

## TD n°3. Autour des matrices...

\*\*\*\*\*

### 1 Calcul matriciel

**Exercice 1** Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 9 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } D_{x,y} = \begin{pmatrix} x-y & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2y-x \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices suivantes :  $B + C$ ,  $2C - B$ ,  $AB$ .
2. Peut on effectuer  $BA$ ?  $CA$ ? Expliquer.
3. Peut on trouver  $x$  et  $y$  tel que  $D_{x,y} + C = Id_3$ ?

### 2 Matrices et applications linéaires

**Exercice 2**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application linéaire. Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans une certaine base  $B$ . On suppose que  $\det(A) = 0$

1. Que dire de  $f$ ?
2. L'équation  $f(x) = 0$  peut elle avoir une unique solution? Expliquer.

### 3 Inversion de matrices, pivot de Gauss

**Exercice 3**

1. Ecrire les matrices associées aux systèmes suivants :

$$(A_1) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \quad (A_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \quad (A'_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$(A_3) : \begin{cases} 10x + 4y + 10z = 4200 \\ 2x + y + z = 800 \\ 10x + 6y + 12z = 5000 \end{cases} \quad (A_4) : \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}, \quad (A_5) : \begin{cases} x - y + z = -5 \\ x - 2y - z = -3 \\ x - 3y - 3z = -1 \end{cases},$$

$$(A_6) : \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x - 4y + 2z = 8 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$$

2. Calculer le déterminant de ces matrices.
3. Inverser (lorsque c'est possible) ces matrices par la méthode du pivot de Gauss. Trouver alors les solutions à l'aide de ces matrices "inverses", (vérifier avec les résultats obtenus au TD 1).

### 4 Déterminants et méthode des cofacteurs (cf poly)

**Exercice 4**

1. A l'aide des cofacteurs, calculer l'inverse des matrices associées aux systèmes de l'exercice 3, lorsque cela est possible...Résoudre alors le système dans les cas favorables.
2. Résoudre le système  $(A_1)$  avec la méthode des déterminants.

## 5 Des exemples d'applications...

**Exercice 5** Une entreprise de vêtements fabrique des jupes, des robes et des pantalons. Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75m de tissu, 4 boutons et une fermeture Éclair. Pour la fabrication d'une robe, il faut 1,50m de tissu, 6 boutons et une fermeture Éclair. Enfin, la confection d'un pantalon demande 1,25m de tissu, 2 boutons et une fermeture Éclair.

On appelle respectivement  $x$ ,  $y$  et  $z$  le nombre de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et  $a$ ,  $b$  et  $c$  les quantités de tissus (en m) de boutons et de fermetures Éclair utilisés pour leur réalisation.

On appelle  $M$ ,  $A$  et  $X$  les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 0,75 & 1,5 & 1,25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que  $MX = A$ .  
(b) Déterminer  $A$  pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.
- On considère la matrice :

$$M' = \begin{pmatrix} -1,6 & 0,1 & 1,8 \\ 0,8 & 0,2 & -1,4 \\ 0,8 & -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

- calculer  $MM'$ .
  - Ecrire la matrice  $X$  en fonction de  $M'$  et de  $A$ .
  - En déduire les quantités de jupes, de robes et de pantalons fabriqués quand on a utilisé 735 mètres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.
- L'entreprise a deux fournisseurs dont les prix de ventes des différents produits sont donnés dans le tableau suivant :

	Tissu au mètre	Bouton	Fermeture
Fournisseur 1	45	5	6
Fournisseur 2	48	4,5	5,5

On note les matrices :

$$C = \begin{pmatrix} 45 & 5 & 6 \\ 48 & 4,5 & 5,5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 735 \\ 2400 \\ 620 \end{pmatrix}$$

- Que représente la matrice produit  $CA$  ?
- Calculer  $CA$ .

**Exercice 6** Résoudre les deux problèmes suivants par la méthode de votre choix. (On commencera par poser correctement le problème en termes de système linéaire.)

