Cours 1: Autour des systèmes linéaires, Algorithme du pivot de Gauss, Introduction aux matrices

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module complémentaire de maths approfondies

Définition d'un système linéaire

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array} \right.$$

Définition d'un système linéaire

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

Les y_i et les $a_{i,j}$ sont donnés, on cherche les x_i.

Cas particulier

Ex : Système 3×3

Cas particulier

Ex : Système 3×3

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & = & d_3 \end{cases}$$

Variante

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & \leq & y_n \end{array}\right.$$

Variante

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & \leq & y_n \end{array}\right.$$

Les y_i et $a_{i,j}$ sont données, on cherche les régions où se situent les x_i.

Exemple 1

Une usine fabrique trois produits P1, P2 et P3. Ces produits passent dans trois ateliers différents A,B et C, avec les temps de passages suivants :

- P1 passe 2h dans l'atelier A, 1h dans l'atelier B et 1h dans latelier C
- P2 passe 5h dans l'atelier A, 3h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C
- P3 passe 3h dans l'atelier A, 2h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C

Exemple 1

Une usine fabrique trois produits P1, P2 et P3. Ces produits passent dans trois ateliers différents A,B et C, avec les temps de passages suivants :

- P1 passe 2h dans l'atelier A, 1h dans l'atelier B et 1h dans latelier C
- P2 passe 5h dans l'atelier A, 3h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C
- P3 passe 3h dans l'atelier A, 2h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C

Question : Lors dun programme de fabrication, la charge horaire des différents ateliers a été de 104h pour A, 64h pour B et 55h pour C. Quelles sont les quantités de P1, P2 et P3 fabriquées ?

Exemple 1

Pour $i = 1..3$, soit n_i la quantité de produits P_i fabriqués.

Exemple 1

Pour $i = 1..3$, soit n_i la quantité de produits P_i fabriqués.
L'énoncé se traduit par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2n_1 + 5n_2 + 3n_3 & = & 104 \\ n_1 + 3n_2 + 2n_3 & = & 64 \\ n_1 + 2n_2 + 2n_3 & = & 55 \end{array}\right.$$

Exemple 2

Exemple 2

La fabrication d'un produit artistique P exige l'assemblage de pièces de type 1 et de type 2. Une pièce de type 1 coûte 6 euros et necessite 3h de travail alors qu'une pièce de type B coûte 3 euros et nécessite 4h de travail.
Contraintes économiques : on souhaite que le prix du produit P ne dépasse pas 180 euros. Par ailleurs, le temps de fabrication de P ne doit pas excéder 160h.

Exemple 2

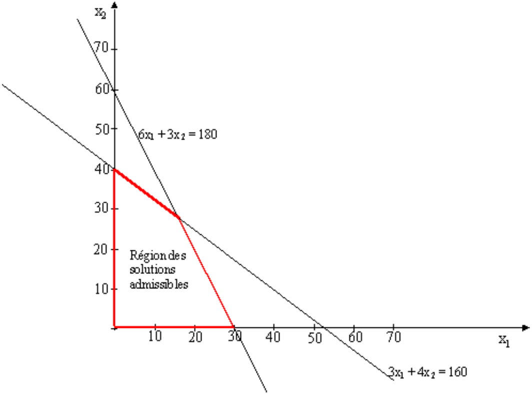
La fabrication d'un produit artistique P exige l'assemblage de pièces de type 1 et de type 2. Une pièce de type 1 coûte 6 euros et necessite 3h de travail alors qu'une pièce de type B coûte 3 euros et nécessite 4h de travail.
Contraintes économiques : on souhaite que le prix du produit P ne dépasse pas 180 euros. Par ailleurs, le temps de fabrication de P ne doit pas excéder 160h.
Question :
Quels sont les valeurs possibles pour le nombre de pièces de type 1 et 2 pour la fabrication de P

Soit x_1 et x_2 le nombre respectifs de pièces de type 1 et 2 pour fabriquer un produit P.

