeq} (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sigma$
$(\Leftrightarrow \theta \circ s = \sigma \Leftrightarrow s = \theta^{-1} \circ \sigma)$

Définition On appelle <u>p-forme à valeurs dans E</u> (de classe C^k) une section globale de classe C^k du fibré

$$\Lambda^r T^* X \underset{\mathbb{R}}{\otimes} E.$$

<u>Notation</u> $C^k(X, \Lambda^r T^* X \otimes_{\mathbb{R}} E)$ l'espace des p-formes de classe C^k à valeurs dans E.

<u>Écriture locale</u>

$E_{|U} \overset{\sigma}{\simeq} U \times \mathbb{k}^n$

$e_1, \dots, e_n$ repère associé

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(x) \otimes e_j(x) \;, \text{ où}$$

σ_j est une p-forme C^k sur U.

$$= \sum_{|I|=r} \sigma_{j,I}(x)\, dx_I \otimes e_j(x),$$

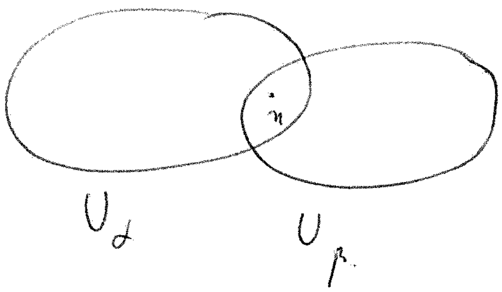
où $\sigma_j(x) = \sum_{|I|=r} \sigma_{j,I}(x)\, dx_I$

<u>But de la notion de connexion</u> : de définir sur $C^1(X, \Lambda^r T^* X \otimes E)$ un opérateur analogue à la différentielle extérieure d de Poincaré (qui est définie sur les formes scalaires $C^1(X, \Lambda^r T^* X)$).

__Observation__

Naïvement : $ds \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{r} d\sigma_j \otimes e_j(x)$ Ceci dépend du choix du repère $(e_1, \ldots, e_r)$

__Exemple__ Supposons rang $E = 1$.



e_α e_β repères de E sur U_α (resp. U_β)

$s|_{U_\alpha} = \sigma_\alpha \otimes e_\alpha$; $\sigma_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, \sigma_\beta(x) \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$

$s|_{U_\beta} = \sigma_\beta \otimes e_\beta$; $d\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\, d\sigma_\beta + (dg_{\alpha\beta})\, \sigma_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$

$\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{K}$

$\sigma_\beta : U_\beta \longrightarrow \mathbb{K}$

Si $dg_{\alpha\beta} \equiv 0$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \quad \forall \alpha, \beta$ $\big((\Leftrightarrow)$ $g_{\alpha\beta}$ est localement constante $\forall \alpha, \beta\big)$,

alors on peut définir une connexion $\quad (\overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow})$ le fibré E est __plat__

$$(ds)|_{U_\alpha} = (d\sigma_\alpha) \otimes e_\alpha \quad \text{sur } U_\alpha \quad \forall \alpha$$

Si E n'est pas plat, les 1-formes locales $(d\sigma_\alpha)_{\alpha\, E}$ ne se recollent pas en une 1-forme globale à valeurs dans E.

$(\Leftrightarrow)$ $g_{\alpha\beta}$ ne sont pas loc. constantes)

Définition On appelle connexion (linéaire) sur E une famille d'opérateurs différentiels d'ordre 1

$$D : C^k(X, \Lambda^p T^*X \otimes E) \longrightarrow C^{k-1}(X, \Lambda^{p+1} T^*X \otimes E), \quad k \geq 1,\ p = 0, 1, \dots, \dim X - 1$$

satisfaisant la règle de Leibnitz :

$$\boxed{D(f \wedge s) = df \wedge s + (-1)^r f \wedge Ds}, \quad \forall f \in C^k(X, \Lambda^r T^*X \otimes \mathbb{K})$$

(r-forme scalaire sur X),

$$\forall s \in C^k(X, \Lambda^q T^*X \otimes E).$$

Notation Étant donné deux $\mathbb{K}$-fibrés E, F sur X, on définit l'accouplement

$$(\Lambda^p T^*X \otimes E) \times (\Lambda^q T^*X \otimes F) \xrightarrow{\ \wedge\ } \Lambda^{p+q} T^*X \otimes E \otimes F$$

$$\wedge \qquad \otimes$$

$$(s, t) \longmapsto s \wedge t$$

(combinaison "$\wedge$" au niveau des formes scalaires avec $\otimes$ au niveau des sections).

où, si

$$s = \sum_{|I| = p,\ j} \sigma_{I,j}(x)\, dx_I \otimes e_j(x)$$

$$t = \sum_{|J| = q,\ h} \tau_{J,h}(x)\, dx_J \otimes f_h(x)$$

$$, \quad s \wedge t = \sum_{\substack{|I| = p \\ |J| = q \\ j, h}} \sigma_{I,j}(x)\, \tau_{J,h}(x)\, dx_I \wedge dx_J \otimes e_j(x) \otimes f_h(x).$$

En particulier, pour $X \times \mathbb{K} \longrightarrow X$ ($\mathbb{K}$-fibré en droites trivial) et $E \longrightarrow X$, on a : $\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{K}} E = E$.

Détermination de toutes les connexions dans une trivialisation fixée

$$E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{K}^n \quad , \quad (e_1, \dots, e_n)$$

trivialisation fixée

$$s = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \otimes \underbrace{e_j}_{\substack{\text{0-forme}\\ \text{à valeurs}\\ \text{dans } E.}}$$

une p-forme sur U à valeurs dans E

$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ p-formes scalaires sur U

Soit D une connexion.

$$Ds = \sum_{j=1}^{n} d\sigma_j \otimes e_j + (-1)^r \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \wedge De_j$$

De_j : 1-forme sur U à valeurs dans E.

La connexion D est déterminée par les $De_j \in C^\infty(U, \Lambda^1 T^* X \otimes E)$, $j = 1, \dots, n$.

$$De_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x) \otimes e_k(x) \quad , \quad \text{où } a_{kj} \text{ sont des 1-formes à valeurs dans } \mathbb{K}.$$

(scalaires)

On obtient :

$$\cancel{Ds = \sum_{j=1}^{n} \Big(d\sigma_j + (-1)^r}$$

$$Ds = \sum_{j=1}^{n} d\sigma_j \otimes e_j + (-1)^r \sum_{j=1}^{n} \sigma_j \wedge \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \otimes e_k = \sum_{j=1}^{n} \Big(d\sigma_j + (-1)^r \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \wedge a_{jk} \Big) \otimes e_j$$

$\| \; j \leftrightarrow k$

$$(-1)^r \sum_{j,k=1}^{n} \sigma_k \wedge a_{jk} \otimes e_j$$

$\sigma_k \wedge a_{jk}$ $\|$ $(-1)^r a_{jk} \wedge \sigma_k$

Donc :

$$\boxed{Ds \overset{\theta}{\simeq} \left(d\sigma_j + \sum_{h=1}^{n} a_{jh} \wedge \sigma_h \right)_{j=1,\dots,n}}$$

La "matrice de la connexion" D dans la trivialisation locale $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^n$ est

$$A(x) = \left(a_{jh}(x) \right)_{1 \le j,h \le n} \in C^\infty(U, \Lambda^1 T^* \otimes \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})).$$

une matrice de 1-formes.

(A dépend du choix de la trivialisation)

$$s \overset{\theta}{\simeq} \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n). \Rightarrow \boxed{Ds \overset{\theta}{\simeq} \underbrace{d\sigma}_{\text{partie scalaire (op. d'ordre 1)}} + \underbrace{A \wedge \sigma}_{\text{partie matricielle (op. d'ordre zéro)}}}$$

Inversement

Étant donné l'ouvert $U \subset X$, et une trivialisation $E|_U \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{K}^n$

la donnée d'une matrice A quelconque de 1-formes sur U définit une connexion D_A sur $E|_U$:

$$D_A s \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + A \wedge \sigma.$$

En effet,

$$D_A(f \wedge s) \overset{\theta}{\simeq} d(f \wedge \sigma) + A \wedge (f \wedge \sigma) = df \wedge \sigma + (-1)^{\deg f} f \wedge d\sigma + (-1)^{\deg f} f \wedge A \wedge \sigma$$

$$\overset{\theta}{\simeq} df \wedge \sigma + (-1)^{\deg f} f \wedge \underbrace{(d\sigma + A \wedge \sigma)}_{\text{II } \theta^{-1} \; D_A s}$$

$$\overset{\theta^{-1}}{\simeq} df \wedge s + (-1)^{\deg f} f \wedge D_A s.$$

Conséquence

. Une connexion D est uniquement dét. par A qui est uniq. dét par D

- Les connexions existent.

$X = \bigcup_j U_j$ recouvrement, $E|_{U_j} \overset{\theta_j}{\simeq} U_j \times \mathbb{K}^n$.

$(\psi_j)_j$ partition de l'unité

$(A_j)_j$ famille arbitraire de matrices de 1-formes sur U_j

On pose : $D_j \overset{\theta_j}{\simeq} d\cdot + A_j \wedge \cdot$, $\forall j$

On recolle :

$$Ds(x) := \sum_j \psi_j(x) D_j s(x)$$

Courbure d'une connexion

On a $d \circ d = 0$

Que se passe-t-il pour une connexion D ?

La transformation de jauge

$E|_\Omega \overset{\theta}{\simeq} \Omega \times \mathbb{K}^n$ deux trivialisations

$\overset{\tilde\theta}{\simeq} \Omega \times \mathbb{K}^n$

$$\begin{tikzcd} \Omega \times \mathbb{K}^n \arrow[r, "\theta^{-1}"] \arrow[rr, bend right] & E|_\Omega \arrow[r, "\tilde\theta"] & \Omega \times \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$g := \tilde\theta \circ \theta^{-1} \in C^\infty(\Omega, GL(\mathbb{K}^n))$

$s \overset{\theta}{\simeq} \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (i.e. $s = \sum_{j=1}^n \sigma_j \otimes e_j$)

$s \overset{\tilde\theta}{\simeq} \tilde\sigma = (\tilde\sigma_1, \dots, \tilde\sigma_n)$ ($s = \sum_{j=1}^n \tilde\sigma_j \otimes \tilde e_j$)

$s = \theta^{-1} \circ \sigma = \tilde\theta^{-1} \circ \tilde\sigma \Rightarrow \tilde\sigma = \underbrace{(\tilde\theta \circ \theta^{-1})}_{g} \circ \sigma$

$\Leftrightarrow \boxed{\tilde\sigma = g\sigma}$

$Ds \overset{\tilde\theta}{\simeq} d\tilde\sigma + \tilde A \wedge \tilde\sigma$ (i.e. $\tilde\theta(Ds) = d\tilde\sigma + \tilde A \wedge \tilde\sigma$)

$Ds \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + A \wedge \sigma$ (i.e. $\theta(Ds) = d\sigma + A \wedge \sigma$)

$$D^2 := D \circ D : C^k(X, \Lambda^r T^*X \otimes E) \longrightarrow C^{k-2}(X, \Lambda^{r+2} T^*X \otimes E).$$

Soit $E|_U \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{K}^n$ une trivialisation locale

$s \overset{\theta}{\simeq} \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

$Ds \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + A \wedge \sigma := \sigma_1$

$D^2 s \overset{\theta}{\simeq} d(d\sigma + A \wedge \sigma) + A \wedge (d\sigma + A \wedge \sigma) = \cancel{d^2\sigma} + (dA) \wedge \sigma - \cancel{A \wedge d\sigma} + \cancel{A \wedge d\sigma} +$

$+ A \wedge A \wedge \sigma$.

$= (dA + A \wedge A) \wedge \sigma$.

$Ds = \tilde\theta^{-1}(d\tilde\sigma + \tilde A \wedge \tilde\sigma) = \theta^{-1}(d\sigma + A \wedge \sigma)$

$\Leftrightarrow$

$d\sigma + A \wedge \sigma = g^{-1}(d\tilde\sigma + \tilde A \wedge \tilde\sigma) =$

$= g^{-1}(d(g\sigma) + \tilde A \wedge g\sigma)$

$= d\sigma + (g^{-1}dg + g^{-1}\tilde A g) \wedge \sigma$.

$\boxed{A = g^{-1} dg + g^{-1} \tilde{A} g}$ les transformations de jauge

Donc

si $s \overset{\theta}{\simeq} \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \Rightarrow \boxed{D^2 s \overset{\theta}{\simeq} \underbrace{(dA + A \wedge A)}_{\text{matrice de 2-formes scalaires sur } U} \wedge \sigma.}$

dA une matrice $n \times n$ de 2-formes scalaires sur U. (forme globale sur X.

$A \wedge A$ une matrice $n \times n$ de 2-formes scalaires sur U.

Donc D^2 est l'opérateur de multiplication par $dA + A \wedge A$ (op. d'ordre zéro).
On a donc démontré

__Théorème et définition__

il existe une 2-forme globale $\Theta(D) \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^* X \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \underset{\mathbb{K}}{\mathrm{End}}(E))$ sur X

telle que $\boxed{D^2 s = \Theta(D) \wedge s}$ $\forall s \in C^\infty(X, \Lambda^p T^* X \otimes E)$.

$\forall p = 0, 1, \ldots, \dim X$.

__Notation__

$$\left(\Lambda^2 T^* X \otimes \mathrm{End}(E)\right) \times \left(\Lambda^p T^* X \otimes E\right) \longrightarrow \Lambda^{p+2} T^* X \otimes E$$

Λ applique un end. de E sur un élément de E.

de

__Conséquence__ $D^2 = 0 \iff \Theta(D) = 0$.

On a toujours $d^2 = 0$ car le fibré trivial $E = X \times \mathbb{K}^n$ est __plat__ (les matrices de transition sont id).

__Cas particulier__ E fibré de rang 1 (fibré en droites).

$A = (a)$, où a est une 1-forme sur $U \subset X$.

$D s \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + a \wedge \sigma$ si $s \overset{\theta}{\simeq} \sigma$.

$a \wedge a = 0$

Donc $\Theta(D)_{|U} \overset{\theta}{\simeq} da$ localement exacte. Donc $\Theta(D)$ est une 2-forme globale fermée.

$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \simeq \mathbb{K}$ (car rang $E = 1$)

Donc $\Theta(D) \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^* X \otimes \mathbb{K})$ fermée.

obs: les transformations de jauge deviennent: $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{K}^*)$ (fonction inversible sur Ω)

$\boxed{\tilde{A} = A + g^{-1} dg}$ $\Rightarrow$

$\boxed{d\tilde{A} = dA}$ $\Rightarrow$ Θ est indép. de θ.

II Connexions métriques

X var. diff

$E \xrightarrow{C^\infty} X$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition <u>métrique euclidienne</u> (resp. <u>hermitienne</u>) sur E: la donnée d'une telle métrique sur chaque fibre E_x. $\langle \cdot , \cdot \rangle_x$ (produit scalaire).

$$E \times E \xrightarrow{\langle \cdot , \cdot \rangle} \mathbb{K}$$
$$(s, t) \longmapsto \langle s, t \rangle$$
accouplement euclidien (hermitien)

$E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{K}^r$, $(e_1, \dots, e_r)$

On pose:

$$h_{\lambda\mu}(x) := \langle e_\lambda(x), e_\mu(x) \rangle_x \in \mathbb{K}.$$

$(h_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu}$ matrice symétrique (resp. hermitienne) définie > 0

métrique $C^k \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ les $h_{\lambda\mu}$ sont C^k

On peut étendre $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en un accouplement euclidien (resp. hermitien) au niveau des formes :

$$\underbrace{\left(\Lambda^r T^*X \otimes E\right) \times \left(\Lambda^q T^*X \otimes E\right)}_{\wedge \;,\; \langle\cdot,\cdot\rangle} \longrightarrow \Lambda^{r+q} T^*X \otimes \mathbb{K}$$

$$(s,t) \longmapsto \{s,t\}$$

- linéaire en s
- anti-linéaire en t

$s = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sigma_j}_{r\text{-forme scalaire}} \otimes e_j$

$t = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\tau_k}_{q\text{-forme scalaire}} \otimes e_k$,

$$\{s,t\} = \sum_{j,k} \underbrace{\sigma_j \wedge \overline{\tau}_k}_{(r+q)\text{-forme scalaire}} \cdot \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{\in\, \mathbb{K} \text{ scalaire}}$$

$(r+q)$-forme scalaire.

