

TP n°1. Matrices, Densités de probabilité.

Consigne : A la fin de la séance, envoyez moi un mail avec votre fichier excel en pièce jointe, et avec comme sujet "TP1 maths appro/ vos noms".

1 Matrices

Exercice 1

On reprend les systèmes linéaires du TD (exo 4). Après avoir écrit les systèmes sous forme matricielle et à l'aide des fonctions Excel suivantes :

- *DETERMAT(matrice)*,
- *INVERSEMAT(matrice)*,
- *PRODUITMAT(matrice;matrice)*,

résolvez chacun des systèmes. Consulter l'aide pour comprendre comment s'exécutent ces fonctions. Attention à la validation des fonctions "vectorielles" sous Excel! Vous surlignerez en jaune [resp. rouge, vert] les valeurs des déterminants, [resp. les matrices inverses (si elles existent), le(s) solution(s) des systèmes].

Vous pouvez aussi mener sur une feuille (que vous me rendrez) vos calculs pour vérifier vos résultats.

$$(A_1) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \quad (A_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \quad (A'_2) : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$(A_3) : \begin{cases} 10x + 4y + 10z = 4200 \\ 2x + y + z = 800 \\ 10x + 6y + 12z = 5000 \end{cases} \quad (A_4) : \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x - y + z = 6 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}, \quad (A_5) : \begin{cases} x - y + z = -5 \\ x - 2y - z = -3 \\ x - 3y - 3z = -1 \end{cases},$$

$$(A_6) : \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x - 4y + 2z = 8 \\ \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$$

2 Densités disponibles sous Excel

Exercice 2

1. Loi Normale

- (a) Consulter l'aide d'excel pour comprendre comment fonctionne :
" **LOI.NORMALE(nombre;moyenne;ecart-type;cumulative)** ".
- (b) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(3, 5)$, calculer avec excel quelques probabilités associées à X et Y .
(Calculer par ex $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X \leq 2)$, $\mathbb{P}(Y \geq 8)$...) Vérifier vos résultats avec les tables.
- (c) Faire le même travail avec la fonction " **Loi.Normale.Inverse()** " et " **Loi.Normale.Standard.Inverse()** ".
(Trouver par ex a et b tels que $\mathbb{P}(X < a) = 0,975$ et $\mathbb{P}(Y < b) = 0,9$)
- (d) Tracer une approximation de la densité de $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On pourra par exemple découper l'intervalle $[-4; 4]$ en classes régulières C_i et tracer un histogramme des quantités $\mathbb{P}(X \in C_i)$. Faites varier l'amplitude de vos classes.
- (e) Faire de même avec Y .
- (f) Tracer une approximation de la fonction de répartition F_X de X .

2. Loi Exponentielle

- (a) Consulter l'aide d'excel pour comprendre comment fonctionne :
" **LOI.EXPONENTIELLE(nombre;lambd;cumulative)** ". Soit $Z \sim \text{Exp}(5)$, calculer avec excel quelques probabilités associées à Z , par ex $\mathbb{P}(Z < 3)$ et $\mathbb{P}(Z \in [1; 6])$. Vérifier vos résultats avec un calcul intégral.

- (b) Tracer une approximation de la densité de Z , puis de sa fonction de répartition F_Z .

3 Simulation

Exercice 3

On rappelle que excel dispose de la fonction **Alea()** qui renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1, suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. Le but de l'exercice est de montrer (en partie) que l'on peut simuler toute loi, uniquement à partir de la loi uniforme.

1. **Un premier exemple.**

Soit X une v.a suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose $Y = -2 \ln(1 - X)$.

- (a) Rappeler la valeur de $\mathbb{P}(X \leq a)$ suivant les valeurs de a .
 - (b) Expliquer rapidement pourquoi Y est une v.a. Préciser les valeurs que peut prendre Y
 - (c) Calculer alors $\mathbb{P}(Y \leq t)$ en fonction de t .
 - (d) Soit h une densité de Y . A l'aide de la question précédente, que doit vérifier h ? Calculer h .
 - (e) En déduire un moyen sous excel pour simuler une v.a suivant une $\mathcal{Exp}(1/2)$.
2. **Généralisation :** Soit Y une v.a de densité f et soit F_Y sa fonction de répartition. Pour simplifier, on suppose F_Y strictement croissante. On ainsi peut définir sans ambiguïté F_Y^{-1} . On veut simuler la v.a Y à partir de X (qui suit la loi uniforme sur $[0; 1]$).
- (a) Posons $Z = F_Y^{-1}(X)$. Calculer la fonction de répartition F_Z de Z . Conclusion?