Probabilités (Traitement numérique des données), S3

Enoncés des exercices

Université Paul Sabatier - Toulouse 3
IUT de Toulouse 3 A
Département GEA PONSAN

Clement Rau
clement.rau@iut-tlse3.fr

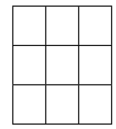
1 Dénombrements

Exercice 1

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 2

On peut choisir de mettre une croix ou un rond dans chacune des cases du tableau suivant (jeu du morpion). Combien y a t il de configurations possibles ?



Exercice 3

Une urne contient dix boules sur lesquelles ont été marquées les dix lettres de l'alphabet de A à J. On tire successivement quatre boules **sans remise** et l'on inscrit dans l'ordre les lettres portées par les boules tirées.

1. Combien de mots de quatre lettres (ayant un sens ou non) peut-on former ?
2. combien d'**ensembles** de quatres lettres peut on former avec ce procédé ?
3. On tire maintenant successivement les quatre boules **avec remise** aprés chaque tirage. Combien de mots de quatre lettres (ayant un sens ou non) peut-on former ?

Exercice 4

Combien de nombres de 4 chiffres puis-je écrire en utilisant uniquement les chiffres 3,6,7 ?

Exercice 5

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

Exercice 6

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 7

Le groupe des élèves d'une classe doit s'inscrire à un concours par Minitel. Il faut établir une liste de passage. Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste sachant qu' il y a 24 élèves dans la classe ?

Exercice 8

Considérons un jeu de 32 cartes.

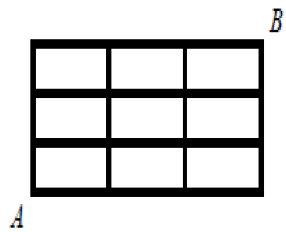
1. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes ?
2. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant exactement 2 coeurs ?

3. Combien y a-t-il de mains de cinq cartes contenant au moins un roi ?

Exercice 9

Combien de mots de 6 lettres peut on écrire en utilisant les 3 lettres D et les 3 lettres H ?

Application : Combien y a t il de chemins qui vont de A à B en utilisant le quadrillage et n'en utilisant uniquement les directions "vers le haut" et "vers la droite" ?



Exercice 10

1. Expliquer de manière ensembliste les égalités suivantes :

$$(i)\ C_n^k = C_n^{n-k} \quad (ii)\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k.$$

2. Calculer

$$A = \sum_{k=0\ldots n} C_n^k, \quad B = \sum_{k=0\ldots n} (-1)^k C_n^k.$$

Exercice 11

Quelle est le coefficient de a^2b^5 dans $(a+b)^7$?

Exercice 12

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes

Exercice 13

Soit E un ensemble à n éléments. Retrouver la formule de la somme de la suite arithmétique $1+2+3+\ldots+n-1$ à partir de $\binom{n}{2}$.

Exercice 14

On dispose d'une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On tire une à une toutes les boules de l'urne et on note $\omega = (c_1, c_2, \ldots, c_{a+b})$ l'issue correspondante à la liste des couleurs dans leur ordre de sortie. Par ex, l'issue $\omega = (B, B, N\ldots)$ correspond au tirage : blanc, blanc, noir,...etc.

1. Combien y a t'il d'issues possibles ? On note Ω l'ensemble des issues possibles.
2. Soit $1 \leq k \leq a+b$, notons B_k l'ensemble des issues où la k ième boule tirée est blanche. Donner la valeur de $card(B_k)$, puis de $\frac{card(B_k)}{card(\Omega)}$. Interpréter ce quotient.
3. Vous êtes dans une file d'attente où l'on distribue une enveloppe au hasard. Il y a b enveloppes contenant 10 euros et a enveloppes vides. Où vaut il mieux se positionner dans la file d'attente ?

Exercice 15

Cette année-là, il y avait 5 lundis, 5 mardis et 5 mercredis en janvier. Quel jour était le 1^{er} février ?

2 Probabilités élémentaires

Exercice 1

Soient A, B et C trois événements. Exprimer en fonction de A, B et C les événements correspondant aux propriétés suivantes :

1. A seul se produit.
2. au moins l'un d'entre eux se produit.
3. les trois se produisent.
4. au plus deux d'entre eux se produisent.
5. l'un d'entre eux exactement se produit.
6. au plus l'un d'entre eux se produit.
7. au moins deux d'entre eux se produisent.