<u>Définition</u> La connexion D est <u>compatible avec la structure métrique</u> de E (euclidienne ou hermitienne) {ou ~~on dit~~ que D est une <u>connexion métrique</u> si :

$$\boxed{d\{s,t\} = \{Ds,t\} + (-1)^{\deg s}\{s,Dt\}}$$

$\forall s \in C^1(X, \Lambda^r T^*X \otimes E)$
$\forall t \in C^1(X, \Lambda^q T^*X \otimes E)$

(la règle de Leibnitz pour le produit scalaire)

<u>Observation</u> $E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{K}^n$ trivialisation locale avec <u>métrique C^∞</u>

plus : $\exists$ un repère C^∞ <u>orthonormé</u> $(e_1,\dots,e_n)$ sur U

En effet, procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ un repère C^∞ quelconque sur E.

$$e_1 := \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}$$

$$\tilde{e}_2 := \varepsilon_2 - \langle \varepsilon_2, e_1 \rangle e_1 \quad \perp e_1$$

$$e_2 := \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} \qquad \text{etc.}$$

On peut donc supposer que $E|_U \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{k}^r$ est isométrique

(c-à-d. $e_1, \dots, e_r$ est orthonormé) $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} \quad \forall j, k$.

Condition métrique sur A

$$s \overset{\theta}{\simeq} \sum_j \sigma_j \otimes e_j \qquad \{s, t\} = \sum_{j=1}^r \sigma_j \wedge \bar{\tau}_j$$

$$t \overset{\theta}{\simeq} \sum_k \tau_k \otimes e_k$$

$$d\{s, t\} = \sum_{j=1}^r d\sigma_j \wedge \bar{\tau}_j + (-1)^{\deg s} \sum_{j=1}^r \sigma_j \wedge d\bar{\tau}_j$$

$$Ds \overset{\theta}{\simeq} \sum_{j=1}^r \left(d\sigma_j + \sum_{k=1}^r a_{jk} \wedge \sigma_k \right) \otimes e_j \quad ; \quad Dt \overset{\theta}{\simeq} \sum_{k=1}^r \left(d\tau_k + \sum_{j=1}^r a_{kj} \wedge \tau_j \right) \otimes e_k$$

$$\{Ds, t\} = \sum_j (d\sigma_j) \wedge \bar{\tau}_j + \sum_{j,k} a_{jk} \wedge \sigma_k \wedge \bar{\tau}_j$$

$$\{s, Dt\} = \sum_j \sigma_j \wedge d\bar{\tau}_j + \sum_{j,k} \sigma_j \wedge \bar{a}_{jk} \wedge \bar{\tau}_k$$

$$= (-1)^{\deg s} \sum_{j,k} \bar{a}_{jk} \wedge \sigma_j \wedge \bar{\tau}_k$$

La condition métrique :

$$\sum_{j,k} \left(a_{jk} + \bar{a}_{kj} \right) \wedge \sigma_k \wedge \bar{\tau}_j = 0 \quad , \quad \forall \sigma_k, \tau_j$$

Donc,

D est une <u>connexion métrique</u> $\iff$ la matrice de D dans un repère local <u>orthonormé</u> satisfait :

$$(a_{jk})_{j,k} = -(\bar{a}_{kj})_{j,k} \iff \boxed{A = -A^*} \qquad (A^* = {}^t\bar{A})$$

$\iff$ A est <u>anti-symétrique</u> (resp. anti-hermitienne)

<u>La courbure</u>

$$\Theta(D)_{|U} \overset{\theta}{\simeq} dA + A \wedge A \;\cancel{\neq -dA^* + A^* \wedge A^*}$$

$(A \wedge B)^* = (-1)^{\deg A \cdot \deg B}\, B^* \wedge A^*$ (en général pour des matrices A, B de formes)

$(A \wedge A)^* = (-1)^{\deg A}\, A^* \wedge A^* = -A^* \wedge A^* = -A \wedge A.$

$$\Theta(D)^*_{|U} \overset{\theta}{\simeq} dA^* + A^* \wedge A^* = -dA - A \wedge A = -(dA + A \wedge A) = -\Theta(D)_{|U}$$

Donc,

si D est <u>métrique</u> $\implies$ $\boxed{\Theta(D) \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^*X \otimes \mathrm{End}_{\text{anti-sym}}(E))}$.

<u>Cas particulier</u> E fibré en droites <u>complexes</u> ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$, rang $E = 1$)

$$\boxed{\Theta(D) \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^*X \otimes i\mathbb{R})}$$

Sur $\mathbb{C}$, on considère souvent

$i\Theta(D) \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^*X \otimes \mathrm{End}_{\text{sym}}(E))$

$i\Theta(D) \in C^\infty(X, \Lambda^2 T^*X)$ si rang $E = 1$ (i.e. $i\Theta(D)$ est une 2-forme <u>réelle</u>

<u>Observation</u> Les connexions métriques existent (prendre A_j anti-symétriques / $\mathcal{U} = (U_j)_j$)

<u>Opérations algébriques sur les fibrés et les connexions</u>

- (E, D_E) (F, D_F)

  - On définit $D_{E\oplus F}$ sur $E \oplus F$ par :

$$D_{E\oplus F}(s \oplus t) = D_E s \oplus D_F t \Rightarrow \Theta(D_{E\oplus F}) = \Theta(D_E) \oplus \Theta(D_F)$$

  - On définit

$$(\exists!\ \text{connexion } D_{E\otimes F} \text{ t.q.}) \quad D_{E\otimes F}(s \wedge t) \overset{\text{déf}}{=} (D_E s) \wedge t + (-1)^{\deg s} s \wedge D_F t$$

<u>Exercice</u> Vérifier que c'est bien défini et que la matrice de $D_{E\otimes F}$ est :

$$\boxed{A_{E\otimes F} = A_E \otimes id_F + id_E \otimes A_F}$$

$$D^2_{E\otimes F}(s \wedge t) = (D^2_E s) \wedge t + \cancel{(-1)^{\deg s + 1} D_E s \wedge D_F t + (-1)^{\deg s} D_E s \wedge D_F t} +$$

$$+ (-1)^{2\deg s} s \wedge D^2_F t$$

$$= \Theta(D_E) \wedge s \wedge t + s \wedge \Theta(D_F) \wedge t$$

car $\Theta(D_F)$ est une 2-forme.

Donc :

$$\Theta_{E\otimes F} \quad \boxed{\Theta(A_{E\otimes F}) = \Theta(D_E) \otimes id_F + id_E \otimes \Theta(D_F)}$$

<u>En particulier</u> Si E, F sont de rang 1,

$$\Theta(\underbrace{D_{E\otimes F}}_{\text{rang } 1}) = \Theta(D_E) + \Theta(D_F)$$

<u>Obs</u> À ne pas confondre avec

$$(h)(D_{\underbrace{E\oplus F}_{\text{rang } 2}}) = (h)(D_E) \oplus (h)(D_F) = \begin{pmatrix} (h)(D_E) & 0 \\ 0 & (h)(D_F) \end{pmatrix}$$

. Dual de $(E, D_E) \longrightarrow (E^*, D_{E^*})$

$$\underbrace{(\Lambda^r T^*X \otimes E^*) \times (\Lambda^q T^*X \otimes E)}_{\wedge} \longrightarrow \Lambda^{r+q} T^*X \otimes k$$

$$(\tilde{s}, s) \longmapsto \tilde{s} \wedge s$$

accouplement à valeurs scalaires

$\exists !$ connexion D_{E^*} sur E^* t.q.

$$d(\tilde{s} \wedge s) = (D_{E^*}\tilde{s}) \wedge s + (-1)^{\deg \tilde{s}}\, \tilde{s} \wedge D_E s.$$

<u>Exercice</u> : la matrice de D_{E^*} est

$$\boxed{A_{E^*} = -{}^t A_E}$$

$$\boxed{(h)(D_{E^*}) = -{}^t(h)(D_E)}$$

$${}^t(\ ) : End(E) \longrightarrow End(E^*)$$

<u>Cas particulier</u> E de rang 1.

$$\boxed{(h)(D_{E^*}) = -(h)(D_E)}$$

Première classe de Chern

Théorème et définition

$E \xrightarrow{C^\infty} X$ $\mathbb{C}$-fibré de rang 1.

$\forall D_1, D_2$ connexions sur E, la 2-forme

$\Theta(D_1) - \Theta(D_2)$ est d-exacte. $\quad \left(\Rightarrow \{\Theta(D_1)\} = \{\Theta(D_2)\} \right).$

En particulier la classe de De Rham

$$c_1(E) := \left\{ \frac{i}{2\pi} \Theta(D_E) \right\} \in H^2_{DR}(X, \mathbb{R})$$

est appelée la première classe de Chern de E.

Preuve $\quad D_i s \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + a_i \wedge \sigma \quad \Rightarrow \quad (D_1 - D_2)s \overset{\theta}{\simeq} \underbrace{\overbrace{(a_1 - a_2)}^{b}}_{\text{1-forme sur } U} \wedge \sigma$

(C'est en fait une 1-forme globale sur X

car si on choisit une autre trivialisation $\tilde{\theta}$ et on note $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ les 1-formes qui représentent les connexions D_1, D_2, on a :

$$\begin{cases} a_1 = g^{-1} dg + \tilde{a}_1 \\ a_2 = g^{-1} dg + \tilde{a}_2 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{la transformation de jauge,} \\ \text{où } g = \tilde{\theta} \circ \theta^{-1} \\ \text{la matrice de transition} \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$b = a_1 - a_2 = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2$,

donc b est une forme globale

$\Theta(D_i) \overset{\theta}{\simeq} da_i$ sur U

$\Theta(D_1) - \Theta(D_2) = d(a_1 - a_2) = db$ sur U.

forme exacte.

Choisissons D hermitienne $\Rightarrow$ $i\Theta(D)$ est réelle.

Connexions sur les variétés complexes

X variété complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$

$E \xrightarrow{C^\infty} X$ fibré vectoriel complexe (non nécessairement holomorphe); $\operatorname{rang} E = r$.

$C^\infty_{p,q}(X, E) := C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E)$ sections C^∞ du fibré C^∞

$$\Lambda^{p,q} T^* X \otimes E \longrightarrow X.$$

Décomposition par types (bidegrés)

$$\Lambda^l T^* X = \bigoplus_{p+q=l} \Lambda^{p,q} T^* X \qquad \text{fibrés}$$

induit

$$C^\infty_l(X, E) = \bigoplus_{p+q=l} C^\infty_{p,q}(X, E) \qquad \text{espaces de formes globales}$$

Obs $\quad d = d' + d'' = \partial + \bar\partial \quad$ Notation $d' := \partial$; $d'' = \bar\partial$ ~~quand dim~~; $d : \Lambda^l T^* X \to \Lambda^{l+1} T^* X$

$d' : \Lambda^{p,q} T^* X \to \Lambda^{p+1,q} T^* X$

$d'' : \Lambda^{p,q} T^* X \to \Lambda^{p,q+1} T^* X$

Définition

On appelle connexion de type $(1,0)$ sur E une famille d'opérateurs différentiels d'ordre 1

$$D' : C^\infty_{p,q}(X, E) \longrightarrow C^\infty_{p+1,q}(X, E), \qquad p, q = 0, 1, \dots, n = \dim_{\mathbb{C}} X$$

vérifiant la règle de Leibniz

$$D'(f \wedge s) = (d' f) \wedge s + (-1)^{\deg f} f \wedge D' s$$

$\forall f \in C^\infty_{p_1,q_1}(X, \mathbb{C})$ (forme scalaire)

$\forall s \in C^\infty_{p_2,q_2}(X, E)$ (forme vectorielle) idem pour une connexion de type (0,1) sur E :

$$D'' : C^\infty_{p,q}(X,E) \longrightarrow C^\infty_{p,q+1}(X,E)$$

satisfaisant

$$D''(f \wedge s) = (d''f) \wedge s + (-1)^{\deg f} f \wedge D''s$$

$\forall f \in C^\infty_{p_1,q_1}(X,\mathbb{C})$, $\forall s \in C^\infty_{p_2,q_2}(X,E)$.

Donné une trivialisation locale

$$E|_U \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{C}^r, \quad s \in C^\infty(U, \Lambda^{p,q} T^*X \otimes E)$$

$$s \overset{\theta}{\simeq} \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \qquad \Big(\text{i.e. } s = \sum_{j=1}^{r} \underbrace{\sigma_j}_{} \otimes e_j\Big)$$

(p,q)-formes scalaires

$\forall D'$ connexion de type (1,0) :

$$D's = \sum_{j=1}^{r} (d'\sigma_j) \otimes e_j + (-1)^{p+q} \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \otimes D'e_j$$

$$\overset{\theta}{\simeq} d'\sigma + A' \wedge \sigma.$$

où $A' \in C^\infty(U, \Lambda^{1,0} T^*X \otimes \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C}))$ matrice $(r\times r)$ de (1,0)-formes

$\forall D''$ connexion de type (0,1)

$$D''s \overset{\theta}{\simeq} d''\sigma + A'' \wedge \sigma$$

où $A'' \in C^\infty(U, \Lambda^{0,1} T^*X \otimes \mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{C}))$ matrice $(r\times r)$ de (0,1)-formes

<u>Obs</u> $\forall D'$ connexion de type (1,0) sur E, $\forall D''$ connexion de type (0,1) sur E, alors $D := D' + D''$ est une connexion sur E.

__Inversement__ Toute connexion D sur E admet une décomposition unique

$$D = \underbrace{D'}_{\substack{\text{connexion}\\ \text{de type}\\ (1,0)}} + \underbrace{D''}_{\substack{\text{connexion}\\ \text{de type}\\ (0,1)}} \qquad \left(\Rightarrow A = A' + A'' \right)$$

• Supposons maintenant E muni d'une __structure hermitienne__ (i.e. métrique hermitienne)

Soit $E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{C}^r$ une trivialisation locale __isométrique__

(le repère C^∞ associé $(e_1, \dots, e_r)$ est t.q. $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ $\forall j, k$ (orthonormé)).

D est hermitienne $\Leftrightarrow A = -A^* \Leftrightarrow A' + A'' = -\underbrace{(A')^*}_{\text{type } (0,1)} - \underbrace{(A'')^*}_{\text{type } (1,0)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A' = -(A'')^* \\ A'' = -(A')^* \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{A' = -(A'')^*}$$

(la conjuguée de la première égalité)

$\Downarrow$

A'' détermine complètement A', donc A.

On a donc démontré :

__Théorème__ $E \xrightarrow{C^\infty} \underbrace{X}_{\text{var complexe}}$ fibré vectoriel __complexe__ __hermitien__

Soit D''_0 une connexion de type $(0,1)$ sur E __quelconque__.

Alors : $\exists!$ connexion __hermitienne__ sur E (i.e. compatible avec la métrique hermitienne)

$D = D' + D''$

telle que $D'' = D''_0$

(i.e. D'' et la métrique déterminent complètement la connexion $\overset{\text{métrique}}{D}$).

Cas des fibrés holomorphes

ⓐ Définition X variété complexe.

$E \xrightarrow{C^\infty} X$ fibré vectoriel complexe, rang $E = r$.

E est dit un fibré holomorphe si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

(i) . E est une variété complexe. (holomorphe)

. la projection $p : E \longrightarrow X$ est holomorphe

. $\exists\ X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ un recouvrement ouvert de X t.

$\exists\ E_{|U_\alpha} \overset{\theta_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ une famille de trivialisations locales holomorphes

(ii) les matrices de transition $g_{\alpha\beta}$ sont holomorphes $\forall \alpha, \beta$

Notation $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta)$ fonctions holomorphes inversibles (i.e. sans zéros).

si rang $E = 1$

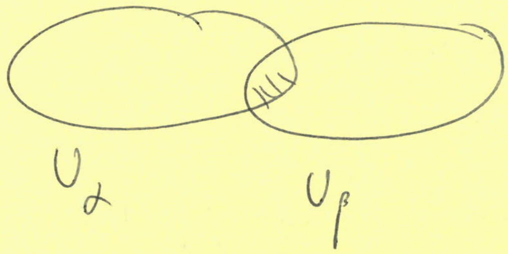
Observation Soit $E \longrightarrow X$ holomorphe et soit $s \in C^\infty_{p,q}(X, E)$.

