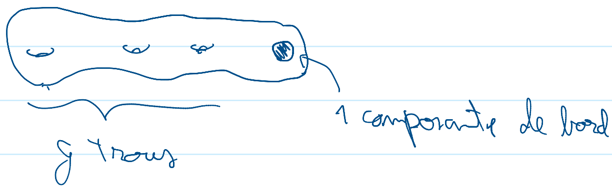
Presentation Talk

Friday 13 September 2024 15:56

L'idée : Appliquer la théorie des E_k-algèbres cellulaires à la stabilité homologique, avec l'exemple des mapping class groupes en tête.

$\Sigma_{g,1} =$ 

Mapping class group (groupe des difféotopies) :

$$\Gamma_{g,1} = \mathrm{Diff}_\partial(\Sigma_{g,1})/\text{isotopie} \simeq \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(\Sigma_{g,1}))$$

difféos de $\Sigma_{g,1}$ qui sont l'identité sur un voisinage du bord

[Gramain [73]] : les composantes connexes de $\mathrm{Diff}_\partial(\Sigma_{g,1})$ sont contractiles

$\mathrm{Diff}_\partial(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(\Sigma_{g,1}))$ éq. d'homotopie

$\mathrm{Diff}^\circ(S^2 \text{ ou } P^2) \simeq SO(3)$, Tore $\mapsto$ Tore, Klein ou Moebius $\mapsto SO(2)$

disque ou cylindre $\mapsto O(2)$. Tous les autres cas $\mapsto *$.

$B\Gamma_{g,1}$ classifie les fibrés en surfaces de fibre $\Sigma_{g,1}$ triviaux sur le bord

$$\{\Sigma_{g,1} \text{ fibrés sur } X\} \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}(X, B\Gamma_{g,1})/\text{homotopie}$$

nice enough

$\rightsquigarrow$ On veut comprendre $H^*(B\Gamma_{g,1};k) \cong (H_*(B\Gamma_{g,1};k))^\vee$

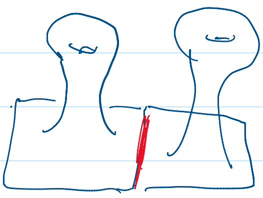
dans caractéristiques... corps/$\mathbb{R}$

Q $H_*(B\Gamma_{g,1})$?

Trop compliqué !! Mais on peut essayer de comprendre $g \longrightarrow +\infty$:

En effet $\Sigma_{g-1,1} \longrightarrow \Sigma_{g,1}$

Vu que $\partial \Sigma_{g,1} = \partial I^2$, en identifiant deux arêtes de I^2



$\Sigma_{1,1} \hookrightarrow \Sigma_{2,1}$

Recollement le long du bord + extension de difféos par id $\Rightarrow \Gamma_{g,1} \longrightarrow \Gamma_{g+1,1}$

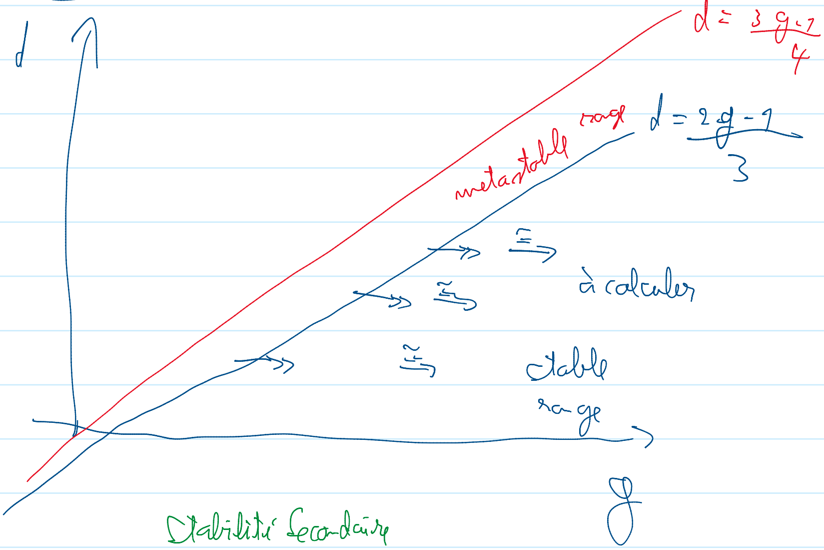
$\Downarrow$

$\sigma : B\Gamma_{g,1} \to B\Gamma_{g+1,1}$

Stabilité primaire

Thm (Harer) : Pour $d \leq \frac{2g-4}{3}$ et surjectif jusqu'à $d \leq \frac{2g-1}{3}$

GKRW (optimal bound) $\sigma_* : H_d(B\Gamma_{g-1,1};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_d(B\Gamma_{g,1};\mathbb{Z})$ est un iso



Stabilité secondaire

Thm : (GKRW) $\exists$ morphismes

$$\varphi_*: H_{d-2}(B\Gamma_{g-3,1}, B\Gamma_{g-4,1};\mathbb{Z}) \longrightarrow H_d(B\Gamma_{g,1}, B\Gamma_{g-1,1};\mathbb{Z})$$

iso pour $d \leq \frac{3g-5}{4}$, surj pour $d \leq \frac{3g-1}{4}$

Fait crucial : $\frac{3}{4} \geq \frac{2}{3}$

Ceci est une application qu'on pourra démontrer avec les outils qu'on va apprendre.