Exercice 2

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants :

A : "La carte tirée est un roi",
B : "La carte tirée est un trèfle"
C : "La carte tirée est une carte noire"

1. Définir par une phrase les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $B \cup C$ et $A \cup B \cup C$.
2. Calculer les probabilités de A, B, C et des événements ci-dessus.

Exercice 3

On considère les élèves d'une classe. Trois langues leur sont proposées comme option, le russe, l'italien et l'espagnol. Les élèves peuvent n'en choisir aucune, en choisir une, deux ou les trois. On note C l'ensemble des élèves composant cette classe, R l'ensemble des élèves choisissant le Russe, I l'ensemble des élèves choisissant l'italien et E ceux pratiquant l'espagnol.

1. Traduire en français les ensembles suivants $R \cap E$, $R \cup I$, $\overline{I}$, $\overline{I \cap E}$.
2. Traduire en utilisant le formalisme ensembliste
   - Les élèves qui font russe et espagnol.
   - Les élèves qui ne parlent aucune des trois langues.
   - Les élèves qui parlent au moins une des trois langues.

Exercice 4

On lance un dé équilibré à six faces. Calculer les probabilités d'obtenir un nombre pair, un multiple de 3, un nombre strictement supérieur à 3 puis celle d'obtenir un nombre à la fois pair et supérieur à 3.

Exercice 5

On considère les événements aléatoires suivants :

A : "Ce jeudi, il y aura du vent" et B : "Ce jeudi, il y aura de la pluie".

Météo-France a annoncé les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}[B] = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \frac{2}{5}.$$

1. A et B sont-ils indépendants ? Sont-ils incompatibles (incompatible signifie disjoint) ?
2. Expliciter les événements suivants à l'aide des opérations ensemblistes :
   - C : "Ce jeudi, il y aura de la pluie ou du vent".
   - D : "Ce jeudi, il y aura de la pluie et du vent".
   - E : "Ce jeudi, il n'y aura ni pluie, ni vent".
   - F : "Ce jeudi, il y aura de la pluie mais pas de vent".
   - G : "Ce jeudi, il y aura ou de la pluie, ou du vent", mais pas les deux".
3. Calculer les probabilités des événements précédents en menant vos calculs sous forme fractionnaire.

Exercice 6

Trois étudiants A, B et C passent un examen le même jour. Les trois examens sont différents et se passent dans des lieux différents. Les probabilités de succès sont estimées à 0,7 pour A, 0,4 pour B et 0,6 pour C.
Calculer la probabilité

1. que les 3 soient reçus,
2. que les trois échouent,
3. que A seulement soit reçu,
4. qu'un seul réussise,
5. que B soit le seul à échouer,
6. qu'exactement deux soient reçus,
7. qu'au moins un soit reçu.

Exercice 7

Une urne contient quatre boules numérotées 10, 20, 30 et 40. On effectue trois tirages successifs avec remise, c'est-à-dire qu'après chaque tirage on replace la boule tirée dans l'urne. Le résultat d'une expérience peut alors être représenté par un triplet, une liste ordonnée de trois éléments de l'ensemble $E = \{10, 20, 30, 40\}$.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir les cas suivants :
   (a) La première boule tirée porte le numéro 10, la deuxième le numéro 40, la troisième le numéro 20 ?
   (b) La première boule tirée porte le numéro 30 et la deuxième le numéro 20 ?
   (c) La deuxième boule porte le numéro 20 ?

Exercice 8

Soit un stock de 10 pièces mécaniques d'aspect identique parmi lesquelles 3 sont défectueuses.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuses ?
2. On prend successivement 3 pièces au hasard, avec remise après chaque prélévement.
   Quelle est la probabilité pour que les 3 pièces soient défectueuses ?
3. On prend successivement 3 pièces au hasard, sans remise.
   Quelle est la probabilité pour que les 3 pièces soient défectueuses ?

Exercice 9

Soient A et B deux événements d'un ensemble Ω. On dispose du tableau de probabilité ci-dessous.

	A	$\bar{A}$	Total
B			0,35
$\bar{B}$	0,26		
Total		0,6	1

1. Interpreter les nombres $0,26$ et $0,35$ du tableau.
2. Reproduire et compléter le tableau.
3. Les évènements A et B sont ils indépendants ?
4. Les évènements A et $\bar{B}$ sont ils indépendants ?

Exercice 10 *Paradoxe des anniversaires*

Dans un groupe de n personnes, on souhaite calculer la probabilité notée p_n, qu'au moins deux d'entre elles fêtent leur anniveraire le même jour. On suppose qu'une année compte 365 jours et que les dates de naissance sont équiprobables.

