Cours 4: Vers les structures, sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module complémentaire de maths, année 2012

1. Notion de sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
   - Définition
   - Exemples, structure géométrique d'un sev de $\mathbb{R}^n$
   - Sev associés à une application linéaire
2. Famille libre, génératrice. Base et notion de dimension
   - Liberté
   - Famille génératrice
   - Base
   - Notion de dimension
3. Retour sur les applications linéaires, Théorème du rang
   - Théorème du rang
   - Quelques conséquences, utilité du TDR
   - Application aux systèmes linéaires

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,
- $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F$

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,
- $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F$

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,
- $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F$

Définition "condensée" equivalente : F sev si

- F est non vide,

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,
- $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F$

Définition "condensée" equivalente : F sev si

- F est non vide,
- $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x + \lambda y \in F$,

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,
- $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F$

Définition "condensée" equivalente : F sev si

- F est non vide,
- $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x + \lambda y \in F$,

Définition

Definition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$. On dit que F est un sev si :

- *F est non vide,*
- $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$,
- $x \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F$

Définition "condensée" equivalente : F sev si

- F est non vide,
- $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x + \lambda y \in F$,

On peut retenir que : *F sev si F non vide et F stable par addition et multiplication externe.*

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{\overrightarrow{0}\}$ est un sev.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{\overrightarrow{0}\}$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs portés par un plan forment un sev.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{\overrightarrow{0}\}$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs portés par un plan forment un sev.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{\overrightarrow{0}\}$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs portés par un plan forment un sev.

$\rightarrow$ Réfléchir à des exemples d'ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas des sev...

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs portés par une droite ont une structure de sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace entier $\mathbb{R}^2$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \{\overrightarrow{0}\}$ est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs portés par un plan forment un sev.

$\rightarrow$ Réfléchir à des exemples d'ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas des sev...
$\rightarrow$ Réfléchir aux formes géométriques possibles d'un sev (à l'aide de la propriété de stabilité imposée par la définition).

Combinaison linéaire

On appelle combinaison linéaire de deux vecteurs u et v, tout vecteur qui s'écrit $\lambda u + \mu v$ avec λ et μ des nombres réels.

Combinaison linéaire

On appelle combinaison linéaire de deux vecteurs u et v, tout vecteur qui s'écrit $\lambda u + \mu v$ avec λ et μ des nombres réels.
Traduction : tout vecteur qui s'écrit "un peu" de u + un "peu" de v est combinaison linéaire de u et v.

Combinaison linéaire

On appelle combinaison linéaire de deux vecteurs u et v, tout vecteur qui s'écrit $\lambda u + \mu v$ avec λ et μ des nombres réels.
Traduction : tout vecteur qui s'écrit "un peu" de u + un "peu" de v est combinaison linéaire de u et v.
Cette définition se généralise à une famille finie de vecteurs.

Image d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que l'*image de f* est l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Image d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que l'*image de f* est l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Proposition

$Im(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^m$

Image d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que l'*image de f* est l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Proposition

$Im(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^m$

Exo : écrire la preuve

Image d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que l'*image de f* est l'ensemble suivant :

$$Im(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Proposition

$Im(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^m$

Exo : écrire la preuve

Remarque

Lorsque $Im(f) = \mathbb{R}^m$, on dit que f est surjective.

Noyau d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que le *noyau de f* est l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Noyau d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que le *noyau de f* est l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)

Proposition

$Ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

Noyau d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que le *noyau de f* est l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)

Proposition

$Ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

Exo : écrire la preuve

Noyau d'une application linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On rappelle que le *noyau de f* est l'ensemble suivant :

$$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Attention ici le 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$)

Proposition

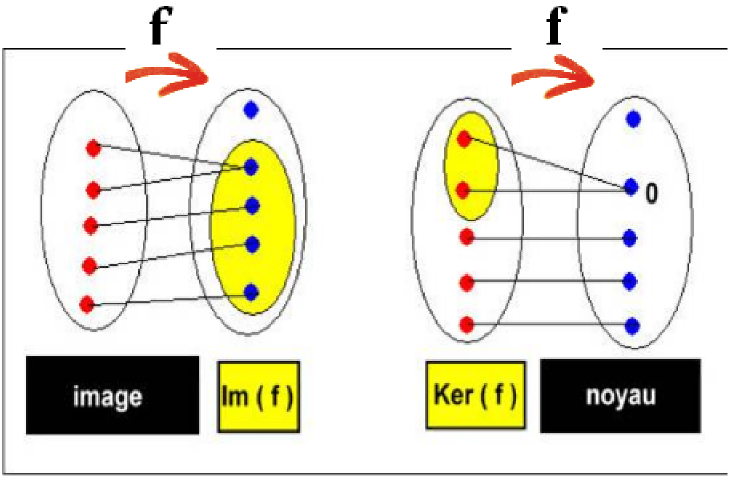
$Ker(f)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

Exo : écrire la preuve

Remarque

Lorsque $Ker(f) = \{0\}$, on dit que f est injective.