Soit x_1 et x_2 le nombre respectifs de pièces de type 1 et 2 pour fabriquer un produit P. On doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ 6x_1 + 3x_2 & \leq & 180 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 160 \end{array} \right.$$

Soit x_1 et x_2 le nombre respectifs de pièces de type 1 et 2 pour fabriquer un produit P. On doit avoir :



$$\begin{cases} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ 6x_1 + 3x_2 & \leq & 180 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 160 \end{cases}$$

But

Trouver une méthode "automatique" pour résoudre les systèmes linéaires

But

Trouver une méthode "automatique" pour résoudre les systèmes linéaires

-> Fabriquer un algorithme

Partons des 3 exemples suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -2x_1 - 6x_2 = -10 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -2x_1 - 6x_2 = 8 \end{cases}$$

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point,

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes),

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
    - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
    - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
    - Les 2 droites sont confondues,

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
    - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
    - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
    - Les 2 droites sont confondues, infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues, infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues, infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Inconvénients de cette méthode :

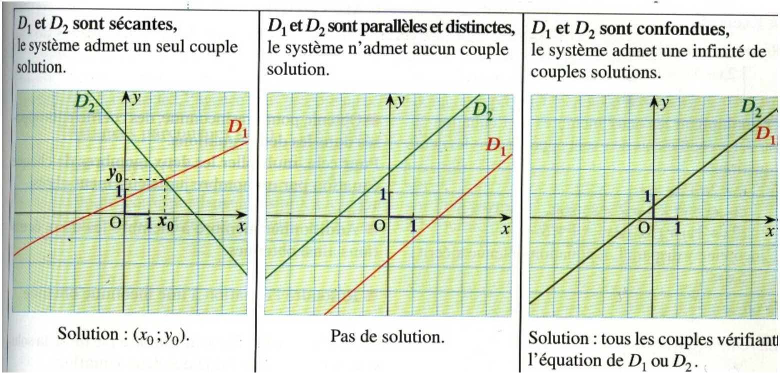
Méthode graphique

Géométriquement, on peut comprendre la "forme" des solutions. *On peut retrouver ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire...*

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues, infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Inconvénients de cette méthode : précision des résultats...

Méthode graphique



Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$,

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale",

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2" = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2" = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :
$$\{(5 - 3\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2 " = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :
$$\{(5 - 3\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
(Paramétrage non unique)

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2 " = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :
$$\{(5 - 3\lambda, \lambda); \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
(Paramétrage non unique)
- Pour (S_3), toute substitution aboutit à une égalité non valide,

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,
$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$
D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2 " = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :
$$\{(5 - 3\lambda, \lambda); \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
(Paramétrage non unique)
- Pour (S_3), toute substitution aboutit à une égalité non valide, pas de solutions.

Méthode par addition

$$(S_1)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{cases}$$

Méthode par addition

$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{array}\right.$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

Méthode par addition

$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{array} \right.$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad et \quad L_2 \leftarrow -2L_1 + 3L_2.$$

Méthode par addition

$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{array}\right.$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad et \quad L_2 \leftarrow -2L_1 + 3L_2.$$

Ce qui donne : $\left\{\begin{array}{rcl} 7x_1 & = & 35 \\ 7x_2 & = & 21 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & 3 \end{array}\right.$

Méthode par addition

$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{array}\right.$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad et \quad L_2 \leftarrow -2L_1 + 3L_2.$$

Ce qui donne : $\left\{\begin{array}{rcl} 7x_1 & = & 35 \\ 7x_2 & = & 21 \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & 3 \end{array}\right.$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ -2x_1 - 6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

  Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & 8 \end{array}\right.$,

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & 8 \end{array}\right.$, on procéde aux même opérations :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & 8 \end{array}\right.$, on procéde aux même opérations :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ce qui donne : $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ 0 & = & -2 \end{array}\right.$

D'où le système n'admet pas de solutions.

Pivot de Gauss sur les sytémes linéaires

- Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système *triangulaire* qui a les MEMES SOLUTIONS.

Pivot de Gauss sur les sytémes linéaires

- Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système *triangulaire* qui a les MEMES SOLUTIONS.

But

- Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & = & d_3 \end{array}\right.$$

But

- Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

à un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z & = & \delta_1 \\ \beta_2y + \gamma_2z & = & \delta_2 \\ \gamma_3z & = & \delta_3 \end{array}\right.$$

(si possible...)

