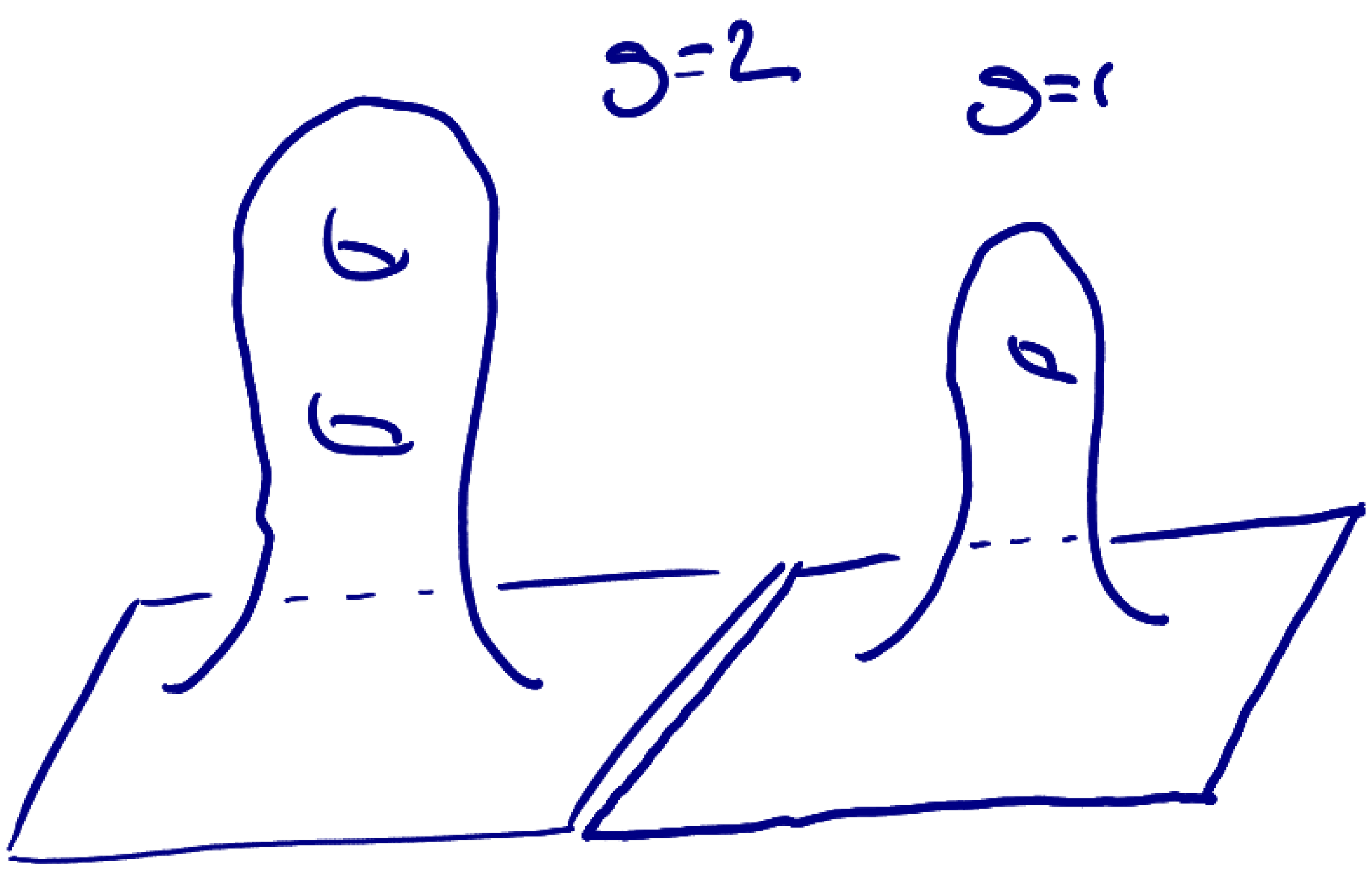
E_k - algèbres et leurs indécomposables

<u>Rappel</u> : C_k opérade topologique

$$C_k(r) = \begin{cases} \mathrm{Emb}_{aff}\left((I^k)^{\sqcup r}, I^k\right), & r \geq 1 \\ \emptyset, & r = 0 \end{cases}$$

$E_k = \mathrm{Sing}(C_k)$ opérade simpliciale



<u>Problème</u> : étudier les cellules des E_k-algèbres cellulaires.