1. Supposons pour commencer que le groupe soit constitué de $n = 2$ personnes, calculer p_2.
2. Supposons maintenant que le groupe soit constitué de $n = 3$ personnes, et imaginons une urne de 365 boules numérotées de 1 à 365. On pioche 3 boules avec remise.
   (a) Combien y a t'il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a t'il de tirages avec 3 boules toutes différentes ?
   (c) En déduire p_3, la probabilité qu'au moins 2 personnes du groupe soient nées un même jour de l'année.
3. Reprendre le raisonnement précédent pour calculer p_4, puis donner une formule pour p_n.
4. Selon votre intuition, dans un groupe de $n = 23$ personnes, y a t'il "beaucoup" de chance d'avoir 2 personnes nées le même jour ? Calculer p_{23}.

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 1

Dans une entreprise, on a la répartition suivante :

	Technicien	Cadre	Rh
Femmes	2	4	10
Hommes	20	5	1

On pioche un employé au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il soit Rh.
2. Calculer la probabilité qu'il soit Rh, sachant que l'individu est une femme.
3. Calculer la probabilité que l'individu soit une femme, sachant qu'il est Rh.

Exercice 2

Une entreprise de mode possède trois magasins A,B,C qui recoivent respectivement 20, 30 et 50 % de la production. La probabilité qu'un produit invendu (événement I) ait été retourné par A,B ou C est :

$$\mathbb{P}[I|A] = 0,05,\ \mathbb{P}[I|B] = 0,04,\ \mathbb{P}[I|C] = 0,01$$

1. Déduire de l'énoncé, les probabilités $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[C]$ qu'un article soit respectivement distribué par A,B ou C.
2. A l'aide de l'expression de la formule des probabilités totales pour la partition $\{A, B, C\}$, déduire la probabilité qu'un produit soit invendu.
3. Rappeller la formule de Bayes pour les événements A et I, puis $\overline{I}$ et C.
4. En déduire la probabilité pour qu'un produit invendu provienne de A.
5. Donner la probabilité pour qu'un produit ait été vendu par C.

Exercice 3

Trois ouvriers produisent la même pièce en même temps. Jacques fabrique 2000 pièces dont 40 défectueuses, Vincent 1800 pièces dont 90 défectueuses et Pierre 2200 pièces dont 88 défectueuses. On choisit une pièce au hasard dans la production totale. Si elle est bonne, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par Vincent ?

Exercice 4

Un test est utilisé pour dépister une maladie. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99 % des cas. Cependant, il se peut que le résultat du test soit positif alors que le patient est en bonne santé, et ceci se produit dans 2 % des cas. Sachant qu'en moyenne un patient sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité qu'un patient soit atteint sachant que le test a été positif ?

Exercice 5

Dans une population donnée, 15 % des individus ont la maladie M_a. Parmi eux, 20% ont une maladie M_b. Parmi les personnes non atteintes par M_a, 4% ont la maladie M_b. On considère un individu. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il a la maladie M_a
2. Il a la maladie M_b sachant qu'il a M_a
3. Il a la maladie M_b sachant qu'il n'a pas M_a
4. Il a la maladie M_a et la maladie M_b
5. Il n'a pas la maladie M_a mais il a la maladie M_b
6. Il a la maladie M_b

7. Il a la maladie M_a sachant qu'il a M_b.

Exercice 6

Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre. S'il pleut, je sors mon chien avec probabilité $1/10$. S'il ne pleut pas, je sors mon chien avec probabilité $9/10$. Sachant que j'ai sorti mon chien, quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

Exercice 7

Une entreprise spécialiste de la course à pied a réalisé des statistiques auprès de marathoniens qui ont permis d'établir les données suivantes :

Temps	Moins de 3h	Entre 3h et 4h	Plus de 4h
Pourcentage de coureurs	2%	48%	50%
Pourcentage de coureurs portant des chaussures de la marque M	15%	28%	22%

1. Au départ d'un marathon, on croise un coureur, quelle est la probabilité qu'il utilise des chaussures de la marque M ?
2. Si le coureur utilise des chaussures de la marque M, quelle est la probabilité qu'il coure en moins de 3 heures le marathon ?

Exercice 8

Un sceau de balles de ping-pong contient 60 balles dont 25 sont blanches et les autres sont jaunes. On prend au hasard une balle dans le sceau et on note B_1 l'évènement "la première balle est blanche". On prend une deuxième balle dans le sceau et on note B_2 l'évènement "la seconde balle est blanche".