Idée clé : Considérer tous les $B\Gamma_{g,1}$ au même temps

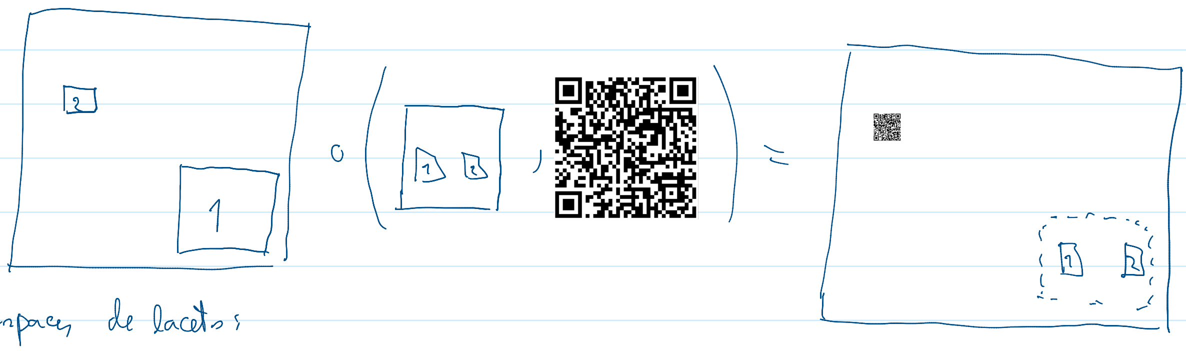
$$\bigsqcup_{g\geq 1} B\Gamma_{g,1} \text{ est une } E_2\text{-algèbre}$$

Pour nous,

E_k-algèbre = algèbre sur l'opérade des petits cubes C_k

$C_k(0)=\emptyset \qquad C_k(n) = \mathrm{Emb}^{\mathrm{rect}}((I^k)^{\sqcup n}, I)$ « opérade des petits rectangles »

$$C_k(2)\times\left(C_k(1)\times C_k(2)\right) \longrightarrow C_k(3)$$



Ex(1) Espaces de lacets :

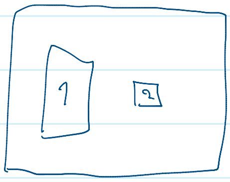
$C_k \circlearrowright \Omega^k X \overset{\mathrm{map}((I^k,\partial I^k),(X,*))}{} \quad \forall X \in \mathrm{Top}$ i.e. $C_k(n)\times(\Omega^k X\times\dots\times\Omega^k X) \to \Omega^k(X)$

($\Leftarrow$) Si $C_k \circlearrowright Y$ et $\pi_0(Y)$ est un groupe (multiplication induite par C_k) $\Rightarrow Y \simeq \Omega^k X$

2) $C_k \circlearrowright \bigsqcup B\Gamma_{g,1}$ $\qquad \partial\Sigma \mapsto \partial[0,1]^2 \times \{0\}$

Idée : $\mathrm{Diff}_\partial(\Sigma_{g,1}) \curvearrowright \mathrm{Emb}_\partial(\Sigma_{g,1}, [0,1]^2 \times \mathbb{R}^\infty) / \sim \ast \Rightarrow$ Espace total $E\Gamma_{g,1}$.

$C_2(2)$
$\cup\!\!\!\!\!\;|$



$f_i \in \mathrm{Emb}(\ldots)$

$([f_1],[f_2]) \in E\Gamma_{g_1+g_2,1}$.

Cherche présentation (homotopique) de A en tant qu'algèbre cellulaire

Déf. Algèbre cellulaire : Pushout itéré d'algèbres libres le long d'inclusions $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$

$\neq$ Algèbre CW $\leftarrow$ Information squelettique

$\uparrow$

Satisfont approximation CW / Hurewicz / Whitehead..

CW approximation sur les E_k-algèbre est utile :

- On comprend bien l'homologie des E_k-gèbres libres (atomes des algèbres cellulaires)
- $\exists$ méthodes pour calculer les indécomposables. Ils sont donnés par des constructions bar itérées k fois.

Technique pour démontrer le théorème précédent (et d'autres) :

1. Établir un critère pour qu'une E_k-gèbre satisfasse stabilité homologique "stabilité homologique générique".
2. Ex : Pour $\mathcal{G}$ groupoïde monoïdale tressée $\Rightarrow E_2$-gèbre

groupoïde $\Sigma_{g,1}$ Ob $= \mathbb{N}$, $\otimes = a+b$

$E_2 \curvearrowright \bigsqcup B\Gamma_{g,1}$

$\mathcal{G} = \bigsqcup_{g \geq 1} B\,\mathrm{Aut}(\ldots)$

On comprend $B(\mathcal{G})$ via les "E_1-splitting complexes".
$\leftarrow$ calcule les E_1-indécomposables

3 Si connectivité augmente "suffisamment rapidement" ;

$\begin{cases} \text{cw approx} \\ + \\ \text{Homologie des } E_k\text{-gèbres libres} \end{cases} \Rightarrow$ on obtient stabilité à partir des calculs d'homologie en petits degrés.

4 Pour appliquer ce critère à $\bigsqcup_{g\geq 1} B\Gamma_{g,1}$ il faut un peu de théorie classique des mapping class groups

1) Connectivité des E_1-splitting complexes via le complexe des arcs

2) Calcul de $H_d(B\Gamma_{g,1}, \mathbb{Z})$ pour g, d petits.