$E_{|U_\alpha} \overset{\theta_\alpha}{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{C}^r$; $s \underset{|U_\alpha}{=} \sigma_\alpha \otimes e_\alpha$; $\sigma_\alpha = (\sigma_{\alpha 1}, \dots, \sigma_{\alpha r}) = \theta_\alpha(s)$

$e_\alpha = (e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha r})$

$E|U_\beta \simeq U_\beta \times \mathbb{C}^\lambda$ $\qquad s|U_\beta = \sigma_\beta \otimes e_\beta$ $\quad ; \sigma_\beta = (\sigma_{\beta 1}, \dots, \sigma_{\beta \lambda}) \simeq \theta_\beta(s)$ (1)

$e_\beta = (e_{\beta 1}, \dots, e_{\beta \lambda})$



$\sigma_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, \sigma_\beta(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta.$ (comme matrices).

$$\Rightarrow \quad d''\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\, d''\sigma_\beta + \underbrace{(d'' g_{\alpha\beta})}_{=0}\, \sigma_\beta \qquad \Leftrightarrow \quad \boxed{d''\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\, d''\sigma_\beta}$$

car $g_{\alpha\beta}$ est holomorphe $\qquad\qquad$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$

Donc la collection de matrices de $(p, q+1)$-formes $(d''\sigma_\alpha)_\alpha$ se recolle en une forme globale unique $d''s$ à valeurs dans E telle que

$$\theta_\alpha(d''s) = d''\sigma_\alpha \qquad \left(\text{i.e. } d''s \overset{\theta_\alpha}{\simeq} d''\sigma_\alpha \quad \forall \alpha\right).$$

On obtient donc une connexion de type $(0,1)$

$$d'' : C^\infty_{p,q}(X, E) \longrightarrow C^\infty_{p,q+1}(X, E)$$

qui étend aux formes à valeurs dans E l'opérateur $d'' = \bar\partial$ définissant la structure complexe de X :

$$d'' : C^\infty_{p,q}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p,q+1}(X, \mathbb{C}).$$

<u>Définition</u> (X, d'') var complexe.

$E \longrightarrow X$ fibré <u>holomorphe</u>

d'' est appelé <u>la connexion de type $(0,1)$ canonique</u> de E.

<u>Obs</u> On a : $d''^2 = 0$, donc $\forall p = 0, \ldots, n$ on obtient un complexe :

$$(*)_p \quad C^\infty_{p,0}(X,E) \xrightarrow{d''} C^\infty_{p,1}(X,E) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^\infty_{p,q}(X,E) \xrightarrow{d''} C^\infty_{p,q+1}(X,E) \longrightarrow \cdots$$

appelé <u>le complexe de Dolbeault</u> des $(p,\cdot)$-formes à valeurs dans E.

<u>Notation</u> $$H^{p,q}(X,E) := \ker\left(d'' : C^\infty_{p,q}(X,E) \to C^\infty_{p,q+1}(X,E)\right) \Big/ \operatorname{Im}\left(d'' : C^\infty_{p,q-1}(X,E) \to C^\infty_{p,q}(X,E)\right)$$

<u>le (p,q)-groupe de cohomologie de Dolbeault à valeurs dans E</u>

<u>Théorème</u> $$H^{0,q}(X,E) \simeq H^q(X, \mathcal{O}(E))$$

plus généralement, $$H^{p,q}(X,E) \simeq H^q(X, \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E)), \quad \forall p, q.$$

isomorphisme canonique !

où Ω^p_X est le faisceau de germes de $(p,0)$-formes holomorphes sur X.

<u>Démonstration</u> (idée).

Le complexe $(*)_p$ est une résolution acyclique du faisceau $\Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E)$:

$$0 \longrightarrow \Omega^p_X \otimes \mathcal{O}(E) \longrightarrow \Lambda^{p,0} T^*X \otimes \mathcal{O}(E) \longrightarrow \Lambda^{p,1} T^*X \otimes \mathcal{O}(E) \longrightarrow \cdots$$

par le lemme de Dolbeault-Grothendieck.

Appliquer De Rham-Weil.

(C) La connexion de Chern d'un fibré holomorphe hermitien

Définition $E \longrightarrow X$ fibré holomorphe hermitien, rang $E = r$

X var complexe

$\dim_{\mathbb{C}} X = n.$

On appelle connexion de Chern de (E,h) l'unique connexion hermitienne D sur E telle que

$$D'' = d'' \qquad (\text{la connexion de type } (0,1) \text{ canonique}).$$

La forme de courbure de D est notée

$$\Theta(E) := \Theta(D_E)$$

le tenseur de courbure de Chern

Expression locale de la connexion de Chern

$E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{C}^r$ trivialisation locale holomorphe arbitraire

$(e_1, \dots, e_r)$ le repère local holomorphe associé.

$\left(\text{i.e. } \theta(e_j) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \forall j = 1, \dots, r \right)$

$\uparrow$ $j$ième position

fonction C^∞ (pas holomorphe!)

$h_{jk} := \langle e_j, e_k \rangle \quad , j,k = 1, \dots, r. \quad ; \quad h_{jk} = \overline{h_{kj}}$

$H := (h_{jk})_{j,k = 1,\dots,r}$. la matrice hermitienne à coeff C^∞ qui représente la métrique h dans la trivialisation θ choisie.

(H dépend de θ).

Soit $s, t \in C^\infty_{\cdot,\cdot}(X, E)$, $\sigma := \theta(s)$ $\left(s \underset{|U}{\overset{\theta}{\simeq}} \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \right)$ $s_{|U} = \sum_{j=1}^n \sigma_j \otimes e_j$

$\tau := \theta(t)$ $\left(t \underset{|U}{\overset{\theta}{\simeq}} \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \right)$; $t_{|U} = \sum_{k=1}^n \tau_k \otimes e_k$

On a :

$$\boxed{\{s,t\} = \sum_{j,k=1}^n h_{jk}\, \sigma_j \wedge \bar\tau_k = {}^t\sigma\, H \bar\tau}\,, \quad \text{donc} \quad \left[\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} \in M_{n,1},\ \tau \in M_{n,1} \right]$$

$$d\{s,t\} = {}^t(d\sigma) \wedge H\bar\tau + (-1)^{\deg s}\, {}^t\sigma \wedge \Big(\underset{H^{-1}H}{(dH)} \wedge \bar\tau + H\, d\bar\tau \Big)$$

$$= {}^t\left(d\sigma + \bar H^{-1} d'\bar H \wedge \sigma \right) \wedge H\bar\tau + (-1)^{\deg s}\, {}^t\sigma \wedge H \overline{\left(d\tau + \bar H^{-1} d'\bar H \wedge \tau \right)}$$

si on pose $Ds \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + \bar H^{-1} d'\bar H \wedge \sigma$

$$= \{Ds, t\} + (-1)^{\deg s} \{s, Dt\}.$$

Ceci montre que la connexion définie par $Ds \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + \underbrace{\bar H^{-1} d'\bar H}_{(1,0)} \wedge \sigma$ est une connexion unitaire. De plus $D'' = d''$, donc D est la connexion de Chern

Car $dH = d'H + d''H = H\left(H^{-1} d'H + H^{-1} d''H \right)$

$${}^t\left(\bar H^{-1} d'\bar H \right) = d'\,{}^t(\bar H)\; {}^t(\bar H)^{-1} = (d'H)\, H^{-1} \quad \text{car } {}^t(\bar H) = H \quad (H \text{ hermitienne})$$

donc on a décomposé

$$ {}^t\sigma \wedge (dH) \wedge \bar\tau = {}^t\sigma \wedge (d'H) \wedge \bar\tau + {}^t\sigma \wedge (d''H) \wedge \bar\tau$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\left({}^t\sigma \wedge (d'H) \wedge H^{-1} \right) \wedge H\bar\tau \qquad {}^t\sigma \wedge H \left(H^{-1} (d''H) \wedge \bar\tau \right)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$${}^t\left(\bar H^{-1} d'\bar H \wedge \sigma \right) \wedge H\bar\tau \qquad {}^t\sigma \wedge H\, \overline{\left(\bar H^{-1} (d'\bar H) \wedge \tau \right)}$$

Conclusion : la connexion de Chern coïncide avec la connexion hermitienne définie par

$$Ds \overset{\theta}{\simeq} d\sigma + \underbrace{\bar H^{-1} d'\bar H}_{(1,0)} \wedge \sigma \iff \begin{cases} D's \overset{\theta}{\simeq} d'\sigma + \bar H^{-1} d'\bar H \wedge \sigma = \bar H^{-1} d'(\bar H \sigma) \\ D''s \overset{\theta}{\simeq} d''\sigma \end{cases}$$

En particulier, $D'' = d''$ et $\begin{cases} D'^2 = 0 \\ D''^2 = 0 \end{cases}$

Donc, $\boxed{D^2 = \underbrace{D'D'' + D''D'}_{\text{type }(1,1)}}$ $\Rightarrow$ $\Theta(E)$ type $(1,1)$.

$\quad\;\, \| \\ \Theta(E)$

<u>Théorème</u> Le tenseur de courbure de Chern vérifie

$$i\Theta(E) \in C^\infty_{1,1}(X, \mathrm{Herm}(E,E))$$

Si $E_{|U} \overset{\sigma}{\simeq} U \times \mathbb{C}^r$ est une trivialisation locale <u>holomorphe</u>, et H est la matrice hermitienne représentant la métrique de $E_{|U}$, on a:

$$i\Theta(E) = i\, d''(\bar{H}^{-1} d'\bar{H}) \quad \text{sur } U.$$

<u>Preuve</u>

$$(D'D'' + D''D')\sigma \simeq \bar{H}^{-1} d'(\bar{H}\, d''\sigma) + d''(\bar{H}^{-1} d'(\bar{H}\sigma))$$

$$= \underbrace{\bar{H}^{-1}\bar{H}}_{id} d'd''\sigma + \bar{H}^{-1} d'\bar{H} \wedge d''\sigma + d''(\bar{H}^{-1} d'\bar{H} \wedge \sigma) + d''(\underbrace{\bar{H}^{-1}\bar{H}}_{id}\, d'\sigma)$$

$$= \underbrace{(d'd'' + d''d')}_{0}\sigma + \cancel{\bar{H}^{-1} d'\bar{H} \wedge d''\sigma} + d''(\bar{H}^{-1} d'\bar{H}) \wedge \sigma - \cancel{\bar{H}^{-1} d'\bar{H} \wedge d''\sigma}.$$

$$= d''(\bar{H}^{-1} d'\bar{H}) \wedge \sigma.$$

<u>Cas particulier fondamental</u>

Si rang $E = r = 1$, H est une fonction positive ; $H = \|e\|_h^2$

On l'écrit :

$$H = e^{-\varphi}, \quad \varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \qquad \left(e^{-\varphi} = \|e\|_h^2 \Leftrightarrow \varphi = -\log \|e\|_h^2 \right)$$

On obtient :

$$D'^{\theta} \simeq d' + e^{\varphi} d'(e^{-\varphi}) \wedge \cdot = d' - (d'\varphi) \wedge \cdot = e^{\varphi} d'(e^{-\varphi} \wedge \cdot)$$

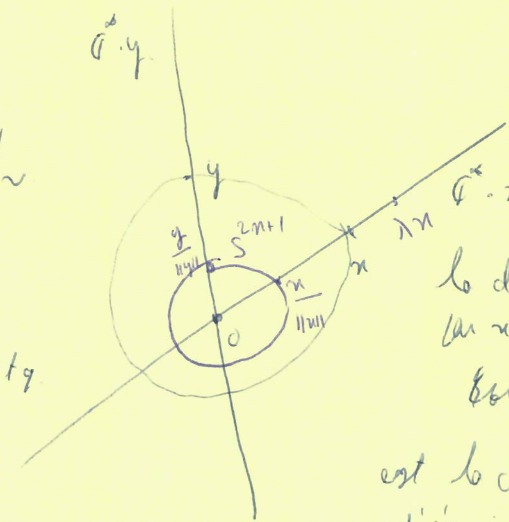
$$\boxed{i\Theta(E) = i\, d'd''\varphi} \text{ sur } U \qquad \left(i\Theta(E) = -i\, d'd'' \log \|e\|_h^2 \right)$$

(1,1)-forme fermée, réelle, sur X.

En effet $i\Theta(E) = i\,d''\left(\bar{H}^{-1} d'\bar{H}\right) = i\,d''\left(e^{\varphi} d'(e^{-\varphi})\right)$
$= i\,d''\left[e^{\varphi} e^{-\varphi} d'\varphi\right] = -i\,d''d'\varphi =$
$= i\,d'd''\varphi$

Exemples

1) L'espace projectif complexe



la droite passant par x privée de 0 de $\mathbb{C}^{n+1}$ est la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} := \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

l'ensemble des droites $\overbrace{\text{complexes}}$ $\overbrace{\text{épointées}}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$

où, si $x, y \in \mathbb{C}^{n+1}$, on définit : $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tq $y = \lambda x$.

La projection canonique

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

$$(z_0, z_1, \dots, z_n) \xmapsto{\pi} [z_0 : z_1 : \dots : z_n] := \mathbb{C}^* \cdot (z_0, z_1, \dots, z_n) = \left\{ (\lambda z_0, \lambda z_1, \dots, \lambda z_n) \,/\, \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$$

coordonnées de $\mathbb{C}^{n+1}$ — coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^n$

Donc $\mathbb{P}^n = \left\{ [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \,/\, (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \right\}$

Proposition $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est une variété analytique complexe compacte de $\dim_{\mathbb{C}} = n$

Démonstration

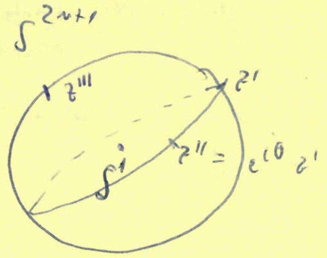
. Compacité $\mathbb{P}^n = S^{2n+1} / S^1$; $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ la sphère unité

$S^1 \times S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1}$; $S^1 \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$(\lambda, z) \longmapsto \lambda z$ action — le cercle unité

$\left.\begin{array}{l} \|z\| = 1 \\ |\lambda| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \|\lambda z\| = 1$

Par cette action : $\underset{\mathbb{C}^{n+1}}{\underset{\cap}{z}} \sim \dfrac{z}{\|z\|} \in S^{2n+1}$



De plus, $z' \sim z'' \Longleftrightarrow z'' = e^{i\theta} z'$

$\mathbb{P}^n = S^{2n+1}/S^1$ est ~~muni~~ de la topologie quotient

$S^{2n+1} = \{ (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} / |z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1 \} \subset \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$

On définit la distance suivante sur $\mathbb{P}^n$:

$$d([z'], [z''']) := \inf_{\theta} d(z''', e^{i\theta} z')$$

Elle définit la topologie quotient de $\mathbb{P}^n$. Car

$$d([z'], [z''']) \leq d(z', z''')$$

$\mathbb{P}^n$ est compact pour la top. quotient. Car $\pi : \underbrace{S^{2n+1}}_{\text{compact}} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est continue et surjective.

~~Variétés~~ . Structure de variété complexe.

$\forall j = 0, 1, \ldots, n$, posons

$U_j := \{ [z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n / z_j \neq 0 \} \subset \mathbb{P}^n$ ouvert

Sur U_j : $[z_0 : z_1 : \dots : z_n] = \left[\frac{z_0}{z_j} : \frac{z_1}{z_j} : \dots : \frac{z_{j-1}}{z_j} : 1 : \frac{z_{j+1}}{z_j} : \dots : \frac{z_n}{z_j}\right]$

j ième position.

$$U_j \xrightarrow[\simeq]{\tau_j} \mathbb{C}^n$$

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right)$$

est un homéomorphisme

peuvent être choisies comme coordonnées sur $\tau_j(U_j)$

$\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0,1,\dots,n} U_j$ recouvrement ouvert de $\mathbb{P}^n$.