But

- Pour un système 3 $\times$ 3, cela revient à passer d'un système du type
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x+b_1y+c_1z & = & d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & = & d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$
à un système du type
$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z & = & \delta_1 \\ \beta_2y+\gamma_2z & = & \delta_2 \\ \gamma_3z & = & \delta_3 \end{array}\right.$$
(si possible...)
- Une fois que l'on a un système triangulaire, on obtient directement la dernière inconnue. On peut ensuite passer à la substitution en remontant ligne par ligne.

Opérations autorisées

Pour transformer un système donné en un système triangulaire, on dispose d'un certain nombre d'opérations que l'on peut faire sur les équations du système sans changer ses solutions. Précisément, on peut

Opérations autorisées

Pour transformer un système donné en un système triangulaire, on dispose d'un certain nombre d'opérations que l'on peut faire sur les équations du système sans changer ses solutions. Précisément, on peut

- permuter deux équations,
- multiplier une équation par un nombre non nul,
- ajouter une ligne à une autre.

Un exemple concret avant le cas général

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & 2 \\ 2x+y-z & = & 1 \\ 4x+3y+z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations.

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations.
Au niveau de la matrice, cela revient à utiliser la première ligne pour faire apparaître des 0 sous le premier coefficient de la première ligne.

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations.
Au niveau de la matrice, cela revient à utiliser la première ligne pour faire apparaître des 0 sous le premier coefficient de la première ligne.C'est ce premier coefficient que l'on appelle le pivot.

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$
- On a ainsi fait apparaître un premier 0 sous notre pivot.

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$
- On a ainsi fait apparaître un premier 0 sous notre pivot.
- On fait alors apparaître un nouveau 0 en soustrayant 4 fois la première ligne à la troisième :

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}$

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1)$$
- On a maintenant terminé la première étape du pivot de Gauss : on a mis des 0 sur toute la première colonne, à l'exception de notre pivot.

- Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

- Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

- On recommence alors la première étape, sur la matrice plus petite : dans notre exemple, notre nouveau pivot est le 3, que l'on utilise pour faire apparaître des 0 en dessous. Ainsi,

- Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

- On recommence alors la première étape, sur la matrice plus petite : dans notre exemple, notre nouveau pivot est le 3, que l'on utilise pour faire apparaître des 0 en dessous. Ainsi,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - \tfrac{7}{3}L_2)$$

- On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second et l'on recommence sur la matrice plus petite.

- On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second et l'on recommence sur la matrice plus petite.
- Le processus s'arrête lorsque l'on a une matrice triangulaire (i.e : une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale), et donc un système triangulaire.

- On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second et l'on recommence sur la matrice plus petite.
- Le processus s'arrête lorsque l'on a une matrice triangulaire (i.e : une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale), et donc un système triangulaire.
- On revient alors à la notation système, et l'on peut "remonter" les équations par substitution des variables. on pourrait également continuer avec la notation matricielle...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

- Dans notre exemple, la dernière ligne de notre matrice nous donne l'équation

$$4z = 2, \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

- Dans notre exemple, la dernière ligne de notre matrice nous donne l'équation

$$4z = 2, \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}.$$

- La seconde ligne nous donne

$$3y - 3z = -3,$$

et en substituant à z la valeur trouvée, on obtient $3y = -\frac{3}{2}, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{1}{2}.$

- Enfin, la première ligne nous donne

$$x - y + z = 2,$$

et en substituant, on obtient

$$x = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

- Enfin, la première ligne nous donne

$$x - y + z = 2,$$

et en substituant, on obtient

$$x = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

- La solution de notre système est donc le triplet

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Notations

- On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

Notations

- On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

  Les y_i sont données, on cherche les x_i.
- Notation matricielle.

Notations

- On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{cases}$$

  Les y_i sont données, on cherche les x_i.
- Notation matricielle. Soient

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} ; \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

- on veut résoudre en X l'équation : $AX = Y$

Algorithme du pivot de Gauss

On crée un tableau à n lignes et $n+1$ colonnes en bordant la matrice A par le vecteur C.
On notera :

- L_i^k la ligne i de la matrice A à l'itération k,
- $a_{i,j}^k$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice A à l'itération k.