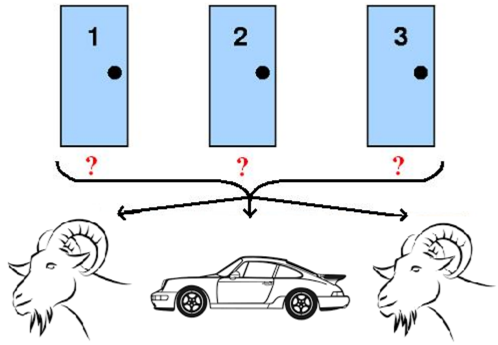
Dans chacune des situations suivantes, dire si les évènements B_1 et B_2 sont indépendants ?

1. **Situation 1 :** on ne remet pas la première balle dans le sceau avant de prendre la seconde.
2. **Situation 2 :** on remet la première balle dans le sceau avant de prendre la seconde.

Exercice 9 *(Jeu de Monty Hall)*

Un joueur doit choisir une porte parmi trois portes fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, et derrière les deux autres se trouve une chèvre. Si son choix final correspond à la bonne porte (la voiture), il remportera la voiture.

Le candidat indique donc son choix. Le présentateur du jeu (qui connait la configuration des portes) ouvre une des deux portes non choisies, derrière laquelle ne se trouve pas la voiture. Il propose alors au candidat de modifier son choix ou bien de le maintenir.



Quelle est la meilleure stratégie ?

On pourra introduire les événements $G = \{le\ joueur\ gagne\ le\ lot\}$ et $C = \{la\ porte\ initialement\ choisie\ est\ la\ bonne\}$

Exercice 10

1. La famille Fillleprems compte deux enfants. L'ainée est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
2. La famille Fifille compte deux enfants, dont (au moins) une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Exercice 11

On estime que la probabilité qu'il y ait une attaque à la bombe dans un centre commercial est 1/3000 000. Pour déjouer les "règles des probabilités", je décide d'aller faire mes courses avec une bombe sur moi (sans la faire exploser !). Comment est changée la probabilité précédente ?

4 Variables aléatoires

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}_X(x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Déterminer et représenter la fonction de répartition de X
3. Calculer les probabilités $\mathbb{P}[X < 4], \mathbb{P}[X > 2], \mathbb{P}[3 < X \leq 4.5], \mathbb{P}[2 \leq X < 4], \mathbb{P}[2 < X < 4]$.
4. Soit $Y = 3X - 5$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 2

On joue avec deux dés à quatre faces. Sur le premier dé, les faces portent les numéros 1, 2, 3 et 3. Sur le deuxième dé, les faces portent les numéros 1, 2, 2 et 2. Deux règles du jeu sont possibles :

1. La partie coûte 1 euro. On lance les deux dés.
   (a) Si la somme est 2, on gagne 6 euros,
   (b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 2 euros,
   (c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.
2. La partie coûte 10 euros. On lance les deux dés.

(a) Si la somme est 2, on gagne 60 euros,

(b) Si la somme est 3 ou 4, on gagne 12 euros,

(c) Si la somme est 5, on ne gagne rien.

En étudiant l'espérance et l'écart-type de chacun de ces jeux, trouver lequel est le plus intéressant.

Exercice 3

Une loterie comporte 20 billets dont 2 gagnants, l'un pour un lot de 100 euros et l'autre pour un lot de 60 euros. On a acheté 3 billets.

1. Calculer les probabilités suivantes en supposant tous les tirages équiprobables :
   A : " gagner les 2 lots "
   B : " gagner le lot de 100 euros seulement "
   C : " gagner le lot de 60 euros seulement "
   D : " ne rien gagner "
2. Déterminer la loi de probabilités de la variable aléatoire X qui à tout ensemble de trois billets associe la somme gagnée.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$
4. Le prix de vente du billet étant fixé à $\mathbb{E}(X)/3$, vérifier que la vente des 20 billets permet d'obtenir la somme mise en jeu.

Exercice 4

Trois urnes U_1, U_2, U_3 contiennent chacune 10 boules supposées indiscernables numérotées de 1 à 10. On tire une boule dans chacune des urnes et on suppose les tirages indépendants.

1. Quelle hypothèse peut-on faire sur les tirages grâce à l'indiscernabilité ? Donner alors la probabilité d'obtenir un 2 à chaque tirage.
2. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de 5 obtenus lors de cette épreuve de 3 tirages.
   (a) Exprimer les événements élémentaires de X en fonction des événements A_i : "Le tirage dans l'urne U_i donne un 5" $(i = 1, 2, 3)$.
   (b) Donner la loi de X.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X (en présentant vos calculs sous forme fractionnelle).
   (d) Donner la fonction de répartition de X et la courbe cumulative associée.
   (e) Indiquez comment retrouver $\mathbb{P}[X \leq 2], \mathbb{P}[X = 2]$ puis $\mathbb{P}[1 < X \leq 2]$ à l'aide de la fonction de répartition.