<u>Definition</u> : $A \in \mathrm{Alg}_{E_k}(\mathrm{sSet})$ alors <u>Décomposables</u>

$$\mathrm{Dec}(A) = \mathrm{image}\Big(\coprod_{r \geq 2} \big(\mathcal{E}_k(r) \times A^{\times r}\big)_{\Sigma_r} \longrightarrow A \Big)$$

$\circlearrowleft \mathcal{E}_k(1) \simeq *$

<u>Indécomposables</u> :

$$Q(A) = \Big(\frac{A}{\mathrm{Dec}(A)} \Big) \Big/ \mathcal{E}_k(1) \quad \in sSet_*$$

<u>Remark</u> : Q admit adjoint à droite

$$\mathrm{triv} : sSet_* \longrightarrow \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}_k}(sSet)$$

$$(X, b) \longmapsto X, \quad \alpha(x) = x, \ \alpha \in \mathcal{E}_k(1), \quad \alpha(x_1, \ldots x_r) = b, \ \alpha \in \mathcal{E}_k(r), \ r \geq 2$$

<u>Lemme</u> : $Q : \mathrm{Alg}_{\mathcal{E}_k}(sSet) \rightleftarrows sSet_* : \mathrm{triv}$

est une adjonction de Quillen (structures induites par $sSet_{\mathbb{kQ}}$)

<u>Definition</u> : $\mathbb{L}Q(A)$ indecomposables dérivées = functor dérivé

<u>Remark</u> : • $\mathbb{E}_k$-algèbre cellulaire $\Rightarrow$ cofibrant

• $\forall$ $\mathbb{E}_k$-algèbre A, $\exists$ modèle cellulaire $A' \xrightarrow{\sim} A$

• A cofibrant $\Rightarrow$ $A/\mathrm{Dec}(A) \xrightarrow{\sim} Q(A)$

$$\begin{tikzcd}
sSet \arrow[r, shift left, "F^{\mathbb{E}_k}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[dr, shift left, "(-)_+"] & \mathrm{Alg}_{\mathbb{E}_k}(sSet) \arrow[l, shift left, "\text{oubli}"] \arrow[d, shift right, "Q"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
 & sSet_* \arrow[u, shift right, "\text{triv}"'] \arrow[ul, shift left, "\text{oubli}_*"]
\end{tikzcd}$$

Corollary:

Attachment de $\mathbb{E}_k$-cellulaires $\rightsquigarrow$ Attachment de cellules

$$\begin{tikzcd} F^{\mathbb{E}_k}(S^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & F^{\mathbb{E}_k}(D^n) \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A' \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd} \quad \overset{Q}{\longmapsto} \quad \begin{tikzcd} S^{n-1}_+ \arrow[r] \arrow[d] & D^n_+ \arrow[d] \\ Q(A) \arrow[r] & Q(A') \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

Corollary: $A \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sSet)$, alors pour $A' \to A$ modèle cellulaire.

$\#$ d-cells de A' = $\#$ d-cells de $Q(A') = \mathbb{L}Q(A)$

$\geq$ rang $\tilde{H}^d(\mathbb{L}Q(A))$

Prop: Pour $A \in Alg_{\mathbb{E}_k}(sSet)$, alors

$$A \leftarrow F^{\mathbb{E}_k}(A) \leftleftarrows F^{\mathbb{E}_k} F^{\mathbb{E}_k}(A) \leftleftarrows\!\!\leftarrow \cdots$$

colimite homotopique, d'où

$$\mathbb{L}Q(A) = \left| A_+ \leftleftarrows F^{E_k}(A)_+ \leftleftarrows \cdots \right|$$

<u>Obs</u>: Toutes ces constructions s'appliquent aussi dans le contexte général :

$$s : (sSet, \times) \underset{\perp}{\overset{\otimes}{\rightleftarrows}} (S, \otimes)$$

catégorie monoïdale (sym/tressé) avec

$$E_k = s(\mathrm{Sing}(C_k)) \in Op(S)$$

<u>Example</u>: • $S = sSet^{G}$, G groupoid symmet monoïdale des "genres" (pour $\Gamma_{g,1}$)

• $S = sMod_R$, R anneau commutatif

($R = \mathbb{Z}$, corps, ...)

Pour $S = sMod_R$

- $(sMod_R)_* = sMod_R$
- Pour toute $A \in Alg_{E_k}(sMod_R)$

$$\eta : A \longrightarrow triv(Q(A)) \in Alg_{E_k}(sMod_R)$$

$\rightsquigarrow \eta : A \to Q(A)$ dans $sMod_R$.

Definition : Pour $A \in Alg_{E_k}(sMod_R)$, on appelle

$$\left[A \xleftarrow{\sim} A' \xrightarrow{\eta} Q(A') = \mathbb{L}\, Q(A) \right] \in Ho(sMod_R)$$

est le morphisme de Hurewicz

Theorem : (Harper-Hess, ...) (Hurewicz relatif)

Soit $f : A \to B$ dans $Alg_{E_k}(sMod_R)$

Notons : $C = \mathrm{Cone}(A \to B)$

$C_1 = \mathrm{Cone}(\amalg Q(A) \to \amalg Q(B))$

Suppons que $\pi_0(A) = \pi_0(B) = 0$ et que $\pi_i(C) = 0$

$\forall i < n$ (C est n-connectif)