La collection $(\tau_j)_{j=0,1,\dots,n}$ définit un atlas holomorphe sur $\mathbb{P}^n$ (i.e. les changements de cartes sont holomorphes) :

$$\begin{tikzcd} \tau_k(U_j \cap U_k) \arrow[r, "\tau_k^{-1}"] \arrow[rr, bend right] & U_j \cap U_k \arrow[r, "\tau_j"] & \tau_j(U_j \cap U_k) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U_j \cap U_k \arrow[r, "\tau_j"] \arrow[dr, "\tau_k"'] & \tau_j(U_j \cap U_k) \\ & \tau_k(U_j \cap U_k) \arrow[u, "\tau_j \circ \tau_k^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$\tau_{jk} := \tau_j \circ \tau_k^{-1}$

$(t_0, \dots, \hat{t}_k, \dots, t_n) \xmapsto{\tau_{jk}} (w_0, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n)$

$$(w_0, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n) = \left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right)$$

$$(t_0, \dots, \hat{t}_k, \dots, t_n) = \left(\frac{z_0}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_n}{z_k}\right)$$

$w_\ell = \frac{z_\ell}{z_j}$ if $\ell \neq j$

$t_\ell = \frac{z_\ell}{z_k}$ if $\ell \neq k$

So $t_\ell z_k = w_\ell z_j \Rightarrow w_\ell = \frac{z_k}{z_j} t_\ell$, $\frac{z_k}{z_j} = \frac{1}{t_j}$

So, $\boxed{w_\ell = \frac{t_\ell}{t_j}}$

$$\left.\begin{array}{l} t_\ell = \frac{z_{l-1}}{z_k} \\ w_\ell = \frac{z_{l-1}}{z_j} \end{array}\right\} \Rightarrow t_\ell z_k = w_\ell z_j \Rightarrow w_\ell = t_\ell \frac{z_k}{z_j} = \frac{t_\ell}{t_{j+1}}, \text{ si } \ell \neq j, k.$$

Observation $\mathbb{P}^n = U_0 \cup H_0$,

où $U_0 = \{ [1 : z_1 : \dots : z_n] \mid (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \} \simeq \mathbb{C}^n$.

$$U_0 \ni [1 : z_1 : \dots : z_n] \xmapsto{\ \simeq\ } (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

et $H_0 = \{ [0 : z_1 : \dots : z_n] \mid (z_1, \dots, z_n) \neq 0 \} \simeq \{ [z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$

l'hyperplan à l'infini dans la carte U_0.

De même, $\mathbb{P}^n = U_j \cup H_j$, $\forall j = 1, \dots, n$.

H_j : l'hyperplan à l'infini dans la carte U_j.

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
$= S^2$
la sphère de Riemann

Généralisation V esp. e.v. complexe, $\dim_{\mathbb{C}} V = n+1$

$\mathbb{P}(V) := (V \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$ l'espace projectif de V.

l'ensemble des droites de V (si 0 est ajouté à chaque classe $\mathbb{C}^* \cdot z$).

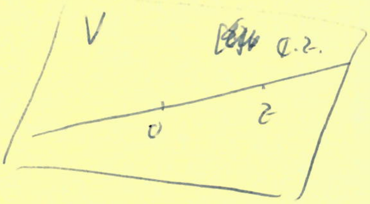
Définition Le fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $X = \mathbb{P}(V)$ défini par

$L \longrightarrow X \ni [z]$

$L_{[z]} := \mathbb{C} \cdot z \subset V$.

(cela fait un fibré vectoriel hol en droites).

la droite de V passant par z.



est appelé le fibré tautologique de $\mathbb{P}(V)$ et est noté $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$. $(= \mathcal{O}(-1))$

~~[illegible]~~

$$\begin{matrix} V \\ \cup \\ L_{[z]} \end{matrix}$$

Soit h_V une métrique hermitienne sur V. $\longrightarrow$ métrique hermitienne h sur $L_{[z]}$

$$h = h_V\big|_{\mathbb{C}\cdot z} = h_V\big|_{L_{[z]}}$$

Soit $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$ une B.O. de V. $\longrightarrow$ $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$

$$\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Sur U_j, on a une section s_j de L :

$$U_j \ni [z] \xmapsto{\ s_j\ } \Big(\underbrace{\tfrac{z_0}{z_j}}_{w_0}, \dots, \underbrace{\tfrac{z_{j-1}}{z_j}}_{w_{j-1}}, 1, \underbrace{\tfrac{z_{j+1}}{z_j}}_{w_{j+1}}, \dots, \underbrace{\tfrac{z_n}{z_j}}_{w_n}\Big) \in \mathbb{C}\cdot z = L_{[z]}.$$

On a aussi $L|_{U_j} \simeq U_j \times \mathbb{C}$ avec $e_j = s_j$ repère local holomorphe trivialisant.

$$\frac{s_j}{s_k} = \frac{z_k}{z_j} \quad \text{sur } U_j \cap U_k. \qquad \forall j, k.$$

$$\Theta_h(L)\big|_{U_j} = -d'd'' \log \|s_j\|_h^2 = -d'd'' \log\left(1 + |w_0|^2 + \dots + |\widehat{w_j}|^2 + \dots + |w_n|^2\right)$$

$$\left(= -i\partial\bar\partial \log e^{-\varphi}\right)$$

Donc,

$$\Theta_h(L)|_{U_0} = -d'd'' \log\left(1 + |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2\right) < 0$$

$(1,1)$-forme définie négative. (faire les calculs !)

<u>Conclusion</u> $\underbrace{i\Theta_h(\mathcal{O}(-1))}_{-\omega_{FS}} < 0$, où ω_{FS} est la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n$.

Définition $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(k) := \mathcal{O}(-1)^{\otimes(-k)}$

Obs ω_{FS} est une $(1,1)$-forme globale sur $\mathbb{P}^n$

$$\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$$

$$\pi^*\omega_{FS} \qquad\qquad \omega_{FS}$$

Définition ω_{FS} est la $(1,1)$-forme dans $\mathbb{P}^n$ t.q.

$$\pi^*\omega_{FS} = i\, d' d'' \log|z|^2 = i\, d'd'' \log\left(|z_0|^2+|z_1|^2+\dots+|z_n|^2\right).$$

On a, $\omega_{FS}|_{U_0} = i\, d'd''\log\left(1+|z_1|^2+\dots+|z_n|^2\right) = i\, d'd''\log(1+|z|^2)$

$$U_0 \simeq \mathbb{C}^n.$$

$$[1:z_1:\dots:z_n] \longmapsto z=(z_1,\dots,z_n).$$

Obs $i\,\Theta_{h^{-k}}(\mathcal{O}(k)) = k\,\omega_{FS}. = \begin{cases} >0, & \text{si } k>0 \\ 0, & \text{si } k=0 \\ <0, & \text{si } k<0 \end{cases}$

$\mathcal{O}(0) = \mathbb{P}^n\times\mathbb{C}$ est fibré en droites trivial.

Systèmes de coordonnées normalisées

X var complexe.

$E \longrightarrow X$ fibré vectoriel holom de rang $r \geq 1$ avec métrique hermitienne h C^∞

Obs Il n'est pas possible, en général, de trouver un repère local $(e_1, \ldots, e_r)$ de

$$E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^r$$

qui soit à la fois holomorphe et orthonormé.

preuve On aurait $H = (\delta_{j\mu})_{j,\mu} = id. \Rightarrow$

$$i\Theta(E)_{|U} = i\, d''(\bar{H}^{-1} d' \bar{H}) = 0.$$

courbure de Chern

Inversement, si $i\Theta(E)_{|U} = 0$, alors on peut trouver un tel repère.

L'obstruction est donc la courbure.

Lemme $\forall\, x_0 \in X$ $\exists$ repère holomorphe local $(e_1, \ldots, e_r)$ de E au voisinage de x_0 tq

$\forall (z_1, \ldots, z_n)$ système de coordonnées locales holomorphes centrées en x_0

($i.e.$ $z_j(x_0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$ de sorte que $x_0 \equiv 0$ dans ces coordonnées)

$$\langle e_\lambda(z), e_\mu(z) \rangle_h = \delta_{\lambda\mu} - \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk\lambda\mu} z_j \bar{z}_k + O(|z|^3)$$

où les coefficients $c_{jk\lambda\mu}$ sont les coefficients du tenseur de courbure de Chern de E

$$\Theta_h(E)_{x_0} = \Theta(D_E)_{x_0} = \sum c_{jk\lambda\mu}\, \underbrace{dz_j \wedge d\bar z_k}_{(1,1)} \otimes \underbrace{e_\lambda^* \otimes e_\mu}_{\mathrm{Hom}(E,E)\simeq E^*\otimes E.} \in \Lambda^{1,1} T^* X \otimes \mathrm{End}(E)$$

(1,1)-forme à valeurs dans $\mathrm{End}(E) \simeq E^* \otimes E$

<u>Condition de symétrie</u> : $\overline{c_{jk\lambda\mu}} = c_{kj\mu\lambda}$.

<u>Démo</u> : à lire dans Dem, chap. V.

<u>Définition</u> Un tel repère est appelé "repère normal" en x_0.

<u>Chapitre 2</u> : Variétés hermitiennes et kählériennes.

I) <u>Notions de métrique hermitienne et kählérienne</u>

X var complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

<u>Définition</u> Une <u>métrique hermitienne g sur X</u> est une métrique hermitienne sur $TX = T^{1,0}X$

<u>Rappel</u> $g \longleftrightarrow$ la donnée, pour chaque $x \in X$, d'une métrique hermitienne

$\langle\, ;\, \rangle_x$ sur $T_x X$ (produit scalaire, donc >0)

variant C^∞ avec $x \in X$.

$z_1, \dots, z_n$ coord. locales holom. de X sur $U \subset X$.

$\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ repère local holom. de $(TX)_{|U}$

Posons $\gamma_{jk}(z) := \left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_z , \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_z \right\rangle_z \in \mathbb{C}$, $z \in U$

$(\gamma_{jk}(z))_{j,k=1,\dots,n}$ une matrice hermitienne (i.e. $\gamma_{jk} = \overline{\gamma_{kj}}$) définie positive ($>0$), $\forall z \in U$

(par définition).

<u>Notation</u> On écrit $g(z) = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}(z)\, dz_j \otimes d\bar z_k$ (ou $\langle\ ,\ \rangle_{g(z)}$)

Si $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_z$, $\eta = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_z$, $\xi, \eta \in T_z X$, on a $\boxed{\langle \xi, \eta \rangle_{g(z)} = \sum \gamma_{jk}(z)\, \xi_j \bar\eta_k}$

$\boxed{\text{ou } g(z)(\xi,\eta)}$

~~Cette notation~~ car $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_z , \frac{\partial}{\partial z_k}\Big|_z \right\rangle_{g(z)} = \gamma_{jk}(z)$ par notation.

<u>Proposition</u> $\exists$ isomorphisme <u>canonique</u> :

$$\mathrm{Herm}(TX) \xrightarrow{\ \simeq\ } \Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}} T^\star X$$

métriques hermitiennes sur X $\qquad$ $(1,1)$-formes réelles sur X, définies positives

$$g = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}\, dz_j \otimes d\bar z_k \longmapsto \omega := i \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}\, dz_j \wedge d\bar z_k$$

De plus, $\gamma_{jk} = \overline{\gamma_{kj}}\ \forall j,k \iff \omega = \bar\omega$ (i.e. la forme ω est <u>réelle</u>).

Preuve $\bar{\omega} = -i \sum_{j,k=1}^{n} \bar{\gamma}_{jk}\, d\bar{z}_j \wedge dz_k = i \sum_{j,k=1}^{n} \bar{\gamma}_{kj}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$

Donc $\bar{\omega} = \omega \iff \gamma_{jk} = \bar{\gamma}_{kj} \quad \forall j,k.$

Caractère canonique de l'isomorphisme

$$\omega(\xi,\eta) = i \sum \gamma_{jk} \begin{vmatrix} \xi_j & \bar{\xi}_k \\ \eta_j & \bar{\eta}_k \end{vmatrix} = i \sum_{j,k} \gamma_{jk} (\xi_j \bar{\eta}_k - \bar{\xi}_k \eta_j) =$$

$$= -2\, \mathrm{Im} \Big(\sum_{j,k} \gamma_{jk} \xi_j \bar{\eta}_k \Big) = -2\, \mathrm{Im} \langle \xi,\eta \rangle_{g(z)}, \quad \forall \xi,\eta \in TX$$

$$= -2\, \mathrm{Im}\, g(z)(\xi,\eta).$$

Donc

$$\boxed{\omega = -2\, \mathrm{Im}\, g} \quad \text{comme formes linéaires}$$

(relation intrinsèque, indép de coordonnées $\Rightarrow$ canonique).

> Attention
>
> $dz_j \otimes d\bar{z}_k(\xi,\eta) \overset{\text{déf.}}{=} \xi_j \bar{\eta}_k$
>
> $i\, dz_j \wedge d\bar{z}_k(\xi,\eta) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} \xi_j & \bar{\xi}_k \\ \eta_j & \bar{\eta}_k \end{vmatrix}$
>
> Mais on les identifie par la suite.

Point de vue adopté dorénavant

On écrira les métriques hermitiennes sous la forme

$$\underbrace{\omega = i \sum \omega_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k}_{(1,1)\text{-forme}} \qquad \text{(i.e. on regarde la (1,1)-forme associée)}$$

avec $\overline{\omega_{jk}} = \omega_{kj} \quad \forall j,k.$ (car $\bar{\omega} = \omega$, i.e. ω est réelle)

$(\omega_{jk})_{j,k} > 0$ matrice définie positive. (en partic, non dégénérée)

<u>Définition</u> (Kähler, 1933)

On dit que ω est <u>kählérienne</u> si $d\omega = 0$

(c-à-d, ω est fermée)

<u>Obs</u> $d\omega = \underbrace{d'\omega}_{(2,1)} + \underbrace{d''\omega}_{(1,2)}$. Donc $d\omega = 0 \iff \begin{cases} d'\omega = 0 \\ d''\omega = 0 \end{cases}$

$\omega = \bar{\omega} \Rightarrow d'\omega = \overline{d''\bar{\omega}}$. Donc $d'\omega = 0 \iff d''\omega = 0$.

$= \overline{d''\omega}$

<u>Conclusion</u>

$d\omega = 0 \iff d'\omega = 0 \iff d''\omega = 0$

<u>Condition de Kähler en coordonnées locales</u>

$$d'\omega = i \sum_{j,k,l=1}^{n} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial z_l} \underbrace{dz_l \wedge dz_j}_{j \leftrightarrow l} \wedge d\bar{z}_k = i \sum_{\substack{j<l \\ k}} \left(\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial z_l} - \frac{\partial \omega_{lk}}{\partial z_j} \right) dz_l \wedge dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

Donc ω est kählérienne $\iff d'\omega = 0 \iff$

$$\boxed{\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial z_l} = \frac{\partial \omega_{lk}}{\partial z_j} \quad \forall j, l, k.}$$

$j \leftrightarrow l$

conjugaison

$\iff d''\omega = 0 \iff \boxed{\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \omega_{jl}}{\partial \bar{z}_k} \quad \forall j, k, l.}$

Définition On dit qu'une variété complexe X est hermitienne si

$$\exists\ \omega \quad \text{métrique hermitienne sur } X.$$

L'élément de volume hermitien

$$dV_\omega := \frac{1}{n!}\,\omega^n \qquad (n,n)\text{-forme sur } X.$$

$$\underset{\substack{\text{en coordonnées}\\ \text{locales}}}{=} i^n \det(\omega_{jk})\, dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar z_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar z_n$$

(exercice !)

$$\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

$$(\omega_{j_1 k_1}) \dots (\omega_{j_n k_n})$$

En coordonnées réelles : $z_j = x_j + i y_j$, $j = 1, \dots, n$.