Exercice 5

Dans un atelier textile, la température exprimée en Farenheit, ne s'écarte jamais de plus de 2 degrés de 62 degrés. Plus précisément, la température est une variable aléatoire F de distribution :

f	60	61	62	63	64
$\mathbb{P}(F = f)$	0.05	0.25	0.4	0.25	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de F.

2. On a décidé de lire la température sur l'échelle des degrés Celcius qui satisfait $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Quelle est l'espérance et la variance de la température exprimée en degrés Celcius ?

Exercice 6

On jette 2 dès et on note respectivement X_1 et X_2 les variables aléatoires " numéro de la face supérieure " du dès 1 et 2. On pose $Z = max(X_1, X_2)$. Déterminer la loi de $Z, \mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$.

Exercice 7

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules. Pour tout n entier, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été ajoutées dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n. en fonction de n.

2. On suppose ici que $a = b = 1$. Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_2.

On notera R_k l'événement obtenir une boule rouge au k ième tirage.

Exercice 8 *Exemple de 2 variables aléatoires dépendantes*

On lance un dé cubique equilibré. On s'arrête dès que :

- on tombe sur la face 1, ou bien

- dès que l'on obtient quatre fois de suite une face avec un numéro strictement plus grand que 1.

Soit X le nombre de lancés effectués jusqu'à ce que le jeu s'arrête et Y le nombre de fois où l'on a obtenu un nombre différent de 1 sur la partie.

1. Donner la loi de X, puis celle de Y.

2. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

5 Quelques exemples de Binomiales

Exercice 1

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de blanches est p. Les tirages se font avec remise ainsi la proportion de boules blanches ne changent jamais.

1. Soit Y la v.a qui vaut 1, si on tire une boule blanche et 0 sinon. Loi de Y ? $\mathbb{E}(Y)$?

2. Soit X la v.a indiquant le nombre de boules noires tirées sur 5 tirages. Quelles sont l'espérance et la variance de cette variable ?

Exercice 2

Un automobiliste rencontre sur son trajet 5 feux de circulation tricolores. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 15 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 40 secondes. Les 5 feux ne sont pas synchronisés et l'on suppose que les aléas de la circulation sont tels que l'état d'un feu devant lequel se présente l'automobile ne dépend pas de l'état des autres feux rencontrés.

1. L'automobile se présente devant un feu. Quelle est la probabilité que ce feu soit vert ?
2. Quelle est la probabilité que sur son trajet, l'automobile rencontre exactement 3 feux verts sur les 5 feux rencontrés ?
3. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés sur le trajet. Quelle est sa loi de probabilité et son espérance ?

Exercice 3

Pour aller à son lycée à vélo, un élève rencontre 6 feux. L'état de chaque feu est indépendant des autres et la probabilité qu'un feu soit vert est 2/3. Un feu orange ou rouge, fait perdre 1 minute 30 secondes à l'élève. Le lycée est situé à 3km du domicile et l'élève roule à 15km/h entre les feux. Soit X le nombre de feux verts rencontrés sur le trajet et T le temps mis par l'élève pour rejoindre le lycée.

1. Loi de X ?
2. Exprimer T en fonction de X. En déduire $\mathbb{E}(T)$.
3. L'élève part 17 minutes avant le début des cours. Est il raisonnable de penser qu'il arrivera à l'heure ? Quelle est la probabilité pour qu'il arrive en retard en cours ?

Exercice 4

En 2011, un organisme de sondage indique que 65% des entreprises d'un certain département ont dégagé un bénéfice supérieur à 20000 euros. On considère 300 entreprises de ce département.

1. Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'entreprises ayant dégagé un bénéfice supérieur à 20000 euros parmi ces 300 entreprises ?
2. Soit Z la v.a indiquant le nombre d'entreprises (sur les 300 choisies) ayant un bénéfice supérieur à 20000 euros. Donner la valeur littérale de $\mathbb{P}(Z = 195)$. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 5

On joue à pile ou face. Si on obtient pile, on gagne 1 euro. Si on obtient face, on perd 1 euro. On considère une série de 10 lancers.