Algorithme

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour k allant de 1 à n

S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{k-1} \neq 0$,

échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$

$L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$

Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$

$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{i,k}^{k-1} \times L_k^k$

Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Algorithme

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour k allant de 1 à n

S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{k-1} \neq 0$,

échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$
$L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$
Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$
$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{i,k}^{k-1} \times L_k^k$

Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Après l'étape k de l'algorithme, la colonne k a tous ses coefficients nuls sauf celui de la diagonale, qui vaut 1 (et les coefficients inférieurs)... Le tour est joué.

Remarques :

- l'algoritme fonctionnerait sur un système "non carré".

Remarques :

- l'algoritme fonctionnerait sur un système "non carré".
- on peut également effectuer le pivot de Gauss sur le systéme "brut", sans passer par la matrice. [l'utilisation des matrices allège un peu l'écriture...]

Application future : Inversion des matrices, Application future : Inversion des matrices, c'est l'objet de la section suivante.

frame

- L'algorithme général

Introduction

Introduction

- Dans ce cours, vous verrez essentiellement une matrice comme un tableau "abstrait", sur lequel on fait des opérations peu "intuitives" !

Introduction

- Dans ce cours, vous verrez essentiellement une matrice comme un tableau "abstrait", sur lequel on fait des opérations peu "intuitives" !
- Il faut savoir que l'introduction des matrices est cohérente, ces "tableaux" ont été créés pour représenter certaines applications (linéaires).

Introduction

- Dans ce cours, vous verrez essentiellement une matrice comme un tableau "abstrait", sur lequel on fait des opérations peu "intuitives" !
- Il faut savoir que l'introduction des matrices est cohérente, ces "tableaux" ont été créés pour représenter certaines applications (linéaires).
- C'est à l'aide de cette représentation, que l'on comprend les règles (addition, multiplication, inversion etc...) des matrices !

Introduction

- Dans ce cours, vous verrez essentiellement une matrice comme un tableau "abstrait", sur lequel on fait des opérations peu "intuitives" !
- Il faut savoir que l'introduction des matrices est cohérente, ces "tableaux" ont été créés pour représenter certaines applications (linéaires).
- C'est à l'aide de cette représentation, que l'on comprend les règles (addition, multiplication, inversion etc...) des matrices ! Mais la théorie justifiant ces "règles" dépasse le cadre du cours...

Introduction

Introduction

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices (des tableaux) à m lignes et n colonnes.

Introduction

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices (des tableaux) à m lignes et n colonnes.

- Soit A une matrice, on écrit souvent $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Introduction

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices (des tableaux) à m lignes et n colonnes.

- Soit A une matrice, on écrit souvent $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Cela signifie que le coefficient à la ligne i et à la colonne j de la matrice A est $a_{i,j}$

Introduction

On note $\mathcal{M}_{m,n}$ l'ensemble des matrices (des tableaux) à m lignes et n colonnes.

- Soit A une matrice, on écrit souvent $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$. Cela signifie que le coefficient à la ligne i et à la colonne j de la matrice A est $a_{i,j}$
- Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, on a :

$$a_{1,1} = 4, \; a_{2,1} = -1 \;\; et \;\; a_{1,3} = 7.$$

frame

- L'algorithme général

Addition, soustraction

Addition, soustraction

Definition

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}$. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On pose :

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}).$$

Exemple :

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

On pratique de manière similaire pour la soustraction...

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 9 & 9 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

On pratique de manière similaire pour la soustraction...
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplication externe

Multiplication externe

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, notons $A = (a_{i,j})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}).$$

Multiplication externe

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, *notons* $A = (a_{i,j})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}).$$

Exemple : $5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix}$

Multiplication interne : produit matriciel

Multiplication interne : produit matriciel

On définit le produit matriciel de telle sorte qu'il "code" la composition des applications. Ces raisons nous conduisent à poser la définition suivante.