Schéma récapitulatif



Famille Libre (linéairement indépendante)

Definition

Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ *est dite libre (ou linéairement indépendante) si pour tout* $p-$*uplets de réels* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ *on a :*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Famille Libre (linéairement indépendante)

Definition

Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *est dite libre (ou linéairement indépendante) si pour tout* $p-$*uplets de réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *on a :*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Traduction : une famille de vecteurs est libre si aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Famille Libre (linéairement indépendante)

Definition

Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *est dite libre (ou linéairement indépendante) si pour tout p−uplets de réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *on a :*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$$

Traduction : une famille de vecteurs est libre si aucun des vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.
Une famille non libre est dite liée. Ce qui signifie qu'il existe (au moins) un vecteur qu'on peut écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exemples

- Toute famille constituée d'un seul vecteur (non nul) est libre.

Exemples

- Toute famille constituée d'un seul vecteur (non nul) est libre.
- Proposer deux vecteurs du plan libres, puis deux vecteurs liés.

Exemples

- Toute famille constituée d'un seul vecteur (non nul) est libre.
- Proposer deux vecteurs du plan libres, puis deux vecteurs liés.
- Dans $\mathbb{R}^3$, que dire de la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$.

Exemples

- Toute famille constituée d'un seul vecteur (non nul) est libre.
- Proposer deux vecteurs du plan libres, puis deux vecteurs liés.
- Dans $\mathbb{R}^3$, que dire de la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$.
- Que dire d'une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul ?

Exemples

- Toute famille constituée d'un seul vecteur (non nul) est libre.
- Proposer deux vecteurs du plan libres, puis deux vecteurs liés.
- Dans $\mathbb{R}^3$, que dire de la famille $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$.
- Que dire d'une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul ?
- Dans $\mathbb{R}^2$, que dire d'une famille constituée de trois vecteurs.

Exemples

- Toute famille constituée d'un seul vecteur (non nul) est libre.
- Proposer deux vecteurs du plan libres, puis deux vecteurs liés.
- Dans $\mathbb{R}^3$, que dire de la famille $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$.
- Que dire d'une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul ?
- Dans $\mathbb{R}^2$, que dire d'une famille constituée de trois vecteurs.

Méthodes

Comment montrer dans la pratique la liberté d'une famille $(v_i)_i$?

Méthodes

Comment montrer dans la pratique la liberté d'une famille $(v_i)_i$?
-Soit on "voit" une relation de dépendance triviale (famille liée).

Méthodes

Comment montrer dans la pratique la liberté d'une famille $(v_i)_i$?
-Soit on "voit" une relation de dépendance triviale (famille liée).
-Soit on écrit $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ et on résoud le système en les λ_i.

Méthodes

Comment montrer dans la pratique la liberté d'une famille $(v_i)_i$?
-Soit on "voit" une relation de dépendance triviale (famille liée).
-Soit on écrit $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ et on résoud le système en les λ_i.
$\rightarrow$ Soit on trouve que tous les λ_i sont nuls, et la famille est donc libre.

Méthodes

Comment montrer dans la pratique la liberté d'une famille $(v_i)_i$?
-Soit on "voit" une relation de dépendance triviale (famille liée).
-Soit on écrit $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ et on résoud le système en les λ_i.
$\rightarrow$ Soit on trouve que tous les λ_i sont nuls, et la famille est donc libre.
$\rightarrow$ Soit on trouve qu'il existe des solutions au système avec les λ_i non tous nuls et la famille est liée.