1. Si la pièce est non truquée (la probabilité d'avoir pile et la probabilité d'avoir face est la même) :
   (a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   (b) Quelle est l'espérance de gain ?
2. Si la pièce est légérement truquée et tombe sur face dans 60% des cas
   (a) Quelle est la probabilité de gagner 10 euros ?
   (b) Quelle est l'espérance de gain ?

Exercice 6

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié (au sens strict) de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez vous ?

(On discutera en fonction de la valeur de p.)

6 La loi Normale

Exercice 1

Sachant que X suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$ calculer à l'aide de la table :

1. $\mathbb{P}(X < 0,82)$; $\mathbb{P}(X < 0,5)$; $\mathbb{P}(X > 1,42)$; $\mathbb{P}(X < -1,32)$; $\mathbb{P}(X > -2,24)$; $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$; $\mathbb{P}(-1,5 < X < 2,35)$
2. Dans chacun des cas, calculer a sachant que X suit une $\mathcal{N}(0;1)$ $\mathbb{P}(X < a) = 0,8238$; $\mathbb{P}(X > a) = 0,0632$; $\mathbb{P}(X < a) = 0,0268$.

Exercice 2

La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(18;2.5)$. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < 17)$; $\mathbb{P}(X > 20)$; $\mathbb{P}(16 < X < 19.5)$.

Exercice 3

X suit une loi $\mathcal{N}(68;15)$. Déterminer a tel que $\mathbb{P}(X < a) = 0,8315$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathcal{N}(-1.7;0.65)$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X < 0)$? Pour quelle valeur de λ a t-on $\mathbb{P}(|X + 1.7| < \lambda) = 0.75$?

Exercice 5

Déterminer les paramètres (espérance et écart type) d'une loi normale dont une variable aléatoire X qui suit cette loi, vérifie $\mathbb{P}(X < 12) = 0,9772$ et $\mathbb{P}(X < 5) = 0,0668$.

Exercice 6

Dans une population masculine, la taille X suit une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(172\ cm;3\ cm)$. Dans une population féminine comparable, la taille Y suit également un loi normale $\mathcal{N}(166\ cm;6\ cm)$.

1. Y a t il plus d'hommes ou de femmes qui mesurent plus de 184 cm ?
2. Quelle est la probabilité qu'une femme mesure plus de 184 cm, sachant qu'elle mesure plus de 180 cm ?

Exercice 7

Une usine fabrique des billes de diamètre théorique 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui est une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(0\ mm;0.015\ mm)$. Lors du contrôle de fabrication on met au rebut les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7,98 mm ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8,02 mm. Quelle est la proportion des billes qui seront rejetées ?

Exercice 8

On tire 400 fois à pile ou face avec une pièce de monnaie non biaisée. Soit X le nombre de pile.

1. Indiquer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et Var(X).
3. On souhaite approximer la loi de X par une loi normale. Est ce légitime ? Quels paramètres doit on choisir pour déterminer cette loi normale ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X > 220)$ et $\mathbb{P}(180 < X < 220)$.
5. Déterminer un intervalle $[a; b]$ centrée en $\mathbb{E}(X)$ tel que $\mathbb{P}(a < X < b) = 0.98$. Calculer $\mathbb{P}(X = 220)$ et $\mathbb{P}(X = 190)$

Exercice 9

Soit $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$ et soit $Y = -X$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 10

Sachant que la répartition des quotients intellectuels (QI), rapport entre l'âge mental et l'âge réel, d'une personne est une loi normale $\mathcal{N}(0,90; 0,40)$.

1. Calculer la probabilité à 0,0001 près, qu'une personne prise au hasard
   (a) ait un QI inférieur à 1
   (b) ait un QI inférieur à 0,1
   (c) ait un QI supérieur à 1,4
   (d) ait un QI compris entre 0,8 et 1,3
2. En déduire le nombre de personnes dans un village de 1000 habitants
   (a) ayant un QI inférieur à 1
   (b) ayant un QI inférieur à 0,1
   (c) ayant un QI supérieur à 1,4
   (d) ayant un QI compris entre 0,8 et 1,3

Exercice 11

On estime que le temps nécessaire à un étudiant pour terminer une épreuve d'examen est une variable normale $\mathcal{N}(90; 45)$. 240 candidats se présentent à cet examen

1. Combien d'étudiants termineront l'épreuve en moins de deux heures ?
2. Quelle devrait être la durée de l'épreuve si l'on souhaite que 200 étudiants puissent terminer l'épreuve ?