$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ coordonnées réelles.

$$\boxed{i\, dz_j \wedge d\bar z_j = 2\, dx_j \wedge dy_j} \qquad (\text{à vérifier !})$$

Donc $dV_\omega = 2^n \det(\omega_{jk})\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$
de signe constant sur X. (>0) (car $(\omega_{jk})_{j,k} > 0$)

Fait Toute variété complexe est orientable. (car il ne s'annule pas et varie continûment avec le point)

Preuve Soit $(z_1, \dots, z_n)$, $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ deux systèmes de coordonnées hol. locales.

$$dz_j = \sum_{k=1} a_{jk}\, d\zeta_k, \quad A = (a_{jk})_{j,k} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial \zeta_k}\right)_{j,k} \text{ le Jacobien}$$

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = (\det A)\, d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

$$d\bar z_1 \wedge \dots \wedge d\bar z_n = (\det \bar A)\, d\bar\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\bar\zeta_n$$

$$dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge \cancel{dz} \dots \wedge dz_n \wedge d\bar z_n = |\det A|^2\, d\zeta_1 \wedge d\bar\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar\zeta_n$$

$$|\det A|^2 > 0.$$

Convention On oriente les variétés kählériennes complexes par les systèmes de coordonnées réelles $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ de sorte que

$$dV_\omega > 0$$

$\big($ c-à-d $\det(\omega_{jk}) > 0$ sur X (de signe constant, du fait du choix des coordonnées) $\big)$.

Corollaire

Si X est compacte, on a :

(*) $$\int_X \omega^n = n! \int_X dV_\omega := n!\, \mathrm{Vol}_\omega(X) > 0.$$

le volume kählérien

~~Observation~~

(*) entraîne que la 2-forme fermée ω (la forme de Kähler) ne peut pas être exacte.

En effet, si $\omega = d\alpha$, avec α 1-forme $\Rightarrow$ $\omega^n = d\left(\alpha (d\alpha)^{n-1}\right)$ forme exacte.

$$\Rightarrow \int_X \omega^n = \int_{\partial X} \dots = 0 \quad \text{par Stokes}$$

De même, la $(2k)$-forme fermée ω^k ne peut pas être exacte. Contradiction.

Conséquence de (*)

$$H^{2k}_{DR}(X, \mathbb{R}) \neq 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n, \quad n = \dim_{\mathbb{C}} X$$

car $\{\omega^k\} \in H^{2k}_{DR}(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

Restriction topologique importante sur les variétés kählériennes compactes

~~Exemples~~

Observation Faux si X n'est pas compacte.

~~Notation~~ Notion réelle correspondante : forme symplectique = 2-forme ω non-dégénérée tq. $d\omega = 0$. (sur une variété réelle X).

Forme kählérienne : X est complexe
invariance

. la forme symplectique ω est de type (1,1)

. $(\omega_{jk})_{j,k} > 0$.

~~Exemple fonda~~

Le prototype des variétés symplectiques

X var. réelle quelconque

Alors T^*X est une variété symplectique avec forme symplectique canonique.

l'espace total du fibré cotangent

$\omega = d\alpha$ d-exacte

α 1-forme sur T^*X

Exemples de variétés complexes compactes kählériennes

(0) $\mathbb{C}^n$ est une var. kählérienne (non-compacte)

$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$.

la métrique kähl standard (elle est à coeff constants !)

obs : Toute expr. ω hermi. à coeff. const est kähl.

1) Tores complexes.

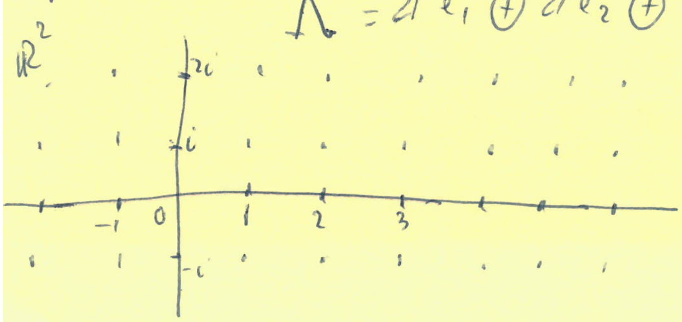
$X = \mathbb{C}^n / \Lambda$ kählérienne compacte

où $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ est un réseau {

Réseau : $\exists\ e_1, \dots, e_{2n}$ une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ tq.

i.e.

$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_{2n}$ sous-groupe discret de $\mathbb{R}^{2n}$ à quotient compact.



$\Lambda = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)^n \subset \mathbb{C}^n$ $\left(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}\right.$ un réseau $\left.\right)$

Tous les tores complexes $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ sont kählériens

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j \quad \text{(ou toute métrique à coeff. constants).}$$

kählérienne. (sur $\mathbb{C}^n$, passe au quotient).

2) $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

$$\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$$

$$z \longmapsto [z].$$

On définit ω_{FS} sur $\mathbb{P}^n$ par :

$$\pi^*\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} d'd''\log\|z\|^2 = \frac{i}{2\pi} d'd''\log\left(|z_0|^2+\dots+|z_n|^2\right)$$

sur $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$.

la métrique de Fubini-Study.

$\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$,

$$(\omega_{FS})_{|U_0} = \frac{i}{2\pi} d'd''\log\left(1+\left|\frac{z_1}{z_0}\right|^2+\dots+|z_n|^2\right)$$

$$= \frac{i}{2\pi} d'd''\log\left(1+|\zeta_1|^2+\dots+|\zeta_n|^2\right)$$

(car $i\, d'd''\log|z_0|^2 = 0$ sur $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$)

dans la carte $U_0 = \{[z]\in\mathbb{P}^n \mid z_0\neq 0\}$

avec coordonnées

$$\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}, \quad j=1,\dots,n.$$

Observation Si $f: U \to \mathbb{C}$ fonction holomorphe

tq. $f(x)\neq 0\ \forall x\in U$ (inversible)

alors

$i\, d'd''\log|f|^2 = 0$

Faire le calcul ! (la (1,1) forme nulle)

On a vu que $(\omega_{FS})_{|U_0} > 0$.

On a aussi $d\omega_{FS} = 0$. (évident !)

Donc $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \omega_{FS})$ est une variété kähl. compacte.

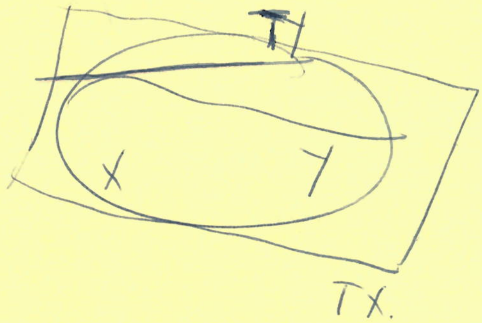
3) X var. complexe.

$Y \subset X$ n-var. holomorphe.

Si ω kähl sur $X \Rightarrow \omega_{|Y}$ kähl sur Y.

$d\omega = 0$ sur $X \Rightarrow d(\omega_{|Y}) = (d\omega)_{|Y} = 0$.

$\omega > 0$ sur $TX \Rightarrow \omega_{|TY} > 0$.



Cas particulier

$X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ n-variété holomorphe.

Déf X est dite variété projective.

alors X est kählérienne.

Donc : projective $\Rightarrow$ kählérienne.

$\not\Leftarrow$

(on verra plus tard).

Méthode de construction des var. projectives

$$X = \{ [z] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \;/\; P_1(z_0, \dots, z_n) = \dots = P_k(z_0, \dots, z_n) = 0 \}$$

avec $P_1, \dots, P_k$ polynômes homogènes de degrés $d_1, \dots, d_k$.

Lissité de X : $dP_1 \wedge \dots \wedge dP_k \neq 0$ ~~surglemm~~ en tout point de $\pi^{-1}(X)$

$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$

$\pi^{-1}(X)$. $\qquad X$

P_j homogène de degré d_j : $P_j(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^{d_j} P_j(z_0, \dots, z_n)$.

Donc $P_j(z_0, \dots, z_n) = 0 \Leftrightarrow P_j(\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n)) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{C}$.

Donc ça passe au quotient : $P_j([z]) = 0$ a bien un sens $\big(\Leftrightarrow P_j(\lambda z) = 0 \; \forall \lambda \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P_j(z) = 0 \big)$.

Observation il existe des variétés complexes (compactes) non-kählériennes.

<u>Exemple</u> : les ~~surfaces~~ variétés de Hopf.

$$X := \left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right) / u^{\mathbb{Z}} \quad ; \quad \dim X = n \geq 2 \text{ (par hypothèse)}$$

où $u : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ avec $0 < \alpha < 1$ fixé. homothétie de rapport α, $0<\alpha<1$ (contraction)

$u(z) = \alpha \cdot z$

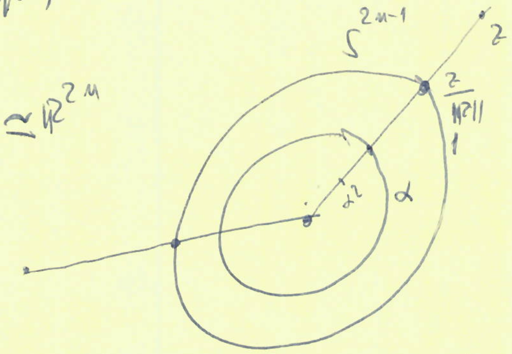
$u^{\mathbb{Z}} := \{ u^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$z \sim \alpha^k z \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

• X n'est pas kählérienne car $H^2_{dR}(X; \mathbb{R}) = 0$.

En effet,

$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$



$X \simeq S^{2n-1} \times S^1$

$$\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \overset{\text{difféo}}{\simeq} S^{2n-1} \times \mathbb{R}_+^* \overset{\text{difféo}}{\simeq} S^{2n-1} \times \mathbb{R}.$$

$$z \longmapsto \left(\frac{z}{\|z\|}, \|z\|\right) \longmapsto \left(\frac{z}{\|z\|}, \log\|z\|\right)$$

$$X : z \sim \alpha^k z \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\frac{z}{\|z\|}, \log\|z\|\right) \sim \left(\frac{z}{\|z\|}, k \log\alpha + \log\|z\|\right)$$

$$\|\alpha^k z\| = \alpha^k \|z\| \Rightarrow \log\|\alpha^k z\| = k\log\alpha + \log\|z\|$$

Donc, dans $\mathbb{R}$, $\underbrace{x}_{\log\|z\|} \sim x + (\log\alpha)\, k \quad , \forall k \in \mathbb{Z}$

Donc, par ce difféo, $X \simeq S^{2n-1} \times \left(\mathbb{R} / (\log\alpha)\mathbb{Z}\right) \overset{\text{difféo}}{\simeq} S^{2n-1} \times S^1$

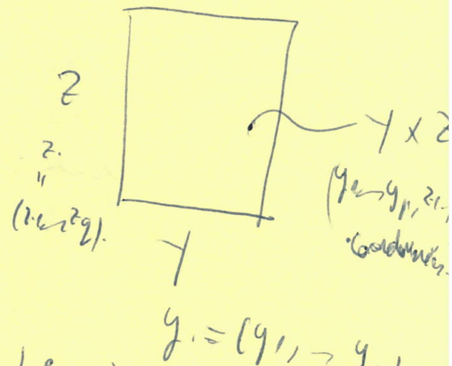
car $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$

On peut calculer H^2_{DR},

$$H^2_{DR}(X,\mathbb{R}) = H^2(S^{2n-1}\times S^1,\mathbb{R}) = \underbrace{H^2(S^{2n-1})}_{0}\otimes H^0(S^1) + \overbrace{H^1(S^{2n-1})}^{0}\otimes H^1(S^1)$$
$$+ \underbrace{H^0(S^{2n-1})}_{0}\otimes \underbrace{H^2(S^1)}_{0}$$
$$= 0.$$

par la formule de Künneth :

$$H^k(Y\times Z) \simeq \sum_{l=0}^{k} H^l(Y)\otimes H^{k-l}(Z)$$



$$\left\{\sum_{l+m=k} \underbrace{\alpha_l(y)}_{l\text{-forme sur }Y}\wedge\underbrace{\beta_m(z)}_{m\text{-forme sur }Z.}\right\} \longleftrightarrow \sum_{l+m=k}\{\alpha_l(y)\}\otimes\{\beta_m(z)\}.$$

Voir Godbillon « Top. algébrique élémentaire »

X est donc non-kählérienne ⇒ non-projective.

Coordonnées normalisées pour une métrique kählérienne

Proposition X var. complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$

$$\omega = i\sum_{j,k=1}^{n} \omega_{jk}(z)\, dz_j\wedge d\bar z_k$$ métrique hermitienne.

(écriture locale).

Il y a équivalence entre:

(i) ω est kählérienne.

(ii) $\forall z_0\in X$ $\exists (\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ système de coordonnées holom. locales centrées en z_0

tq. ω est tangente à l'ordre 2 à une métrique à coefficients constants

dans le système de coord. $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ sur un voisinage de z_0

c'est-à-dire :

$$\omega = i \sum \widetilde{\omega}_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k \quad , \text{ avec } \widetilde{\omega}_{jk}(z) = \delta_{jk} + O(|z|^2).$$

(tangente à l'ordre 2)

Si tel est le cas, on peut choisir les coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ de sorte que

$$\widetilde{\omega}_{jk}(z) = \underbrace{\delta_{jk}}_{\substack{\text{terme} \\ \text{de degré 0}}} - \underbrace{\sum_{l,m=1}^{n} c_{jklm}\, z_l \bar{z}_m}_{\substack{\text{termes d'ordre 2.} \\ \text{pas de type } z_l z_m \\ \text{ou } \bar{z}_l \bar{z}_m}} + \underbrace{O(|z|^3)}_{\text{termes d'ordre} \geq 3} \quad \text{au voisinage de } 0.$$

pas de termes d'ordre 1 $(z_l, \bar{z}_m)$

les coefficients de la courbure.

où

$$\Theta_\omega(TX)_{x_0} = \sum_{j,k,l,m} c_{jklm} \underbrace{dz_j \wedge d\bar{z}_k}_{(1,1)\text{-forme.}} \otimes \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\right)^* \otimes \frac{\partial}{\partial z_m}}_{(TX)^* \otimes TX \simeq \mathrm{Hom}(TX, TX)}$$

courbure ~~de~~ de (TX, ω)

Donc, la courbure de (TX, ω) est l'obstruction à ce que l'on puisse enlever les termes en $z_l \bar{z}_m$

$(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ est à courbure nulle $\rightsquigarrow$ ω_0 hill. à <u>coeff. constants</u>

<u>Idées</u> : à lire dans Demailly, chapitre 6.

Chapitre 3 Éléments de théorie de Hodge

1) Structures hermitiennes

X var. complexe, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, avec métrique hermitienne ω

$E \longrightarrow X$ $\mathbb{C}$-fibré vectoriel C^∞, $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}} E = r$, avec métrique hermitienne h

Rappel
$$\omega = i \sum_{j,k=1}^{n} \omega_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\bar z_k \quad \longleftrightarrow \quad \omega = \sum \omega_{jk}(z)\, dz_j \otimes d\bar z_k$$

(1,1)-forme   métrique hermitienne sur TX

$(\omega_{jk})_{j,k} > 0$

hermitienne

Si $\xi, \eta \in TX$, $\xi = \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, $\eta = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial z_k}$,
$$\omega_{(z)}(\xi,\eta) = \sum_{j,k=1}^{n} \omega_{jk}(z)\, \xi_j \bar\eta_k \in \mathbb{C}.$$

Rappel V, h_V espace vectoriel hermitien

W, h_W — " —

$V \otimes W$ est muni de la métrique hermitienne $h_V \otimes h_W$:
$$(h_V \otimes h_W)(v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) \overset{\text{déf.}}{=} \underbrace{\underbrace{h_V(v_1,v_2)}_{\langle v_1, v_2\rangle_V} \cdot \underbrace{h_W(w_1,w_2)}_{\langle w_1, w_2\rangle_W}}_{\substack{\text{bilinéaire en } (v_1, w_1)\\ \text{anti-bilinéaire en } (v_2, w_2)}}$$

Donc, ça s'étend à $V \otimes W$.