- Un camp de vacance accueille 30 moniteurs et 204 enfants. On projette d'organiser une course en canots ainsi qu'une régata de voiliers pour célébrer le 10<sup>ème</sup> anniversaire du camp. Un canot doit contenir 4 enfants et 2 moniteurs et un voilier, 30 enfants et 3 moniteurs. Si les organisateurs désirent que tous participent aux célébrations, combien de canots et de voiliers seront nécessaires ?
- Un teinturier propose deux teintes de pourpre pour la période de Pâques. Un sachet de pourpre foncé est créé à partir d'un mélange de 1g de poudre rouge et 2g de poudre bleue. Le pourpre pâle demande de 2g de poudre rouge et 3g de poudre bleue. Le teinturier possède une quantité de 5000g de poudre rouge et 8500g de poudre bleue. Quelle quantité de chacune des teintes devrait être produite si le teinturier espère utiliser toute sa poudre ?

3. Une université doit répartir ses activités entre recherche et enseignement. Elle dispose pour cela de 6000 unités-enseignant et de 400 000 unités-espace pour des classes et des laboratoires de recherche. L'université désire calculer le nombre d'unités-enseignant qui seront affectés à l'enseignement et à la recherche. Pour chaque unité-enseignant assignée à la recherche, 50 unités-espace sont nécessaires et pour chaque unité-enseignant assignée à l'enseignement, 75 unités-espace sont nécessaires. Si l'université désire utiliser tout son personnel ainsi que tout l'espace, combien d'unités-enseignant doit-on assigner à l'enseignement et à la recherche ?

**Exercice 7** Pour fabriquer les trois produits  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ , on doit leur faire subir successivement des opérations sur trois machines,  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . Les temps d'exécution sur chacune des machines sont fournis dans le tableau suivant.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
$P_1$	11mn	12mn	16mn
$P_2$	22mn	12mn	16mn
$P_3$	11mn	24mn	16mn

Par exemple on peut noter que le temps d'exécution de la pièce  $P_1$  sur la machine  $M_2$  est de 12 minutes. On suppose que les machines n'ont pas de temps mort par suite d'une attente d'un produit en opération sur une autre machine. Les heures disponibles de chaque machine pour une activité d'un mois sont :

- 165 heures pour la machine  $M_1$ ,
- 140 heures pour la machine  $M_2$ ,
- 160 heures pour la machine  $M_3$ .

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  si l'on désire utiliser les trois machines à pleine capacité? (Avant de commencer le problème assurez-vous que toutes vos données sont exprimées avec la même unité de mesure).

**Exercice 8** Une association de diététiciens organise un repas pour ses membres, à base de pommes de terre, de maïs et de bœuf haché.

- Une portion de 100g de pommes de terre contient 100 calories et 5g de protéines et coûte 0,4 euros.
- Une portion de 100g de maïs contient 150 calories et 10g de protéines et coûte 0,2 euros.
- Une portion de 100g de bœuf haché contient 300 calories et 25g de protéines et coûte 0,6 euros.

Les organisateurs ont le choix entre

- la formule  $A$  : un repas contenant 800 calories et 50g de protéines,
- la formule  $B$  : un repas contenant 750 calories et 55g de protéines.

1. Dresser un tableau à double entrée rassemblant les apports et les coûts de chaque ingrédient.
2. Déterminer la composition de chaque formule à l'aide de systèmes linéaires.
3. Exprimer le coût de chaque formule en fonction de la quantité de bœuf.
4. Quelle est la formule la moins chère ?

**Exercice 9** Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit. Deux ateliers de confection font des offres par lots :

- L'atelier Idéa : un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 200 euros.
- L'atelier Rénov : un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 150 euros.

On notera  $x$  le nombre de lots Idéa achetés et  $y$  le nombre de lots Rénov achetés.

1. Traduire les contraintes du problème portant sur  $x$  et  $y$  par un système d'inéquations.
2. Exprimer la dépense occasionnée par l'achat de  $x$  lots Idéa et  $y$  lots Rénov.