Multiplication interne : produit matriciel

On définit le produit matriciel de telle sorte qu'il "code" la composition des applications. Ces raisons nous conduisent à poser la définition suivante.

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}, \quad A = (a_{i,j})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad B = (b_{i,j})$, *on pose*

$$AB = C, \quad avec\ c_{i,j} = \sum_{k=1\ldots n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Multiplication interne : produit matriciel

On définit le produit matriciel de telle sorte qu'il "code" la composition des applications. Ces raisons nous conduisent à poser la définition suivante.

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}, \quad A = (a_{i,j})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}, \quad B = (b_{i,j})$*, on pose*

$$AB = C, \quad \text{avec } c_{i,j} = \sum_{k=1...n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

- Attention $AB \neq BA$!

Multiplication interne : produit matriciel

On définit le produit matriciel de telle sorte qu'il "code" la composition des applications. Ces raisons nous conduisent à poser la définition suivante.

Definition

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $\quad A = (a_{i,j})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{n,p}$, $\quad B = (b_{i,j})$, *on pose*

$$AB = C, \quad avec\ c_{i,j} = \sum_{k=1\dots n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

- Attention $AB \neq BA$!
- Notez que le nombre de colonnes de A doit être égal le nombre de ligne de B !

Disposition des calculs

Exemples de produits de matrices

-

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemples de produits de matrices

- $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

- $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

frame

- L'algorithme général

Définition de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carré de taille n.

Définition de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carré de taille n. Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$pour\ tout\ x, \quad (f^{-1}of)(x) = x \quad et \quad (fof^{-1})(x) = x,$$

on aimerait trouver une matrice B telle que :

Définition de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carré de taille n. Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$\text{pour tout } x, \quad (f^{-1} o f)(x) = x \quad \text{et} \quad (f o f^{-1})(x) = x,$$

on aimerait trouver une matrice B telle que :

$$BA = Id_n \quad \text{et} \quad AB = Id_n,$$

Définition de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carré de taille n. Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$pour\ tout\ x, \quad (f^{-1}of)(x) = x \quad et \quad (fof^{-1})(x) = x,$$

on aimerait trouver une matrice B telle que :

$$BA = Id_n \quad et \quad AB = Id_n,$$

où Id est la matrice identité de taille n, définie par $Id_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Définition de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carré de taille n. Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$\textit{pour tout } x, \quad (f^{-1} o f)(x) = x \quad \textit{et} \quad (f o f^{-1})(x) = x,$$

on aimerait trouver une matrice B telle que :

$$BA = Id_n \quad et \quad AB = Id_n,$$

où Id est la matrice identité de taille n, définie par $Id_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Definition

La matrice B s'appelle la matrice inverse de A. On la note A^{-1}.

Remarque importante

Remarque importante

Il existe des applications qui n'admettent pas d'inverse (prendre par exemple $f(x) = x^2$).

Remarque importante

Il existe des applications qui n'admettent pas d'inverse (prendre par exemple $f(x) = x^2$). De même, toute matrice n'admet pas un inverse !

Remarque importante

Il existe des applications qui n'admettent pas d'inverse (prendre par exemple $f(x) = x^2$). De même, toute matrice n'admet pas un inverse !

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

Remarque importante

Il existe des applications qui n'admettent pas d'inverse (prendre par exemple $f(x) = x^2$). De même, toute matrice n'admet pas un inverse !

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

Application aux systémes linéaires

Application aux systémes linéaires

Revenons au sytéme précédent $\begin{cases} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{cases}$

Application aux systémes linéaires

Revenons au sytéme précédent $\left\{\begin{array}{lll} x-y+z & = & 2 \\ 2x+y-z & = & 1 \\ 4x+3y+z & = & 3 \end{array}\right.$ On peut le réécrire sous forme matricielle ainsi

$$AX = B, \tag{1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Application aux systémes linéaires

Revenons au syténe précédent $\begin{cases} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{cases}$ On peut le réécrire sous forme matricielle ainsi

$$AX = B, \tag{1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Admettons que A soit inversible et que l'on connaisse la matrice A^{-1},