Exercice 12

L'éclairage d'une commune est assuré par 2000 lampes dont la durée de vie moyenne est 1000 heures. Les tests réalisés pour obtenir cette "espérance de vie" ont montré que la durée de vie des lampes suivait une loi normale d'écart-type estimé à 200 heures. Les services d'entretien de la commune ont besoin pour leur gestion de connaître

1. Le nombre de lampes hors d'usage au bout de 700 heures.
2. Le nombre de lampes à remplacer entre la 900 ième et la 1300 ième heure.
3. Le nombre d'heures qui se seront écoulées pour que 10 % des lampes soient hors d'usage ?

7 Une première approche des IC

Exercice 1

Soit X la variable aléatoire correspondant au volume d'un flacon de parfum. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(80\ ml; 0.5\ ml)$. Proposer un IC au seuil de confiance $0,95$ puis au seuil de $0,9$.

Exercice 2

Soit Y distribuée suivant une loi Normale. Si on augmente le seuil de confiance, l'amplitude d'un IC (centrée en la moyenne) augmente aussi. Vrai ou Faux ?

Exercice 3

Soit Z une v.a dont la loi est donnée par :

x	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	0.1	0.3	0.4	0.1	0.05	0.05

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
2. Proposer un IC de votre choix au seuil de confiance $0,5$.
3. Proposer un IC au seuil de confiance 0,7 centré en $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 4

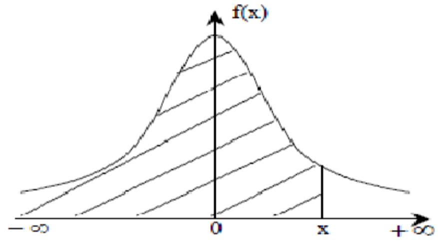
On suppose que le temps de retard T (en min) d'un employé est distribué suivant la loi uniforme discrète sur $[|0; 20|]$. Proposer un IC centré en $\mathbb{E}(T)$ au seuil de confiance de 0,6.

8 Annexe

8.1 Tables Loi Normale $\mathcal{N}\left((;0);1\right)$

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5032	0,5071	0,5910	0,5940	0,5907	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9502	0,9591	0,9599	0,9600	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9960	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9966	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

Figure 1 – Table de la fonction de répartition

Fonction inverse de la répartition de la Normale centrée réduite.

