$\mathbb{E}_k$- algèbres et leurs indécomposables

Joost Nuiten

Rappel : C_k opérade topo. : $C_k(r) = \begin{cases} \mathrm{Emb}_{aff}\left((I^k)^{\sqcup r} \to I^k\right), & r \geq 1 \\ \emptyset, & r = 0 \end{cases}$

$\mathbb{E}_k = \mathrm{Sing}(C_k)$ opérade simpliciale.

Problème : étudier les cellules des $\mathbb{E}_k$-algèbres cellulaires

Déf : $A \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_k}(\mathrm{sSet})$, alors :

- Décomposables

$$\mathrm{Dec}(A) = \mathrm{Im}\left(\bigsqcup_{r \geq 2} \left(\mathbb{E}_k(r) \times A^{\times r}\right)_{\Sigma_r} \to A \right) \circlearrowleft \mathbb{E}_k(1) \simeq *$$

- Indécomposables

$$Q(A) = \left(\frac{A}{\mathrm{Dec}(A)}\right) \Big/ \mathbb{E}_k(1) \quad \in \mathrm{sSet}_*.$$

Rq : Q admet un adjoint à droite

$$\mathrm{triv} : \mathrm{sSet}_* \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_k}(\mathrm{sSet})$$

$$(X, b) \longmapsto X \text{ muni de } \begin{cases} \alpha(x) = x, & \alpha \in \mathbb{E}(1) \\ \alpha(x_1, \dots, x_r) = b, & \alpha \in \mathbb{E}_k(r),\ r \geq 2 \end{cases}$$

Lemme : $Q : \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_k}(\mathrm{sSet}) \rightleftarrows \mathrm{sSet}_* : \mathrm{triv}$ est une adjunction de Quillen (pour les structures induites par sSet_{KQ}).

Déf.: $\mathbb{L}Q(A)$ indécomposables dérivés (= foncteur dérivé).

Rq: • $\mathbb{E}_k$-algèbre cellulaire $\Rightarrow$ cofibrant.

• $\forall$ $\mathbb{E}_k$-alg. A, $\exists$ modèle cellulaire $A' \xrightarrow{\sim} A$

• A cofibrant $\Rightarrow$ $\dfrac{A}{\mathrm{Dec}(A)} \xrightarrow{\sim} Q(A)$

$$\begin{tikzcd}
sSet \arrow[r, shift left, "F^{\mathbb{E}_k}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[drr, shift left, "(-)_+"] & & Alg_{\mathbb{E}_k}(sSet) \arrow[l, shift left, "\text{oubli}"] \arrow[d, shift right, "Q"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
& & sSet_* \arrow[ull, shift left, "\text{oubli}_*"] \arrow[u, shift right, "\text{triv}"']
\end{tikzcd}$$

Cor.: Attachement de $\mathbb{E}_k$-cellules $\longmapsto$ attachement de cellules

$$\begin{tikzcd}
F^{\mathbb{E}_k}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & F^{\mathbb{E}_k}(D^n) \arrow[d] \\
A \arrow[r] & A'
\end{tikzcd}
\quad \overset{Q}{\longmapsto} \quad
\begin{tikzcd}
S^{n-1}_+ \arrow[r] \arrow[d] & D^n_+ \arrow[d] \\
Q(A) \arrow[r] & Q(A')
\end{tikzcd}$$

(on utilise $Q(F^{\mathbb{E}_k}(X)) = X_+$)

Cor.: $A \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sSet)$, alors pour tout modèle cellulaire $A' \to A$:

$$\# \text{ d-cellules de } A' = \# \text{d-cellules de } Q(A') = \mathbb{L}Q(A)$$
$$\geq \text{rang } \tilde{H}^d(\mathbb{L}Q(A)).$$

Prop.: Pour $A \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sSet)$, alors

$$A \leftarrow F^{\mathbb{E}_k}(A) \leftleftarrows F^{\mathbb{E}_k} F^{\mathbb{E}_k}(A) \overset{\leftarrow}{\leftleftarrows} \cdots$$

colimite homotopique, d'où

$$\mathbb{L}Q(A) = \left| A_+ \leftleftarrows F^{\mathbb{E}_k}(A)_+ \leftleftarrows \cdots \right|.$$

<u>Obs.</u> : Toutes ces constructions s'appliquent aussi dans le contexte général

$$s : (sSet, \times) \underset{\perp}{\overset{\otimes}{\rightleftarrows}} (\mathcal{S}, \otimes)$$

cat. monoïdale (sym / tressée) avec

$$\mathbb{E}_k = s(\mathrm{Sing}(C_k)) \in \mathrm{Op}(\mathcal{S})$$

<u>Ex.</u> : • $\mathcal{S} = sSet^G$, G groupoïde monoïdal des "genres" (pour $\Gamma_{g,1}$).

• $\mathcal{S} = sMod_R$: R anneau comm. ($R = \mathbb{Z}$, corps).

<u>Pour $\mathcal{S} = sMod_R$</u>

• $(sMod_R)_* = sMod_R$ (les modules sont pointés par 0)

• Pour toute $A \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sMod_R)$,

$$\eta : A \longrightarrow \mathrm{triv}\, Q(A) \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sMod_R)$$

$$\rightsquigarrow \eta : A \to Q(A) \text{ dans } sMod_R$$

<u>Déf.</u> : Pour $A \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sMod_R)$, on appelle

$$\left[A \xleftarrow{\sim} A' \xrightarrow{\eta} Q(A') = \mathbb{L}Q(A) \right] \in \mathrm{Ho}(sMod_R)$$

le morphisme de Hurewicz.