Définition d'une famille génératrice

Definition

Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs. On dit que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est génératrice dans U (ou génére U) si tout vecteurs de U s'écrit comme combinaison linéaire des v_i.

ie : $\quad \forall u \in U, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p.$

Définition d'une famille génératrice

Definition

Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$ *et* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *une famille de vecteurs. On dit que la famille* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *est génératrice dans U (ou génére U) si tout vecteurs de U s'écrit comme combinaison linéaire des* v_i*.*

ie : $\forall u \in U, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p.$

Si on note

$$Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\},$$

Définition d'une famille génératrice

Definition

Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$ *et* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *une famille de vecteurs. On dit que la famille* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *est génératrice dans U (ou génére U) si tout vecteurs de U s'écrit comme combinaison linéaire des* v_i*.*

ie : $\forall u \in U, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p.$

Si on note

$$Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\},$$

la définition peut alors s'énoncer ainsi :

$$(v_1, v_2, \ldots, v_p) \text{ génére } U \text{ si } Vect(v_1, v_2, \ldots, v_p) = U.$$

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, est ce qu'une famille constituée d'un vecteur peut être génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ?

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, est ce qu'une famille constituée d'un vecteur peut être génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ?
- Proposer une famille génératrice du plan.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, est ce qu'une famille constituée d'un vecteur peut être génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ?
- Proposer une famille génératrice du plan.
- Dans $\mathbb{R}^3$, proposer une famille génératrice.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, est ce qu'une famille constituée d'un vecteur peut être génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ?
- Proposer une famille génératrice du plan.
- Dans $\mathbb{R}^3$, proposer une famille génératrice.
- Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille génératrice d'une partie U de $\mathbb{R}^n$. Soit u un vecteur quelconque. Que dire de la famille $(u, v_1, v_2, \ldots, v_p)$?

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, est ce qu'une famille constituée d'un vecteur peut être génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ?
- Proposer une famille génératrice du plan.
- Dans $\mathbb{R}^3$, proposer une famille génératrice.
- Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille génératrice d'une partie U de $\mathbb{R}^n$. Soit u un vecteur quelconque. Que dire de la famille $(u, v_1, v_2, \ldots, v_p)$?
- A votre avis, combien de vecteur faut il au minimum pour générer $\mathbb{R}^3$

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, est ce qu'une famille constituée d'un vecteur peut être génératrice (de $\mathbb{R}^2$) ?
- Proposer une famille génératrice du plan.
- Dans $\mathbb{R}^3$, proposer une famille génératrice.
- Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille génératrice d'une partie U de $\mathbb{R}^n$. Soit u un vecteur quelconque. Que dire de la famille $(u, v_1, v_2, \ldots, v_p)$?
- A votre avis, combien de vecteur faut il au minimum pour générer $\mathbb{R}^3$

Méthode

Comment montrer dans la pratique qu'une famille $(v_i)_i$ génére une partie U ?

Méthode

Comment montrer dans la pratique qu'une famille $(v_i)_i$ génére une partie U ?
-On prend un vecteur quelconque $u \in U$ et on cherche à écrire u comme combinaison linéaire des v_i. Pour cela, on résoud le système $\sum_i \lambda_i v_i = u$ d'inconnues les λ_i. .

Méthode

Comment montrer dans la pratique qu'une famille $(v_i)_i$ génére une partie U ?
-On prend un vecteur quelconque $u \in U$ et on cherche à écrire u comme combinaison linéaire des v_i. Pour cela, on résoud le système $\sum_i \lambda_i v_i = u$ d'inconnues les λ_i. .
$\rightarrow$ Soit, on trouve des λ_i solutions pour tout u de U et la famille est génératrice de U.

Méthode

Comment montrer dans la pratique qu'une famille $(v_i)_i$ génére une partie U ?
-On prend un vecteur quelconque $u \in U$ et on cherche à écrire u comme combinaison linéaire des v_i. Pour cela, on résoud le système $\sum_i \lambda_i v_i = u$ d'inconnues les λ_i. .
$\rightarrow$ Soit, on trouve des λ_i solutions pour tout u de U et la famille est génératrice de U.
$\rightarrow$ Soit, il existe un ou (des) u de U pour lequel le système n'admet pas de solutions et la famille n'est pas génératrice.

Défintion d'une base

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de U si cette famille est à la fois génératrice dans U et libre.

Défintion d'une base

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de U si cette famille est à la fois génératrice dans U et libre.

Remarque

Cette définition est plus générale que la définition "provisoire" initialement donnée en cours 2, qui se réduisait aux bases de $\mathbb{R}^n$.

Défintion d'une base

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de U si cette famille est à la fois génératrice dans U et libre.

Remarque

Cette définition est plus générale que la définition "provisoire" initialement donnée en cours 2, qui se réduisait aux bases de $\mathbb{R}^n$.