Alors le morphisme d'Hurewicz induit un iso

$$\pi_n(C) \xrightarrow{\cong} \pi_n(C_1)$$

Cor : Pour $f : A \to B$ tq $\pi_0(A) = \pi_0(B) = 0$. Si

$\amalg Q(A) \xrightarrow{\sim} \amalg Q(B)$, alors f est une

equivalence faible

Whitehead

A) On peut prendre

- A algèbre cellulaire avec cellules en dim ≥ 1
- $A \to B$ cellulaire avec cellules en dim $\geq n$

$$\Rightarrow \mathbb{L}Q(A) \longrightarrow \mathbb{L}Q(B) \longrightarrow C_1$$

1-connectif $\qquad$ 1-connectif $\qquad$ n-connectif

B) $\exists$ tour d'opérades dans $s\mathrm{Mod}_R$

$$\mathbb{E}_k \to \cdots \to \mathbb{E}_k^{\leq r} \to \mathbb{E}_k^{\leq r-1} \to \cdots \to \mathbb{E}_k^{\leq 1} = \mathbb{E}_k(1)$$

où $\mathbb{E}_k^{\leq r}(p) = \begin{cases} \mathbb{E}_k(p) & , p \leq r \\ 0 & , p > r \end{cases}$

<u>Notation</u>: $Q_r(A) = \mathbb{E}_k^{\leq r} \underset{\mathbb{E}_k}{\circ} A =$

$$= A \Big/ \mathrm{Image}\left(\bigoplus_{p>r} \left(\mathbb{E}_k(p) \otimes A^{\otimes p}\right)_{\Sigma_p} \to A \right)$$

- $C_r = \mathrm{Core}(Q_r(A) \longrightarrow Q_r(B))$

<u>Remarq</u> : $\mathbb{E}_k(1)$ contractible + A et B cofibrant

$\Rightarrow Q_1(A) \simeq Q_1(B)$

On obtient une suite exacte:

$$\mathbb{E}_k(r) \underset{\mathbb{E}_k}{\circ} A \longrightarrow Q_r(A) \longrightarrow Q_{r-1}(A)$$

<u>Note</u> : $\mathbb{E}_k(r) \circlearrowleft \mathbb{E}_k$ est la restriction d'une action

$\mathbb{E}_k(r) \circlearrowleft \mathbb{E}_k(1) \simeq *$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_k(r) \underset{\mathbb{E}_k}{\circ} A = \mathbb{E}_k(r) \underset{\mathbb{E}_k(1)}{\circ} \left(\mathbb{E}_k(1) \underset{\mathbb{E}_k}{\circ} A\right) \simeq$$

$$\simeq \mathbb{E}_k(r) \underset{\mathbb{E}_k(1)}{\circ} Q_1(A) \simeq \left(\mathbb{E}_k(r) \otimes Q(A)^{\otimes r}\right)_{\Sigma_r}$$

<u>Conséquences</u> :

- QA 1-connectif $\Rightarrow QA^{\otimes r}$ r-connectif

$\Rightarrow \left(\mathbb{E}_k(r) \otimes QA^{\otimes r} \right)_{\Sigma_r}$ r-connectif.

- $A \to \dots \to Q_r A \to Q_{r-1} A \to \dots \to QA$

  se stabilize en basse dimension

$\Rightarrow$ $A \simeq \operatorname{holim} Q_r A$

-
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C = \mathrm{Cone}(f) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
Q_r(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q_r(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_r \arrow[d] \\
Q_{r-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & Q_{r-1}(B) \arrow[r] \arrow[d] & C_{r-1} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
Q(A) \arrow[r] & Q(B) \arrow[r] & C_1
\end{tikzcd}$$

Il suffit de (--)

$C_r \longrightarrow C_{r-1}$ induit iso sur $\pi_{\leq n}$

Pour cela, il suffit que

$$\mathrm{fib}(C_r \longrightarrow C_{r-1})$$
$$\|$$
$$\mathrm{Cone}\Big(\big(E_k(r) \otimes Q(A)^{\otimes r}\big)_{\Sigma_r} \longrightarrow \big(E_k(r) \otimes Q(B)^{\otimes r}\big)_{\Sigma_r} \Big)$$

soit $(n+1)$-connectif.

Pour $r=2$:

$$\begin{tikzcd}
QA^{\otimes 2} \arrow[r] \arrow[d] & QA \otimes QB \arrow[r] \arrow[d] & QB^{\otimes 2} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & QA \otimes C_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ul, phantom, "h\ulcorner" near start] & \mathrm{Cone}(QA^{\otimes 2} \to QB^{\otimes 2}) \arrow[d] \arrow[ul, phantom, "h\ulcorner" near start] \\
 & 0 \arrow[r] & C_1 \otimes QB
\end{tikzcd}$$

1-connectif

$(n+1)$-connectif

n-connectif

1-connectif

$\left(E_k(r)\otimes - \text{ et } (-)_{\Sigma_r} \text{ exacts à droite}\right)$