Thm [Harper-Hess, ...] (Hurewicz relatif) Soit $f : A \to B$ dans $Alg_{\mathbb{E}_k}(sMod_R)$.

Notons $C = Cone(A \to B)$

$$C_1 = Cone(\mathbb{L}Q(A) \to \mathbb{L}Q(B))$$

Supposons que $\pi_0 A = \pi_0 B = 0$ et que $\pi_i(C) = 0 \ \forall i < n$

(C est n-connectif)

Alors le morphisme d'Hurewicz induit un iso

$$\pi_n(C) \xrightarrow{\cong} \pi_n(C_1).$$

Cor.: (Whitehead) Pour $f : A \to B$ tq $\pi_0 A = \pi_0 B = 0$, si $\mathbb{L}Q(A) \xrightarrow{\sim} \mathbb{L}Q(B)$, alors f est une équivalence faible.

Démo: (A) On peut prendre

- A alg. cellulaire avec cellules en dim ≥ 1.
- $A \to B$ cellulaire avec cellules en dim $\geq n$

(car C n-connectif)

$$\Rightarrow \underset{1\text{-connectif}}{\mathbb{L}Q(A)} \longrightarrow \underset{1\text{-connectif}}{\mathbb{L}Q(B)} \longrightarrow \underset{n\text{-connectif}}{C_1}$$

(B) $\exists$ tour d'opérades dans $sMod_R$

$$\mathbb{E}_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{E}_k^{\leq r} \longrightarrow \mathbb{E}_k^{\leq r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{E}_k^{\leq 1} = \mathbb{E}_k(1)$$

où $\mathbb{E}_k^{\leq r}(p) = \begin{cases} \mathbb{E}_k(p) & p \leq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notation : • $Q_r(A) = \mathbb{E}_k^{\leq r} \circ_{\mathbb{E}_k} A = A \big/ Im\left(\bigoplus_{p > r} (\mathbb{E}_k(p) \otimes A^{\otimes p})_{\Sigma_p} \to A\right)$

• $C_r = Cone(Q_r(A) \to Q_r(B))$.

<u>Rq</u> : $\mathbb{E}_k(1)$ contractile + A & B cofibrant

$$\Longrightarrow Q_1(A) \simeq Q(A).$$ (m̂ chose pour B)

On obtient une suite exacte :

$$\mathbb{E}_k(r) \circ_{\mathbb{E}_k} A \longrightarrow Q_r(A) \longrightarrow Q_{r-1}(A)$$

<u>Note</u> : $\mathbb{E}_k(r) \circlearrowleft \mathbb{E}_k$ est la restriction d'une action

$$\mathbb{E}_k(r) \circlearrowleft \mathbb{E}_k(1) \simeq *$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}_k(r) \circ_{\mathbb{E}_k} A = \mathbb{E}_k(r) \circ_{\mathbb{E}_k(1)} \left(\mathbb{E}_k(1) \circ_{\mathbb{E}_k} A \right)$$

$$\simeq \mathbb{E}_k(r) \circ_{\mathbb{E}_k(1)} Q_1(A)$$

$$\simeq \left(\mathbb{E}_k(r) \otimes Q(A)^{\otimes r} \right)_{\Sigma_r}.$$

<u>Conséquences</u> :

- QA 1-connectif $\Longrightarrow QA^{\otimes r}$ r-connectif

  $\Longrightarrow (\mathbb{E}_k(r) \otimes QA^{\otimes r})_{\Sigma_r}$ r-connectif

- $A \to \cdots \to Q_r A \longrightarrow Q_{r-1} A \longrightarrow \cdots \longrightarrow QA$ se stabilise en basse dimension.

$\Longrightarrow A = \operatorname{holim} Q_r A.$

nécessite un argument en plus

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C = \mathrm{cone}(f) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
Q_r(A) \arrow[r] & Q_r(B) \arrow[r] & C_r
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_{r-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q_{r-1}(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_{r-1} \arrow[d] \\
QA \arrow[r] & QB \arrow[r] & C_1
\end{tikzcd}$$

Il suffit de montrer que :

$C_r \to C_{r-1}$ induit un iso sur $\pi_{\leq n}$.

Pour cela, il suffit que

$$fib(C_r \to C_{r-1}) = cone\left((\mathbb{E}_k(r) \otimes QA^{\otimes r})_{\Sigma_r} \to (\mathbb{E}_k(r) \otimes QB^{\otimes r})_{\Sigma_r} \right)$$

soit $(n+1)$-connectif.

<u>Pour $r = 2$</u> :

$$\begin{tikzcd}
QA^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[d] & QA \otimes QB \arrow[r] \arrow[d] & QB^{\otimes 2} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & QA \otimes C_1 \arrow[r] \arrow[d] & cone(QA^{\otimes 2} \to QB^{\otimes 2}) \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & C_1 \otimes QB
\end{tikzcd}$$

1-conn.

n-conn.

1-conn.

donc $(n+1)$-conn.

$\Downarrow$

$fib(C_r \to C_{r-1})$ $(n+1)$-conn.

car $(\mathbb{E}_k(r) \otimes -)$ et $(-)_{\Sigma_r}$ exacts à droite)