Rappel : définition initiale d'une Base (cours 2)

Definition

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit B la famille constituée de ces n vecteurs, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On dit que B est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique dans B.

ie : $\forall u \in \mathbb{R}^n, \ \exists! x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n, \quad u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$

Rappel : définition initiale d'une Base (cours 2)

Definition

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit B la famille constituée de ces n vecteurs, $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On dit que B est une base de $\mathbb{R}^n$ si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique dans B.

ie : $\forall u \in \mathbb{R}^n,\ \exists! x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n, \quad u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$

Exo : voir que ces deux définitions sont équivalentes pour $U = \mathbb{R}^n$.

Défintion d'une base

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de U si cette famille est à la fois génératrice dans U et libre.

Remarque

Cette définition est plus générale que la définition "provisoire" initialement donnée en cours 2.

Défintion d'une base

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$. Une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une base de U si cette famille est à la fois génératrice dans U et libre.

Remarque

Cette définition est plus générale que la définition "provisoire" initialement donnée en cours 2.

Remarque

Si $U = \mathbb{R}^n$, On va voir que l'on a "forcément" $p = n$.

Exemples

- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemples

- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La sous-famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas génératrice. Il manque un vecteur, une dimension.

Exemples

- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La sous-famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas génératrice. Il manque un vecteur, une dimension.
- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas libre.

Exemples

- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La sous-famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas génératrice. Il manque un vecteur, une dimension.
- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas libre.
- Soit n un entier fixé. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note $\vec{e_i}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième.

$$\vec{e_i} = (0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ième}}}}{1},0,\ldots,0).$$

Exemples

- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La sous-famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas génératrice. Il manque un vecteur, une dimension.
- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas libre.
- Soit n un entier fixé. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $\vec{e_i}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième.

$$\vec{e_i} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ième}}}}{1},0,\dots,0).$$

La famille $\mathcal{B}_n = \{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemples

- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- La sous-famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas génératrice. Il manque un vecteur, une dimension.
- La famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas libre.
- Soit n un entier fixé. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $\vec{e_i}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième.

$$\vec{e_i} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ième}}}}{1},0,\dots,0).$$

La famille $\mathcal{B}_n = \{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.On l'appelle *la base canonique* de $\mathbb{R}^n$.

Exemples

- Proposez trois bases de $\mathbb{R}^2$.

Exemples

- Proposez trois bases de $\mathbb{R}^2$.

Dimension d'un sev

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base de U. Le nombre p s'appelle la dimension de U et on le note $\dim(U)$.

Réponse : oui et la définition précédente a donc un sens.

Dimension d'un sev

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et $B = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une base de U. Le nombre p s'appelle la dimension de U et on le note $\dim(U)$.

C'est le cardinal (le nombre) de vecteurs d'une base de U

Remarque

Cette définition soulève une question de bon sens : est ce que toutes les bases de U ont le même nombre de vecteurs ?

Dimension d'un sev

Definition

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et $B = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base de U. Le nombre p s'appelle la dimension de U et on le note $\dim(U)$.

C'est le cardinal (le nombre) de vecteurs d'une base de U

Remarque

Cette définition soulève une question de bon sens : est ce que toutes les bases de U ont le même nombre de vecteurs ? Réponse : oui et la définition précédente a donc un sens.

Exemples

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Exemples

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Exemples

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\mathbb{R}) = 1$

Exemples

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\mathbb{R}) = 1$
- $dim(\mathbb{R}^n) = n$

Exemples

- $dim(\mathbb{R}^2) = 2$
- $dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $dim(\mathbb{R}) = 1$
- $dim(\mathbb{R}^n) = n$

Quelques propriétés de la dimension

Proposition

Soit U un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dimension d.

- *Toute famille génératrice de U possède au moins d vecteurs.*
- *Toute famille libre de U possède au plus d vecteurs.*
- *Toute base est composée de d vecteurs.*

Théorème du rang

Théorème (TDR)

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $f : U \to \mathbb{R}^m$. Alors, on a :

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

Théorème du rang

Théorème (TDR)

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $f : U \to \mathbb{R}^m$. Alors, on a :

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

-Attention, dans le membre de gauche, c'est la dimension de l'espace de départ qui intervient...

Théorème du rang

Théorème (TDR)

Soit U un sev de $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $f : U \to \mathbb{R}^m$. Alors, on a :

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

-Attention, dans le membre de gauche, c'est la dimension de l'espace de départ qui intervient...