Application aux systémes linéaires

Revenons au sytéme précédent $\begin{cases} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{cases}$ On peut le réécrire sous forme matricielle ainsi

$$AX = B, \tag{1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Admettons que A soit inversible et que l'on connaisse la matrice A^{-1}, on multiplie alors à gauche par A^{-1} l'égalité (1) et on obtient :
$A^{-1}AX = A^{-1}B$,

Application aux systémes linéaires

Revenons au syténe précédent $\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1 \\ 4x + 3y + z &= 3 \end{cases}$ On peut le réécrire sous forme matricielle ainsi

$$AX = B, \tag{1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Admettons que A soit inversible et que l'on connaisse la matrice A^{-1}, on multiplie alors à gauche par A^{-1} l'égalité (1) et on obtient :
$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad ie : \quad IdX = A^{-1}B.$

Application aux systémes linéaires

Revenons au sytéme précédent $\begin{cases} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{cases}$ On peut le réécrire sous forme matricielle ainsi

$$AX = B, \tag{1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Admettons que A soit inversible et que l'on connaisse la matrice A^{-1}, on multiplie alors à gauche par A^{-1} l'égalité (1) et on obtient :
$A^{-1}AX = A^{-1}B$, *ie* : $IdX = A^{-1}B$. Et donc,

$$X = A^{-1}B.$$

Plutôt que d'essayer de chercher un inverse, en écrivant les conditions pour qu'une matrice soit l'inverse et en résolvant le systéme obtenu, on va élaborer un critère "simple" permettant de savoir à l'avance si une matrice est inversible ou pas (sans donner l'inverse).

frame

- L'algorithme général

Déterminant

Il existe un critère trés pratique pour savoir si une matrice est inversible. Le fondement de ce critère ne rentre pas dans le cadre de ce cours, mais son utilisation fait partie du cours.

Déterminant

Il existe un critère trés pratique pour savoir si une matrice est inversible. Le fondement de ce critère ne rentre pas dans le cadre de ce cours, mais son utilisation fait partie du cours.

- A chaque matrice A, on associe un nombre appelé determinant de A et noté $det(A)$.

$$\begin{array}{rcl} det : \mathcal{M}_n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & det(A). \end{array}$$

Déterminant

Il existe un critère trés pratique pour savoir si une matrice est inversible. Le fondement de ce critère ne rentre pas dans le cadre de ce cours, mais son utilisation fait partie du cours.

- A chaque matrice A, on associe un nombre appelé determinant de A et noté $det(A)$.

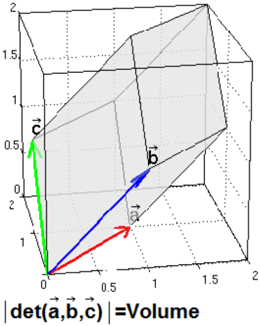
$$\begin{array}{rcl} det : \mathcal{M}_n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & det(A). \end{array}$$

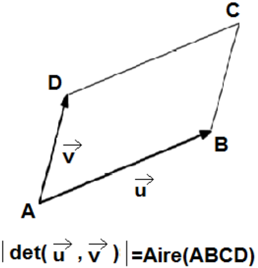
- Ce nombre a la propriété "magique" suivante :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow det(A) \neq 0.$$

Déterminant : une image mentale...

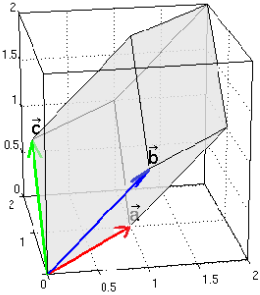
Le déterminant "mesure" l'indépendance des vecteurs colonnes de la matrice. Au signe près, on peut y penser comme le volume engendré par ces 3 vecteurs en dim 3 (parallélépipède) ou l'aire en dim 2 (parallélogramme).



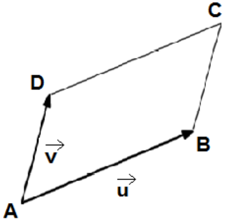


Déterminant : une image mentale...

Le déterminant "mesure" l'indépendance des vecteurs colonnes de la matrice. Au signe près, on peut y penser comme le volume engendré par ces 3 vecteurs en dim 3 (parallélépipède) ou l'aire en dim 2 (parallélogramme).