Si $(e_\lambda)_\lambda$ base orth. de V
$(\varepsilon_\mu)_\mu$ base orth de W $\Big\} \Rightarrow \left(e_\lambda \otimes \varepsilon_\mu\right)_{\lambda,\mu}$ base orth. de $V \otimes W$

• $\Lambda^h V$ est muni de la métrique hermitienne $h = \Lambda^h h_V$:

$$\Lambda^h h_V \left(v_1' \wedge v_2' \wedge \dots \wedge v_h', v_1'' \wedge v_2'' \wedge \dots \wedge v_h''\right) \overset{\text{déf.}}{=} \det\left(h_V\left(v_i', v_j''\right)\right)_{1 \le i,j \le h}$$

multilinéaire alternée en $(v_1', \dots, v_h')$
antimultilinéaire alternée en $(v_1'', \dots, v_h'')$

Si $(e_\lambda)_\lambda$ base orth. de $V \Rightarrow \left(e_\Lambda := e_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge e_{\lambda_h}\right)_{|\Lambda| = h}$ B.O. de $\Lambda^h V$.

$\Lambda = 1 \le \lambda_1 < \dots < \lambda_h \le \dim V$

On en déduit une structure hermitienne (de (ω, h)) sur

$$\Lambda^{p,q} T^*X \otimes E := \underbrace{\Lambda^p T^*X}_{\Lambda^p \omega} \otimes \underbrace{\overline{\Lambda^q T^*X}}_{\overline{\Lambda^q \omega}} \otimes \underbrace{E}_{h}$$

(p,q) - formes à val. dans E

• $\overline{V}$ est muni de la métrique hermitienne $\overline{h_V} \doteq h_{\overline{V}}$:

$$\overline{h_V}\left(v', v''\right) \overset{\text{déf.}}{=} \overline{h_V(v', v'')}$$

Normes L^2 Soit $u : X \longrightarrow \Lambda^{p,q} T^*X \otimes E$ à coeff. mesurables (section).

$$\|u\|^2_{\omega,h} := \int_X \left|u(x)\right|^2_{\omega,h} \, dV_\omega(x) \quad \left(\langle\langle u, v \rangle\rangle_{\omega,h} := \int_X \langle u(x), v(x) \rangle_{\omega,h} \, dV_\omega(x) \right)$$

$u(x) \in \Lambda^{p,q} T^*_x X \otimes E_x$, $\omega(x)$, $h(x)$ métriques herm.

$\Lambda^{p,q} \omega(x) \otimes h(x)$.

$dV_\omega := \frac{\omega^n}{n!} = \det(\omega_{jk})_{j,k} \; i dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge \dots \wedge i dz_n \wedge d\bar z_n$

$L^2(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E) \overset{\text{déf}}{=} \{ u : X \longrightarrow \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E$ à coeff. mesurables $/ \; \|u\|^2_{\omega,h} < +\infty \}$

l'espace des sections L^2 ((p,q)-formes à val dans E). L^2

C'est un espace de Hilbert !

(le complété de $C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E)$ dans la norme $\| \; \|_{\omega,h}$)

Opérateurs différentiels sur des fibrés hermitiens F, G

$(F, h_F), (G, h_G) \longrightarrow (X, \omega)$ $\mathbb{C}$-fibrés hermitiens herm.

Supposons F muni d'une connexion D.

$P : C^\infty(X, F) \longrightarrow C^\infty(X, G)$ op. différentiel défini ~~par D~~

Localement sur X ; choisissons :

$x = (x_1, \dots, x_{2n})$ coordonnées $/ \mathbb{R}$.

ou $z = (z_1, \dots, z_n)$ — " — $/ \mathbb{C}$.

dx la mesure de Lebesgue

$dV_\omega(x) = f(x) \, dx$.

fonction.

$(e_\lambda)_{\lambda = 1, \dots, r}$, $(\varepsilon_\mu)_{\mu = 1, \dots, r'}$ $\Big\}$ repères orthonormés C^∞ de F, G.

Soit $u \in C^\infty(X, F)$.

$$u = \sum_{\lambda=1}^{l} u_\lambda(x)\, e_\lambda$$ localement.

fonctions C^∞.

$Pu \in C^\infty(X, G)$, $(Pu)(x) = \sum_{\mu=1}^{l'} (Pu)_\mu(x)\, \varepsilon_\mu(x)$

$$\boxed{(Pu(x))_\mu = \sum_{\substack{|\alpha| \le m \\ \lambda = 1, \dots, l}} a_{\lambda,\mu,\alpha}(x)\, D^\alpha u_\lambda(x)}$$

m = l'ordre de l'opérateur P.

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}$$

$a_{\lambda,\mu,\alpha}$ fonctions C^∞

Proposition (adjoint formel d'un op).

Étant donné $P : C^\infty(X, F) \longrightarrow C^\infty(X, G)$,

$\exists !\ P^\alpha : C^\infty(X, G) \longrightarrow C^\infty(X, F)$ de sorte que

$$\langle\langle Pu, v \rangle\rangle = \langle\langle u, P^\alpha v \rangle\rangle$$ dès que $u \in C^\infty(X, F)$

$v \in C^\infty(X, G)$

et $\operatorname{Supp} u \cap \operatorname{Supp} v$ est compact

(pas de condition si X est compact).

Démonstration

$$\langle\langle Pu, v \rangle\rangle = \int_X \sum_{\lambda,\mu,\alpha} a_{\lambda,\mu,\alpha}(x)\, D^\alpha u_\lambda(x)\, \overline{v_\mu(x)}\, \underbrace{\gamma(x)\, dx}_{dV_\omega(x)}$$

(si les supports sont $\subset$ la carte considérée, sinon, prendre une partition de l'unité !)

$$\underset{\substack{\text{int. par} \\ \text{parties}}}{=} \int_X \sum_{\lambda,\mu,\alpha} u_\lambda(x)\, \underbrace{(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\lambda,\mu,\alpha}(x)\, \overline{v_\mu(x)}\, \gamma(x) \right)}_{(P^* v)_\lambda\, \gamma(x)} dx.$$

On n'a qu'à prendre

$$(P^* v)_\lambda := \gamma(x)^{-1} \sum_{\mu,\alpha} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(\overline{a_{\lambda,\mu,\alpha}}(x)\, \gamma(x)\, v_\mu(x) \right).$$

P^* est un op. diff. d'ordre m. (le même que P).

<u>Définition</u> On appelle P^* l'adjoint formel de P.

($\neq$ l'adjoint hilbertien).

<u>Remarque</u> Étant donné $P : C^\infty(X, F) \longrightarrow C^\infty(X, G)$, on peut l'étendre au sens des distributions en :

$$\tilde{P} : \mathcal{D}'(X, F) \longrightarrow \mathcal{D}'(X, G)$$

section de F
à coeff. distributions.

De même pour $\widetilde{P^*}$. Alors

$$\langle\langle \tilde{P} u, v \rangle\rangle = \langle\langle u, \widetilde{P^*} v \rangle\rangle$$ dès que : 1) Supp $u \cap$ Supp v est compact.

2) $u \in \mathcal{D}'$ et $v \in C^\infty$

ou

$u \in C^\infty$ et $v \in \mathcal{D}'$.

$D : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^1 T^* X \otimes E)$ un op. diff d'ordre 1

l'opérateur de connexion

On notera $D^* = D'^* + D''^*$ l'adjoint formel.

$\bar\partial^{*}$: $C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{p-1,q} T^* X \otimes E)$

de type $(-1,0)$, d'ordre 1

$\bar\partial^{*}$ de type $(0,-1)$, d'ordre 1

<u>Autres opérateurs importants</u>

$L u := \omega \wedge u$ op diff d'ordre 0 (ne dérive pas) de type $(1,1)$

$L : C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{p+1,q+1} T^* X \otimes E)$ op de multiplication

$\Lambda := L^*$ d'ordre 0 de type $(-1,-1)$ op de contraction.

2) Relations de commutation

• <u>Crochet de commutation gradué</u>

Soit $V = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} V^d$ un e.v. gradué.

$A \in \mathrm{End}(V)$, $A : \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} V^d \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} V^d$

Si $A : V^d \longrightarrow V^{d+a}$ $\forall d \in \mathbb{Z}$ (pour un certain $a \in \mathbb{Z}$ fixé), on dit que A est un <u>end. gradué de degré a</u>

Si $A, B \in \mathrm{End}(V)$ end gradués de degrés a, b, on pose

$$\boxed{[A, B] := AB - (-1)^{ab} BA.}$$

crochet de comm. gradué

Exemple Soit $\alpha \in C^\infty(X, \Lambda^a T^*X)$, a-forme

$\beta \in C^\infty(X, \Lambda^b T^*X)$, b-forme.

et $Au := \alpha \wedge u$ produit de degré a (d'ordre 0)

$Bu := \beta \wedge u$ produit de deg. b (d'ordre 0)

$A, B : C^\infty(X, \bigoplus_k \Lambda^k T^*X) \to C^\infty(X, \bigoplus_k \Lambda^k T^*X)$

On a :
$\beta \wedge \alpha = (-1)^{ab} \alpha \wedge \beta$ et donc

$$[A, B] = \alpha \wedge \beta \wedge \cdot - (-1)^{ab} \underbrace{(\beta \wedge \alpha)}_{(-1)^{ab}\alpha\wedge\beta} \wedge \cdot = \alpha \wedge \beta \wedge \cdot - \alpha \wedge \beta \wedge \cdot = 0$$

Donc $[A, B] = 0$.

Identité de Jacobi

$A, B, C : \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} V^d \to \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} V^d$ end. gradués de degrés a, b, c.

Alors :

$$(-1)^{ac}[A, [B, C]] + (-1)^{ab}[B, [C, A]] + (-1)^{bc}[C, [A, B]] = 0$$

Preuve Exercice !

Laplaciens complexes

. Opérateur de Laplace-Beltrami holomorphe

$$\Delta' := [D', D'^*] = D'D'^* + D'^* D'$$

$\Delta' : C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^*X \otimes E) \to C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^*X \otimes E)$

op. diff d'ordre 2, de degré 0 (de type (0,0))

• Opérateur de Laplace-Beltrami anti-holomorphe

$$\Delta'' := [D'', D''^*] = D''D''^* + D''^* D'' : C^\infty_{p,q}(X,E) \circlearrowleft$$

ordre 2, type $(0,0)$ (degré 0).

• Op. de Laplace-Beltrami réel

$$\Delta := [D, D^*] = DD^* + D^* D : C^\infty_k(E) \circlearrowleft$$

ordre 2, degré 0. (pas de type pur en général)

But : relier les opérateurs $\Delta, \Delta', \Delta''$ (dépendent de ω car D^*, D'^*, D''^* en dépendent)

Point de départ :

Relations de commutation fondamentales (comm. kählériennes).

$$(E,h) \xrightarrow{C^\infty} (X,\omega)$$

$\mathbb{C}$-fibré herm. (pas nécessairement holom.) — var. kählérienne (pas nécessairement compacte)

Si ω est kählérienne, on a :

a) $D'^* = i[\Lambda, D'']$

$(-1,0)$ — $\underbrace{(1,-1)\quad(0,1)}_{(-1,0)}$

c) $D' = -i[D''^*, L]$

b) $D''^* = -i[\Lambda, D']$

d) $D'' = i[D'^*, L]$

Démonstration a) $\Leftrightarrow$ b) par conjugaison, car $D'' = \overline{D'}$

$\overline{\Lambda} = \Lambda$ car $\overline{\omega} = \omega$ (forme réelle)

a) $\Leftrightarrow$ c) par adjonction, car $[A,B]^* = [B^*, A^*]$ — $L = \omega\wedge\cdot \Rightarrow \overline{L} = \overline{\omega}\wedge\cdot = \omega\wedge\cdot = L$

(c) ⟺ (d) par conjugaison ((b) ⟺ (d) par adjonction).

Donc (a) ⟺ (b) ⟺ (c) ⟺ (d).

Il suffit de démontrer (a).

<u>Première étape</u> : le cas spécial suivant

$$X = \mathbb{C}^n, \quad \omega = i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

$$\underset{\substack{(\text{trivial})\\ \text{de rang } 1}}{E = X \times \mathbb{C}}\ ; \quad \underset{\substack{\text{valeur absolue}\\ \text{métrique triviale}}}{h(\xi) = |\xi|^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{C} = E_x \quad \forall x \in X.$$

$$D = d = \underbrace{d'}_{\partial} + \underbrace{d''}_{\bar{\partial}}$$

<u>Rappel</u> : la <u>contraction</u> par un vecteur ξ

V e.v. (complexe)

$\xi \in V$.

Pour tout k ; ξ définit un opérateur linéaire.

$$\xi \lrcorner \cdot \quad \underbrace{\Lambda^k V^*}_{k\text{-formes}} \longrightarrow \underbrace{\Lambda^{k-1} V^*}_{(k-1)\text{ formes}} \qquad \text{opérateur de contraction.}$$

$$\alpha \longmapsto \xi \lrcorner \alpha \qquad (\alpha \text{ contractée par } \xi)$$

où $\boxed{(\xi \lrcorner \alpha)(\eta_1, \dots, \eta_{k-1}) := \alpha(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{k-1})}$

$$\forall (\eta_1, \dots, \eta_{k-1}) \in \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{(k-1)\text{ fois}}$$

$\xi \lrcorner \alpha$ définit bien un élément de $\Lambda^{k-1} V^*$. (parfois on note $\xi \lrcorner \alpha = \iota_\xi \alpha$)

Formule

$$\boxed{\xi \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (\xi \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\xi \lrcorner \beta)}$$ (la règle de Leibniz)

$\forall \alpha \in \Lambda^k V^*$
$\forall \beta \in \Lambda^l V^*$

Exercice ! (Berger - Gostiaux Géom diff. de variétés)

. Supposons que V est hermitien $\Rightarrow V^* \simeq \bar{V}$

$V^* = \{ \langle \cdot, \xi \rangle \, / \, \xi \in V \}$.

$V^* \ni \langle \cdot, \xi \rangle \longmapsto \bar{\xi} \in \bar{V}$ $\mathbb{C}$-linéaire bijective.

Donc $V \simeq \overline{V^*}$

$\xi \longmapsto \langle \xi, \cdot \rangle$ $\mathbb{C}$-linéaire bijective.

On a :

$$\boxed{\langle \xi \lrcorner \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \xi^* \wedge \beta \rangle}$$, où $V \longrightarrow V^*$

$\xi \longmapsto \langle \cdot, \xi \rangle := \xi^*$

$\mathbb{C}$-antilinéaire bijective

$\forall \alpha \in \Lambda^{k+1} V^*$
$\forall \beta \in \Lambda^k V^*$
$\forall \xi \in V$

Donc $\boxed{(\xi \lrcorner \cdot)^* = \xi^* \wedge \cdot}$

Démonstration : exercice !

idée : soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une B. O. de V

On peut supposer que $\|\xi\| = 1$ et $\xi = e_1$

Soit $\alpha = \sum_{|I|=k+1} \alpha_I \underset{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}}^*}{e_I^*}$. On a :

$$(\xi \lrcorner \alpha)(\eta_1, \dots, \eta_k) = \alpha(\underset{e_1}{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_k) = \sum_{\substack{I=(1J) \\ |J|=k}} \alpha_{1J}\, e_J^*(\eta_1, \dots, \eta_k)$$

$dz_j \underset{\text{au sens de } \langle T^{1,0}, \rangle}{\overset{\wedge}{=}} \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^* = dz_j$

$T^{1,0}\mathbb{C}^n \ni \frac{\partial}{\partial z_j} \longmapsto \langle \cdot, \frac{\partial}{\partial z_j} \rangle_\omega \in (T^{1,0}\mathbb{C}^n)^* = \Lambda^{1,0} T^*\mathbb{C}^n$ la mét. herm. standard de

Donc : $\left(\frac{\partial}{\partial z_j} \lrcorner \cdot\right)^* = dz_j \wedge \cdot$

$\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial \bar z_j}$ (int. par parties)

l'adjoint formel au sens des op. diff.