-On appelle rang de f le nombre $dim(Im(f))$ et on le note $rg(f)$.

TDR, un cas particulier

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Alors, on a :

$$n = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

TDR, un cas particulier

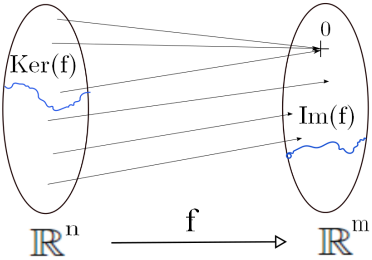
f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Alors, on a :

$$n = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).$$

$\to$ Adapter aux matrices...

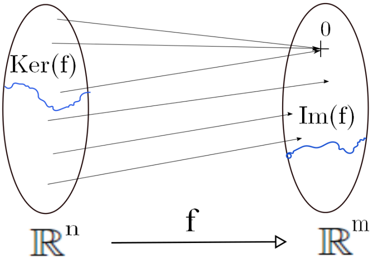
TDR, idée de la preuve

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.



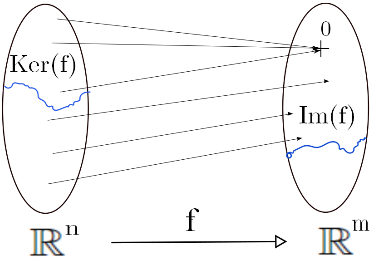
TDR, idée de la preuve

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.



TDR, idée de la preuve

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.



La preuve utilise l'exercice suivant (voir feuille TD) : l'image d'une famille libre par une application linéaire est une famille libre.

Conséquences, utilité

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Conséquences, utilité

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors, on a :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

Conséquences, utilité

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors, on a :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

Exo : faire la preuve de ces équivalences.

Conséquences, utilité

f une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Alors, on a :

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective.}$$

Exo : faire la preuve de ces équivalences.

Ainsi pour montrer qu'une application linéaire est bijective, on peut se restreindre à montrer l'injectivité ou la surjectivité...

Systèmes linéaires et applications linéaires

Soit le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

Systèmes linéaires et applications linéaires

Soit le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

Les y_i et les $a_{i,j}$ sont donnés, on cherche les x_i.

Systèmes linéaires et applications linéaires

Soit le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

Les y_i et les $a_{i,j}$ sont donnés, on cherche les x_i.
Soit f l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Résoudre le système (S) revient à résoudre l'équation

$$f(X) = Y \text{ en } X,$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Résoudre le système (S) revient à résoudre l'équation

$$f(X) = Y \text{ en } X,$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
Soit X une solution particulière, alors toute solution de (S) est de la forme $X + u$ où $u \in Ker(f)$.

$\rightarrow$ La structure de sev de $Ker(f)$ implique une "certaine" géométrie à l'ensembe des solutions de (S)...

Exemples :

- Le système $\left\{\begin{array}{rcr} 4x_1+3x_2 & = & 6 \\ -6x_1+2x_2 & = & -5 \end{array}\right.$ peut il avoir 3 couples solutions ?

Exemples :

- Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 3x_2 & = & 6 \\ -6x_1 + 2x_2 & = & -5 \end{array} \right.$ peut il avoir 3 couples solutions ?
- Quelle est la forme des solutions de $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$?

Exemples :

- Le système $\left\{ \begin{array}{rcr} 4x_1 + 3x_2 & = & 6 \\ -6x_1 + 2x_2 & = & -5 \end{array} \right.$ peut il avoir 3 couples solutions ?
- Quelle est la forme des solutions de $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$?
- L'ensemble des solutions du sytème $\left\{ \begin{array}{rcr} 7x_1 + 9x_2 & = & 3 \\ 3x_1 - 5x_2 & = & 5 \\ -x_1 + 4x_2 & = & -1 \end{array} \right.$ peut il être un plan ?

Exemples :

- Le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 3x_2 & = & 6 \\ -6x_1 + 2x_2 & = & -5 \end{array} \right.$ peut il avoir 3 couples solutions ?
- Quelle est la forme des solutions de $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$?
- L'ensemble des solutions du sytème $\left\{ \begin{array}{rcl} 7x_1 + 9x_2 & = & 3 \\ 3x_1 - 5x_2 & = & 5 \\ -x_1 + 4x_2 & = & -1 \end{array} \right.$ peut il être un plan ? une droite ?