$|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$=Volume



$|\det(\vec{u},\vec{v})|$=Aire(ABCD)

Calcul de déterminants de matrices d'ordre 2 et 3

Calcul de déterminants de matrices d'ordre 2 et 3

- $$det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

Calcul de déterminants de matrices d'ordre 2 et 3

- $$det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

- $$det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}) = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

Pour s'en souvenir, on peut écrire : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ et remarquer que le déterminant est la différence entre la somme des diagonales vers le bas et des diagonales vers le haut.

Pour s'en souvenir, on peut écrire : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ et remarquer que le déterminant est la différence entre la somme des diagonales vers le bas et des diagonales vers le haut.

$$\begin{aligned} det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}) = a_1 b_2 c_3 \quad &+ \quad b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ &- \quad (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) \end{aligned}$$

Quelques exemples

- $det(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 11$, donc la matrice est inversible.

Quelques exemples

- $det(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 11$, donc la matrice est inversible.
- $det(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix}) = 0$, donc la matrice n'admet pas d'inverse.

Quelques exemples

- $det(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 11$, donc la matrice est inversible.
- $det(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix}) = 0$, donc la matrice n'admet pas d'inverse.
- $det(\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = -2$, donc la matrice est inversible.

Calcul de déterminant de matrices d'ordre supérieur

- A l'aide des cofacteurs (voir poly pour la déf), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 4, à l'aide des déterminants de matrices d'ordre 3.

Calcul de déterminant de matrices d'ordre supérieur

- A l'aide des cofacteurs (voir poly pour la déf), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 4, à l'aide des déterminants de matrices d'ordre 3.
- Plus généralement, les cofacteurs permettent de caculer le déterminant d'une matrice d'ordre n à l'aide des déterminants de matrices d'ordre $n-1$.

△ Voir poly pour plus de détails

Quelques propriétés des déterminants

- $det(Id) = 1$

Quelques propriétés des déterminants

- $det(Id) = 1$
- $det(AB) = det(A)det(B)$

Quelques propriétés des déterminants

- $det(Id) = 1$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

- Avec un logiciel ...

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

- Avec un logiciel ...
- Algorithme du pivot de Gauss.

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

- Avec un logiciel ...
- Algorithme du pivot de Gauss.

Objet de la section suivante

frame

- L'algorithme général

- Soit A une matrice carré (supposée inversible),

- Soit A une matrice carré (supposée inversible), on cherche à obtenir la matrice :
$$A^{-1}$$

Diposition des calculs : un exemple

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diposition des calculs : un exemple

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par présenter les choses sous la forme "Gauss".

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Au lieu de mettre à droite de la matrice un seul vecteur Y comme pour les sytèmes linéaires de la section précédente, on a mis cette fois la matrice Id à droite de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$ pour simplifier la suite des calculs. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7+\frac{27}{4} & -2+\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7 + \frac{27}{4} & -2 + \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul. La matrice est donc inversible !

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7 + \frac{27}{4} & -2 + \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul. La matrice est donc inversible ! On pourrait alors résoudre chaque système en "remontant" les équations comme dans la section précédente...Là encore, on peut mener directement ces calculs sur ces "tableaux".

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient,

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{5}{2} & -18 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- On a réussi à obtenir l'identité à gauche, la matrice de droite est donc A^{-1}.
  ie :

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- On a réussi à obtenir l'identité à gauche, la matrice de droite est donc A^{-1}.
  ie :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Notation de l'algo général

Notation de l'algo général

On notera :

- L_i^k la ligne i de la matrice A à l'itération k,
- $a_{i,j}^k$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice A à l'itération k.

Algo général

L'algorithme de Gauss-Jordan (pour aller jusqu'à une matrice triangulaire) est le suivant :

Pour k allant de 1 à n

S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{k-1} \neq 0$,

échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$

$L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$

Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$

$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{i,k}^{k-1} \times L_k^k$

Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Après l'étape k de l'algorithme, la colonne k a tous ses coefficients nuls sauf celui de la diagonale qui vaut 1 et ceux en dessous de la diagonale...