Obs Si $e_1, \dots, e_n$ est une B.O. de V, on a :

$$\begin{cases} e_j \lrcorner e_k^* = \delta_{jk} \\ e_{i_1} \lrcorner (e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*) = e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \end{cases} \quad (1)$$

Notre cas $V = T_x X$; $\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ une B.O. (par rapport à ω)

$V^* = T_x^* X$; $dz_1, \dots, dz_n$ une B.O. (— " —)

4) Calcul de d''^*

Si $u = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} u_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar z_J$, $d''u = \sum_{I,J} (d'' u_{IJ}) \wedge dz_I \wedge d\bar z_J$

$$= \sum_{\substack{I,J \\ j}} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_j \wedge dz_I \wedge d\bar z_J \overset{\text{not}}{=} \sum_j d\bar z_j \wedge \frac{\partial u}{\partial \bar z_j}$$

$\frac{\partial u}{\partial \bar z_j} \overset{\text{déf}}{\underset{\text{not}}{=}} \sum_{I,J} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar z_j}\, dz_I \wedge \dots$ (on dérive les coefficients)

Si $v = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} v_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar z_J$, on a : $\langle\langle u, v \rangle\rangle = \int_X \sum_{I,J} u_{IJ} \cdot \bar v_{IJ}\, 2^n\, d\lambda(z)$

mesure de Lebesgue de coord. réelles.

mesure de Lebesgue de coord complexes $z_1, \dots, z_n$

~~On obtient :~~

$\langle\langle d''^* u, v \rangle\rangle = \int \cancel{\langle d'' u, v \rangle\, dV} = \int$

On obtient :

$$d'' = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar z_j}\, d\bar z_j \wedge \cdot \;\overset{(1)}{\Longrightarrow}\; \boxed{d''^{*} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z_j}\right)}$$

4) Calcul de $[d''^{*}, L] = d''^{*} L - L\, d''^{*}$

On a :

$$[d''^{*}, L]u = d''^{*}(\omega \wedge u) - \omega \wedge (d''^{*} u)$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial z_j}(\omega \wedge u)\right)}_{=\, \frac{\partial \omega}{\partial z_j} \wedge u \,+\, \omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j}} - \omega \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right)\right)\right]$$

$\frac{\partial \omega}{\partial z_j} = 0$ car ω est à coeff. constants.

$$= -\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \left(\omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j}\right) - \omega \wedge \cancel{\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial z_j}\right)}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \left(\omega \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner\, \omega\right) \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j} + \omega \wedge \cancel{\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \frac{\partial u}{\partial z_j}\right)}$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner\, \omega\right)}_{=\,-i\,dz_j} \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j} = i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge \frac{\partial u}{\partial z_j} = i\, d'u$$

Par ailleurs, $\frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner\, \omega = \frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \left(i \sum_{k} dz_k \wedge d\bar z_k \right) = -i\, dz_j$

Donc $\boxed{[d''^{*}, L]u = i\, d'u}$

Deuxième étape : le cas général.

Fixons $x_0 \in X$ quelconque et $z = (z_1, \dots, z_n)$ coordonnées locales holom.-normalisées pour ω en x_0.

(ω est kählérienne !) et un repère normalisé pour le fibré.

Alors, expression si $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$ orth.

$$\langle\langle u,v\rangle\rangle = \int_X \sum_{i,j} u_{ij}\overline{v_{ij}} + \underbrace{\int_X \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl}\, u_{ij}\,\overline{v_{kl}}}_{\text{erreur d'orthonormalité}}, \quad \text{avec } a_{ijkl}(z) = O(|z|^2) \text{ près de } x_0$$

$\forall\, u,v$ tq. Supp u, Supp v compacts $\subset$ voisinage de coord. autour de x_0.

$$\omega(z) = \sum_{j,k} \omega_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\bar z_k = \sum_{j,k} \Big(\overbrace{\delta_{jk} + O(|z|^2)}^{\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\rangle_{\omega(z)}}\Big)\, dz_j \wedge d\bar z_k$$

$\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ ne sont pas orthonormés p/ ω, mais ils le sont modulo $O(|z|^2)$

Donc,
$$d''^* u = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\right) + \underbrace{\sum_{i,j,k,l} b_{ijkl}\, u_{ij}\, dz_k \wedge d\bar z_l}_{\text{op. d'ordre 0}}$$

expression si $\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$ est ω-orth.

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial u_{ij}}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar z_j} \lrcorner (dz_j \wedge d\bar z_j)$$

op. d'ordre 1

l'erreur d'orthonormalité (en ordre < 1)

où $b_{ijkl} = \overbrace{\cancel{\partial}}^{\text{dérivées des}}\, a_{ijkl} = O(|z|)$ près de x_0.

Comme $\frac{\partial \omega}{\partial z_j} = O(|z|)$, on obtient

$$[d''^*, L]\, u = i\, d' u + O(|z|) \Rightarrow [d''^*, L]\, u = i\, d' u \text{ en } x_0 \text{ (quelconque)}$$

Si on a un fibré, choisir ~~une base normale~~ un repère normalisé.

Conséquence 1

Si $(E, h) \longrightarrow (X, \omega)$ est holomorphe hermitien, ω est de Kähler,

D la connexion de Chern de (E, h),

alors on a l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano (BKN)

$$\boxed{\underset{(0,0)}{\Delta''} = \underset{(0,0)}{\Delta'} + \underbrace{[\, \underset{(1,1)}{i\Theta_h(E)\wedge \bullet}, \underset{(-1,-1)}{\Lambda}\,]}_{(0,0)}}$$

En particulier, si $E = X \times \mathbb{C}$ avec métrique triviale, $\boxed{\Delta'' = \Delta'}$

D', Δ'' d'ordre 2 ; $\Delta'' - \Delta'$ d'ordre 0.

Démonstration

$$\Delta'' = [D'', D''^*] \overset{\text{relation de commutation}}{=} [D'', -i[\Lambda, D']]$$

$$\overset{\text{Jacobi}}{=} -[\Lambda, i\Theta_h(E)] + \underbrace{[D', D'^*]}_{= \Delta'} = \Delta' + [i\Theta_h(E), \Lambda].$$

Jacobi : $-[D'', [\Lambda, D']] + [\Lambda, \underbrace{[D', D'']}_{\substack{= D'D'' + D''D' \\ = D^2 \\ = \Theta_h(E) \\ (\Theta_h(E)\wedge \bullet)}}] + [D', \underbrace{[D'', \Lambda]}_{\substack{= -[\Lambda, D''] \\ = i D'^*}}] = 0$

D^2 ← D la connexion de Chern

$-[\Lambda, D''] = iD'^*$ ← relation de commutation

Conséquence 2

Mêmes hypothèses, alors

$$\boxed{\Delta = \Delta' + \Delta''}$$

Démonstration

$$\Delta = [D, D^*] = [D' + D'', D'^* + D''^*] = \Delta' + \Delta'' + \underbrace{[D', D''^*]}_{\substack{\parallel \\ 0}} + [D'', D'^*]$$

$$[D'', D'^*] = \overline{\underbrace{[D', D''^*]}_{\substack{\parallel \\ 0}}}$$

On a :

$$[D', D''^*] = [D', -i[\Lambda, D']] \overset{\text{Jacobi}}{=} 0$$

Jacobi :

$$-[D', [\Lambda, D']] + [\Lambda, \underbrace{[D', D']}_{\substack{\parallel \\ 2D'^2 = 0}}] + [D', \overbrace{[D', \Lambda]}^{\substack{-[\Lambda, D'] \\ \parallel}}] = 0$$

$2D'^2 = 0$. Car D est la connexion de Chern.

$$\Rightarrow -2[D', [\Lambda, D']] = 0 \Rightarrow [D', [\Lambda, D']] = 0.$$

---

4) Résultats fondamentaux sur les opérateurs elliptiques

$E, F \xrightarrow{C^\infty} X$ fibrés ~~hermitiens~~ riemanniens.

Soit $P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, F)$ opérateur diff. à coeff. C^∞

Le symbole principal de P

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$$

$$\xi \in T^{\mathbb{R}*}X = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(TX, \mathbb{R})$$

Notations $u = \sum_\lambda u_\lambda \otimes e_\lambda$

$Pu = \sum_\mu (Pu)_\mu \otimes f_\mu$

$$\left(Pu(x)\right)_\mu = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m \\ \lambda = 1 \to r}} a_{\lambda\mu\alpha}(x) D^\alpha u_\lambda(x)$$

Donc $a_\alpha(x) := \left(a_{\lambda\mu\alpha}(x)\right)_{\lambda,\mu} : E_x \longrightarrow F_x$.

$a_\alpha(x) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x) \quad \forall x$

<u>Définition</u> On dit que P est <u>elliptique</u> si

$\forall x \in X$

$\forall \xi \in {}^{\mathbb{R}}T^* X$, $\xi \neq 0$, $P_m(x, \xi) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ est <u>injectif</u>

<u>Espaces de Sobolev</u> ~~[illegible]~~

$W^s_{loc}(X, E)$ les sections L^2_{loc} u ainsi que toutes leurs dérivées $D^\alpha u$, $|\alpha| \leq s$.

Si X est compacte, $W^s_{loc}(X, E) = W^s(X, E)$ a une topologie d'espace de Hilbert.

$$\|u\|^2_{W^s(X,E)} := \sum_{j \in J} \sum_{|\alpha| \leq s} \int_X \left|D^\alpha(\psi_j u)\right|^2 dV$$

, où $(\psi_j)_j$ est une partition de l'unité relative à un recouvrement trivialisant de X pour E.

<u>Obs</u> Si E est muni d'une structure hermitienne et si X est compacte, $\| \ \|_{W^s} \sim \| \cdot \|_{W^s_{g,h}}$

<u>Inégalité fondamentale (de Gårding)</u>

Si X est <u>compacte</u> et si P est <u>elliptique</u>, $P : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, F)$ d'ordre m, on a :

$$\|u\|_{W^{s+m}} \leq C \cdot \left(\|Pu\|_{W^s} + \|u\|_{W^0}\right) \qquad \begin{matrix} \forall s \\ \forall u \end{matrix}$$

$$\left(\left.\begin{matrix} Pu \in W^s \\ u \in W^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u \in W^{s+m}\right)$$

Idée de la démonstration

(R. Wells "Diff. Anal on Complex manifolds")

Cas particulier : $X = \mathbb{R}^n$

$$P = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D^\alpha$$ à coeff. constants et homogène de degré m.

$E = F = X \times \mathbb{R}$ fibrés en droites triviaux

$$\|u\|^2_{W^s} = \sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha u|^2 \, d\lambda(x) = \sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha u}|^2 \, d\lambda(\xi) = \sum_{|\alpha| \le s} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi)$$

↑ la transformée de Fourier.

Plancherel

$$\sim \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi)$$

Donc $$\|Pu\|^2_{W^s} \sim \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, |\widehat{Pu}(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} |P(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi)$$

$$\widehat{Pu}(\xi) = P(\xi)\, \hat{u}(\xi)$$

P elliptique $\iff$ $P(\xi) = P(x, \xi) \in \mathrm{Hom}(E_x, F_x) = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ ne s'annule qu'en $\xi = 0$.
le symbole principal ou partie homogène.

$$\iff |P(\xi)| \geq C |\xi|^m \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n = T^*_x \mathbb{R}^n$$

avec $C > 0$ constante.

Donc $$1 + \underbrace{|P(\xi)|^2}_{|\xi|^{2m}} \underbrace{(1+|\xi|^2)^s}_{|\xi|^{2s}} \sim (1 + |\xi|^2)^{s+m}$$

à une constante près.

Comme

$$\|Pu\|^2_{W^s} + \|u\|^2_{W_0} \sim \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + |P(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s\right] |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi)$$

$$\|u\|^2_{W^{s+m}} \sim \int_{\mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^{s+m} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\lambda(\xi)$$

on obtient $\|Pu\|^2_{W^s} + \|u\|^2_{W_0} \sim \|u\|^2_{W^{s+m}}$

à constante près

<u>Conséquence fondamentale</u>

X variété <u>compacte</u>, $P : C^\infty(X,E) \longrightarrow C^\infty(X,F)$ opp. <u>elliptique</u>

Alors :

(i) $\ker P$ est un sous-espace de <u>dimension finie</u> de $C^\infty(X,E)$

ii) $\operatorname{Im} P$ est un sous-espace <u>fermé</u> de <u>codimension finie</u> de $C^\infty(X,F)$ } P est un op. de Fredholm

De plus, s'il est donné des structures hermitiennes sur E, F et un élément de volume dV sur X, on définit l'adjoint formel $P^*: C^\infty(X,F) \to C^\infty(X,E)$

On a : $\boxed{(P^*)_m(x,\xi) = (-1)^m P_m(x,\xi)^* \in \operatorname{Hom}(F_x, E_x)}$ (Exercice!)

Donc, si rang E = rang F, P elliptique $\Leftrightarrow P_m(x,\xi)^*$ bijectif $\forall \xi \neq 0 \Leftrightarrow P^*$ elliptique

Alors, on a :

$$\boxed{C^\infty(X,F) = \operatorname{Im} P \oplus \ker P^*}, \quad \text{avec } \dim \ker P^* < +\infty$$

$\perp$ relatif au produit scalaire L^2 sur $C^\infty(X,F)$ induit par h_F et dV_X.

Application : théorie de Hodge des variétés complexes.

(X,ω) var. réelle compacte riemannienne ~~[illegible]~~ orientée

$(E,h) \to X$ fibré hermitien, avec connexion hermitienne D.

$$\Delta = [D, D^*] = DD^* + D^* D$$

Calcul du symbole principal

$$D \overset{\theta}{\simeq} \underbrace{d}_{\text{ordre } 1} + \underbrace{A\wedge\cdot}_{\substack{\text{ordre } 0 \\ \text{(multiplication)}}} \qquad \text{dans une trivialisation } E_{|U} \overset{\theta}{\simeq} U \times \mathbb{C}^r.$$

Le symbole principal de D = le symbole principal de d

Symbole principal de d :

$$du = \sum_j dx_j \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j} \qquad \text{ordre } 1$$

$$p_1(x,\xi)\,u = \sum_j \xi_j\, dx_j \wedge u = \underbrace{\xi \wedge u}$$

où $\xi = \sum \xi_j\, dx_j$

Symbole d'un adjoint

$$\text{Si } P = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha \Rightarrow P^* = \gamma^{-1} \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\gamma\, a_\alpha^* \,\cdot)$$

(où $dV_\omega(x) = \gamma(x)\,dx$ dans une carte de coordonnées).

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{p_m^*(x,\xi)}_{\text{symbole principal de } P^*} = (-1)^m\, p_m(x,\xi)^*}$$

$$\text{Symbole principal de } d^* \underset{m=1}{=} -(\xi\wedge\cdot)^* = -\Big(\sum_j \xi_j\, dx_j \wedge \cdot\Big)^* = \underbrace{-\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner\,\cdot}$$

Donc, si $\sigma(x,\xi)$ = le symbole principal de $\Delta = dd^* + d^* d$, on a :

$$\sigma(x,\xi)\,u = -\xi \wedge \Big(\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner u\Big) - \Big(\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \lrcorner (\xi \wedge u)$$

$$= -\sum_j \xi_j \cdot \cancel{\xi \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner u\Big)} - \sum_j \xi_j \underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner \xi\Big)}_{\text{"}\xi_j} \wedge u \; +$$

$$+ \sum_j \xi_j \cdot \cancel{\xi \wedge \Big(\frac{\partial}{\partial x_j} \lrcorner u\Big)}$$

$$= -\Big(\sum_j \xi_j^2\Big) u = -|\xi|^2 u$$

Donc, le symbole principal de Δ est

$$\underbrace{\boxed{\sigma(x,\xi)u = -|\xi|^2 u}}_{\text{injectif}} \qquad \forall (x,\xi)$$

<u>Conclusion</u> $\Delta = dd^* + d^* d$ est elliptique.

De même, $\Delta = DD^* + D^* D$ est elliptique (même symbole principal).

$D = D' + D''$

On obtient :

- symbole principal de d'' : $\sigma_{d''}(x,\xi)\,u = \xi'' \wedge u$
- symbole principal de $d''d''^* + d''^* d''$: $\sigma_{\Delta''}(x,\xi)\,u = -|\xi''|^2 u$
$$= -\frac{1}{2}|\xi|^2 u$$
- — " ——— d' : $\sigma_{d'}(x,\xi) = \xi' \wedge u$
- — " ——— $d'd'^* + d'^* d'$: $\sigma_{\Delta'}(x,\xi) = -|\xi'|^2 u$
$$= -\frac{1}{2}|\xi|^2 u$$

<u>Conclusion</u> $\Delta'' = d''d''^* + d''^* d''$ et $\Delta''_E = D''_E D''^*_E + D''^*_E D''_E$
$\Delta' = d'd'^* + d'^* d'$ et $\Delta'_E = D'_E D'^*_E + D'^* D'$ } elliptiques.