P	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01	+
0	∞	3.09	2.878	2.748	2.652	2.576	2.512	2.457	2.409	2.366	2.326	0.99
0.01	2.326	2.29	2.257	2.226	2.197	2.17	2.144	2.12	2.097	2.075	2.054	0.98
0.02	2.054	2.034	2.014	1.995	1.977	1.96	1.943	1.927	1.911	1.896	1.881	0.97
0.03	1.881	1.866	1.852	1.838	1.825	1.812	1.799	1.787	1.774	1.762	1.751	0.96
0.04	1.751	1.739	1.728	1.717	1.706	1.695	1.685	1.675	1.665	1.655	1.645	0.95
0.05	1.645	1.635	1.626	1.616	1.607	1.598	1.589	1.58	1.572	1.563	1.555	0.94
0.06	1.555	1.546	1.538	1.53	1.522	1.514	1.506	1.499	1.491	1.483	1.476	0.93
0.07	1.476	1.468	1.461	1.454	1.447	1.44	1.433	1.426	1.419	1.412	1.405	0.92
0.08	1.405	1.398	1.392	1.385	1.379	1.372	1.366	1.359	1.353	1.347	1.341	0.91
0.09	1.341	1.335	1.329	1.323	1.317	1.311	1.305	1.299	1.293	1.287	1.282	0.9
0.1	1.282	1.276	1.27	1.265	1.259	1.254	1.248	1.243	1.237	1.232	1.227	0.89
0.11	1.227	1.221	1.216	1.211	1.206	1.2	1.195	1.19	1.185	1.18	1.175	0.88
0.12	1.175	1.17	1.165	1.16	1.155	1.15	1.146	1.141	1.136	1.131	1.126	0.87
0.13	1.126	1.122	1.117	1.112	1.108	1.103	1.098	1.094	1.089	1.085	1.08	0.86
0.14	1.08	1.076	1.071	1.067	1.063	1.058	1.054	1.049	1.045	1.041	1.036	0.85
0.15	1.036	1.032	1.028	1.024	1.019	1.015	1.011	1.007	1.003	0.999	0.994	0.84
0.16	0.994	0.99	0.986	0.982	0.978	0.974	0.97	0.966	0.962	0.958	0.954	0.83
0.17	0.954	0.95	0.946	0.942	0.938	0.935	0.931	0.927	0.923	0.919	0.915	0.82
0.18	0.915	0.912	0.908	0.904	0.9	0.896	0.893	0.889	0.885	0.882	0.878	0.81
0.19	0.878	0.874	0.871	0.867	0.863	0.86	0.856	0.852	0.849	0.845	0.842	0.8
0.2	0.842	0.838	0.834	0.831	0.827	0.824	0.82	0.817	0.813	0.81	0.806	0.79
0.21	0.806	0.803	0.8	0.796	0.793	0.789	0.786	0.782	0.779	0.776	0.772	0.78
0.22	0.772	0.769	0.765	0.762	0.759	0.755	0.752	0.749	0.745	0.742	0.739	0.77
0.23	0.739	0.736	0.732	0.729	0.726	0.722	0.719	0.716	0.713	0.71	0.706	0.76
0.24	0.706	0.703	0.7	0.697	0.693	0.69	0.687	0.684	0.681	0.678	0.674	0.75
0.25	0.674	0.671	0.668	0.665	0.662	0.659	0.656	0.653	0.65	0.646	0.643	0.74
0.26	0.643	0.64	0.637	0.634	0.631	0.628	0.625	0.622	0.619	0.616	0.613	0.73
0.27	0.613	0.61	0.607	0.604	0.601	0.598	0.595	0.592	0.589	0.586	0.583	0.72
0.28	0.583	0.58	0.577	0.574	0.571	0.568	0.565	0.562	0.559	0.556	0.553	0.71
0.29	0.553	0.55	0.548	0.545	0.542	0.539	0.536	0.533	0.53	0.527	0.524	0.7
0.3	0.524	0.522	0.519	0.516	0.513	0.51	0.507	0.504	0.502	0.499	0.496	0.69
0.31	0.496	0.493	0.49	0.487	0.485	0.482	0.479	0.476	0.473	0.47	0.468	0.68
0.32	0.468	0.465	0.462	0.459	0.457	0.454	0.451	0.448	0.445	0.443	0.44	0.67
0.33	0.44	0.437	0.434	0.432	0.429	0.426	0.423	0.421	0.418	0.415	0.412	0.66
0.34	0.412	0.41	0.407	0.404	0.402	0.399	0.396	0.393	0.391	0.388	0.385	0.65
0.35	0.385	0.383	0.38	0.377	0.375	0.372	0.369	0.366	0.364	0.361	0.358	0.64
0.36	0.358	0.356	0.353	0.35	0.348	0.345	0.342	0.34	0.337	0.335	0.332	0.63
0.37	0.332	0.329	0.327	0.324	0.321	0.319	0.316	0.313	0.311	0.308	0.305	0.62
0.38	0.305	0.303	0.3	0.298	0.295	0.292	0.29	0.287	0.285	0.282	0.279	0.61
0.39	0.279	0.277	0.274	0.272	0.269	0.266	0.264	0.261	0.259	0.256	0.253	0.6
0.4	0.253	0.251	0.248	0.246	0.243	0.24	0.238	0.235	0.233	0.23	0.228	0.59
0.41	0.228	0.225	0.222	0.22	0.217	0.215	0.212	0.21	0.207	0.204	0.202	0.58
0.42	0.202	0.199	0.197	0.194	0.192	0.189	0.187	0.184	0.181	0.179	0.176	0.57
0.43	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161	0.159	0.156	0.154	0.151	0.56
0.44	0.151	0.148	0.146	0.143	0.141	0.138	0.136	0.133	0.131	0.128	0.126	0.55
0.45	0.126	0.123	0.121	0.118	0.116	0.113	0.111	0.108	0.105	0.103	0.1	0.54
0.46	0.1	0.098	0.095	0.093	0.09	0.088	0.085	0.083	0.08	0.078	0.075	0.53
0.47	0.075	0.073	0.07	0.068	0.065	0.063	0.06	0.058	0.055	0.053	0.05	0.52
0.48	0.05	0.048	0.045	0.043	0.04	0.038	0.035	0.033	0.03	0.028	0.025	0.51
0.49	0.025	0.023	0.02	0.018	0.015	0.013	0.01	0.008	0.005	0.003	0	0.5
-	0.01	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0	P

Pour un $P \in [0;1]$, la table renvoie le t tel que $\mathbb{P}(X \leq t) = P$.

– Lorsque $P \leq 0.5$, il faut utiliser la colonne de gauche et la ligne supérieure. (Les fractiles sont négatifs).

– Lorsque $P \geq 0.5$, il faut utiliser la colonne de droite et la ligne inférieure. (Les fractiles sont positifs.)