Observation

$$\begin{array}{l} {}^{\mathbb{R}}TX \ni \xi = \xi' + \xi'' \\ \cap \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} {}^{\mathbb{R}}TX \end{array} \quad , \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} \xi' = \frac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \\ \xi'' = \frac{1}{2}(\xi + iJ\xi) = \overline{\xi'} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, $\Delta, \Delta', \Delta''$ sont formellement autoadjoints.

Conséquence de Gårding

a) $\forall r$, l'opérateur $\Delta : C^\infty(X, \Lambda^r T^* X \otimes E) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^r T^* X \otimes E)$

définit une décomposition en deux espaces

$$\boxed{C^\infty(X, \Lambda^r T^* X \otimes E) = \ker \Delta \oplus \operatorname{Im} \Delta} \quad \text{et } \dim \ker \Delta < +\infty$$

b) $\forall p, q$, $\Delta'' : C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E) \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E)$

définit une décomposition en deux espaces

$$\boxed{C^\infty(X, \Lambda^{p,q} T^* X \otimes E) = \ker \Delta'' \oplus \operatorname{Im} \Delta''} \quad \text{et } \dim \ker \Delta'' < +\infty$$

De même pour Δ'.

Définition On appelle l'espace des p-formes harmoniques pour la connexion D l'espace

$$\mathcal{H}^r_D(X, E) := \ker\left(\Delta : C^\infty(X, \Lambda^r T^* X \otimes E) \to C^\infty(X, \Lambda^r T^* X \otimes E)\right)$$

Proposition $\mathcal{H}^r_D(X, E) = \ker D \cap \ker D^*$ si X est compacte

(Faux si X n'est pas compacte!)

Preuve "$\supset$" évident. Si $Du = 0$ et $D^* u = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$
(même si X n'est pas compacte)

"$\subset$" $\langle\langle \Delta u, u \rangle\rangle = \|Du\|^2 + \|D^* u\|^2 \quad \forall u$ si X est compacte (sinon, u doit être à support compact

Donc, si $\Delta u = 0 \Rightarrow \begin{cases} D u = 0 \\ D^* u = 0 \end{cases}$

<u>Proposition</u> De même

$$\mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) = \ker D'' \cap \ker D''^* \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{p,q}_{D'}(X,E) = \ker D' \cap \ker D'^*$$

si X est <u>compacte</u>

<u>Théorème</u> Si X est compacte,

$$\dim \mathcal{H}^{r}_{D}(X,E) < +\infty$$

$$\dim \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) < +\infty$$

<u>Preuve</u> : conséquence immédiate de Gårding.

<u>Cas d'une connexion de Chern</u>

$D'' = d'' \Rightarrow D''^2 = 0$

Donc, $\operatorname{im} \underset{(p,q)\to(p,q)}{\Delta''} = \operatorname{im} (D'' D''^* + D''^* D'') \subset \operatorname{im} \underset{(p,q-1)\to(p,q)}{D''} + \operatorname{im} \underset{(p,q+1)\to(p,q)}{D''^*}$

De plus, si X est <u>compacte</u>, on a :

$$\boxed{\operatorname{im} \Delta'' = \operatorname{im} D'' \oplus \operatorname{im} D''^*}$$

<u>Preuve</u> • $\operatorname{im} D'' \perp \operatorname{im} D''^*$ (conséquence de $D''^2 = 0$) $\Rightarrow$ la somme est directe.

$$\langle\langle D'' u, D''^* v \rangle\rangle \underset{X \text{ compacte}}{=} \langle\langle \cancel{D''^2 u}, v \rangle\rangle = 0 \quad \text{car } D''^2 = 0.$$

• Il reste à vérifier que $\operatorname{im} D''$ et $\operatorname{im} D''^* \subset \operatorname{im} \Delta''$

Or $\operatorname{im}\Delta'' = \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E)^{\perp}$

Donc, il suffit de démontrer que $\operatorname{im} D'' \perp \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E)$

et $\operatorname{im} D''^{*} \perp \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E)$

Soit $h \in \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E)$

$$\langle\langle D''u, h\rangle\rangle = \langle\langle u, \underbrace{D''^{*}h}_{=0}\rangle\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle\langle D''^{*}v, h\rangle\rangle = \langle\langle v, \underbrace{D''h}_{=0}\rangle\rangle = 0.$$

<u>Corollaire fondamental</u> (la <u>décomposition en trois espaces</u>) Si X est <u>compacte</u>,

$$C^{\infty}(X, \Lambda^{p,q}T^{*}X \otimes E) = \underbrace{\mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) \oplus \overbrace{\operatorname{im} D''}^{} }_{=\ \ker D''} \overbrace{\oplus \operatorname{im} D''^{*}}^{\ker D''^{*}}$$

(avec $\dim \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) < +\infty$)

$\oplus$: pour le produit scalaire L^2

Ces trois espaces sont <u>fermés</u> dans $C^{\infty}(X, \Lambda^{p,q}T^{*}X \otimes E)$ pour la topologie d'espace de Fréchet (c-à-d la topologie C^{∞})

(Car l'orthogonal de n'importe quel sous-espace est fermé et la topologie de Fréchet est plus forte que la topologie L^2, X étant compacte)

<u>Preuve</u> . $\ker D'' = \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) \oplus \operatorname{im} D''$

"$\supset$" évident (X compacte et $D''^2 = 0$)

"$\subset$" On a : $\ker D'' \perp \operatorname{im} D''^{*}$ car, si $u \in \ker D''$, $\langle\langle u, D''^{*}v\rangle\rangle = \langle\langle \underbrace{D''u}_{=0}, v\rangle\rangle = 0.$

$\Downarrow$

$$\ker D'' \subset (\operatorname{im} D''^{*})^{\perp} = \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) \oplus \operatorname{im} D''$$

Théorème (l'isomorphisme de Hodge)

Les groupes de cohomologie de Dolbeault d'une variété complexe compacte hermitienne X à valeurs dans un fibré hermitien $(E,h) \longrightarrow X$ sont isomorphes aux espaces harmoniques correspondants :

$$H^{p,q}(X,E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E) \qquad \text{isomorphisme de } \mathbb{C}\text{-espaces vectoriels.}$$

~~Démonstration~~ En particulier, $\dim H^{p,q}(X,E) < +\infty$.

Démonstration $H^{p,q}(X,E) \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Ker} D''_{p,q} / \operatorname{Im} D''_{p,q-1} \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E)$

par la décomp. en trois espaces.

Observation 1) L'isomorphisme ci-dessus dépend de la structure hermitienne (ω, h).

(car D''^{*} en dépend $\Rightarrow$ Δ'' en dépend $\Rightarrow$ $\mathcal{H}^{p,q}_{D''}(X,E)$ en dépend) mais $H^{p,q}(X,E)$ n'en dépend pas : invariant topologique !)

2) Tout ce qui précède reste valable si on remplace D'' par n'importe quelle connexion D telle que

$$\boxed{D^2 = 0} \qquad \left(\text{connexion } \underline{\text{intégrable}} \iff \Theta(D) = 0 \text{ courbure nulle}\right)$$

En particulier, pour $d, \partial, \bar\partial$ appliqués aux formes scalaires de X.

3) On ne suppose pas ω kählérienne (hermitienne suffit).

Théorie de Hodge des variétés kählériennes compactes

But : comparer la cohomologie de de Rham

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C})$$

à la cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}_{\bar\partial}(X, \mathbb{C})$.

$$\Lambda^k T^*X = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^*X$$ décomposition au niveau des formes

A-t-on une décomposition similaire au niveau de la cohomologie ?

Nombres de Betti $b_k := \dim_{\mathbb{C}} H^k_{DR}(X, \mathbb{C})$, $k = 1, \dots, 2n$; $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

Nombres de Hodge $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_{\bar\partial}(X, \mathbb{C})$; $0 \le p, q \le n$

On suppose dorénavant (X, ω) kählérienne compacte. Alors :

$$\Delta' = \Delta'' = \frac{1}{2}\Delta$$ sur les formes scalaires. ($E = X \times \mathbb{C}$ est le fibré trivial)

Rappel En général, dans un fibré $E \longrightarrow (X, \omega)$ kähl. on a :

$$\begin{cases} \Delta = \Delta' + \Delta'' \\ \Delta'' = \Delta' + [\underbrace{i\Theta(E)}_{\substack{\text{"}\\ 0}}, \Lambda] \end{cases}$$

si $E = X \times \mathbb{C}$ est trivial avec métrique triviale.

Corollaire : Si X est kähl compacte,

$$\mathcal{H}^k_d(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{d''}(X, \mathbb{C})$$

Preuve "$\supset$" évident. $\Delta'' u = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$ car $\Delta = 2\Delta''$

"$\subset$" $h^{(k)} = \sum_{p+q=k} h^{(p,q)} \Rightarrow 0 = \Delta h^{(k)} = \sum_{p+q=k} \Delta h^{(p,q)} = 2 \sum_{p+q=k} \overbrace{\Delta'' h^{(p,q)}}^{(p,q)}$

$\Rightarrow \Delta'' h^{(p,q)} = 0 \quad \forall p, q.$

~~Théorème Corollaire Si X est kählérien compacte,~~

<u>Théorème</u> Si X est kählérienne compacte, il existe un isomorphisme <u>canonique</u> (indép. de la métrique kählérienne choisie) :

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \qquad \text{(la décomposition de Hodge)}$$

$$\{h^{(k)}\} \longmapsto \bigoplus_{p+q=k} \{h^{(p,q)}\}$$

et $H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \simeq H^{q,p}(X, \mathbb{C}) \quad \forall p, q.$ (Symétrie de Hodge).

En particulier, $\boxed{b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}}$ $\forall k = 0, 1, \dots, 2n.$

<u>Preuve</u>

$$\begin{array}{ccc} H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) & \simeq & \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \\ \text{isom de Hodge.} \downarrow \wr \text{ dépend de } \omega & & \text{dépend de } \omega \downarrow \wr \text{ isomorphisme de Hodge. pour chaque } p,q. \\ \mathcal{H}^k_{d}(X, \mathbb{C}) & = & \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}_{d''}(X, \mathbb{C}) \end{array}$$

<u>Symétrie</u> On a $\mathcal{H}^{p,q}_{d''}(X, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{q,p}_{d''}(X, \mathbb{C})$

$$\underset{(p,q)}{h} \longmapsto \underset{(q,p)}{\bar{h}}.$$

$\Delta'' h = 0 \Rightarrow \Delta' \bar{h} = 0. \Rightarrow \Delta'' \bar{h} = 0$ car $\Delta'' = \Delta'$

<u>Attention</u> : Si X n'est pas kählérienne, on sait pas comparer Δ' et Δ''.

il reste le calcul canonique de l'isomorphisme.

Cohomologie de Bott-Chern

Définition X variété complexe.

$$H^{p,q}_{Bc}(X, \mathbb{C}) := \{(p,q)\text{-formes } C^\infty\ u \text{ tq. } du = 0\} \Big/ d'd''\{(p-1, q-1)\text{-formes } C^\infty\}.$$

Observation Si u est de type (p,q), alors

$$du = 0 \iff \begin{cases} d'u = 0 \\ d''u = 0 \end{cases}$$

Faux si u n'est pas de type pur.

$$\text{Si } u = d'd''v \implies \begin{cases} d'u = 0 \\ d''u = 0 \end{cases} \implies du = 0.$$

Observation $\exists$ applications $\mathbb{C}$-linéaires canoniques (en général, ni inj, ni surj)

$$H^{p,q}_{Bc}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

Dolbeault

$$H^{p,q}_{Bc}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{p+q}_{DR}(X, \mathbb{C})$$

De Rham

Preuve $\underset{(p,q)}{u} = d'd''v \implies u = d(d''v)$. Donc $\{u\}_{Bc} = 0 \implies \{u\}_{DR} = 0$.

$\implies u = d''(-d'v) \implies \{u\}_{d''} = 0$

Définition X var complexe.

On dit que le lemme du $\partial\bar\partial$ a lieu sur X si

$$\forall u \quad (p,q)\text{-forme sur } X \ , \quad du = 0$$
(type pur)

il y a équivalence entre toutes les notions d'exactitude sur u :

(a) u est d-exacte

(b) u est d'-exacte.

(c) u est d''-exacte

(d) u est d' d''-exacte.

Observation Sur une variété quelconque, le lemme du $\partial\bar\partial$ peut ne pas avoir lieu.

Théorème Supposons que le lemme du $\partial\bar\partial$ a lieu sur X. Alors, il y a des isomorphismes :

i) $H^{p,q}_{BC}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \qquad \forall p,q.$ (même si X n'est pas compacte !)

Si X est compacte, alors :

ii) $\bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{BC}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H^{k}_{DR}(X, \mathbb{C}) \qquad \forall p,q \ , \ k = p+q$

Démonstration

i) • injectivité

Soit $\underset{(p,q)}{u}$ t.q. $du = 0$. Si $u \in \operatorname{Im} \bar\partial \overset{\text{Lemme du } \partial\bar\partial}{\Longrightarrow} u \in \operatorname{Im} \partial\bar\partial$

• surjectivité

Soit $\underset{(p,q)}{u}$ t.q. $\bar\partial u = 0$

<u>Lemme</u> lemme du $\partial\bar\partial$ $\Rightarrow \exists v$ dans la classe de Dolbeault de u tq. $dv = 0$.

<u>preuve</u> On veut $v = u + \bar\partial w$ tq. $dv = 0$

$$\Updownarrow$$

$$d(u + \bar\partial w) = 0 \iff \partial u + \partial\bar\partial w = 0.$$

$$\iff \partial\bar\partial w = -\partial u.$$

Donc, étant donné u t.q. $\bar\partial u = 0$, on veut

$$\exists w \quad tq. \quad \partial\bar\partial w = -\partial u.$$

$-\partial u$ $(p+1, q)$ et $d(-\partial u) = 0$. car $\begin{cases} \partial(-\partial u) = -\partial^2 u = 0. \\ \bar\partial(-\partial u) = \partial(\underbrace{\bar\partial u}_{0}) = 0. \end{cases}$

Lemme du $\partial\bar\partial$ appliqué à $-\partial u$; $-\partial u \in \operatorname{im} \partial \Rightarrow -\partial u \in \operatorname{im} \partial\bar\partial$

Il est clair que

$$\{v\}_{BC} \longmapsto [v]_{\bar\partial} = [u]_{\bar\partial}$$

ii) • $H^{p,q}_{BC}(X, \mathbb{C}) \xhookrightarrow[\text{(lemme du } \partial\bar\partial\text{-bar)}]{\text{injective}} H^{h}_{DR}(X, \mathbb{C})$ $\forall p, q$ tq. $p+q = h$.

Donc $\displaystyle\bigoplus_{p+q=h} H^{p,q}_{BC}(X, \mathbb{C}) \xhookrightarrow{\text{injective}} H^{h}_{DR}(X, \mathbb{C})$

Par (i), on en déduit : $\displaystyle\sum_{p+q=h} h^{p,q} \leq b_h$.

Par ailleurs, la suite spectrale montre que

$$\sum_{p+q=h} h^{p,q} \geq b_h.$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{p+q=h} h^{p,q} = b_h.$

$\Downarrow$ injectivité (les dim. sont finies si X est compacte)

isomorphisme.

Conséquence Si X est compacte et si le Lemme du $\partial\bar{\partial}$ a lieu sur X, alors

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \qquad \forall k \qquad \text{isomorphisme canonique}$$

Dolbeault.

~~On n'a tout de même pas nécessairement symétrie de Hodge~~

Théorème Si X est kählérienne compacte, alors le Lemme du $\partial\bar{\partial}$ a lieu sur X.

En particulier, ~~l'isomorphisme~~ la décomposition de Hodge

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$$

est canonique

Démonstration