Joan

Tuesday 26 November 2024 15:39

Homologie des E_k-algèbres libres

Introduction

- On s'intéresse aux groupes $H_n(B\Gamma_{g,1};\mathbb{Z})$

- On va étudier $\bigsqcup_{g\geq 0} B\Gamma_{g,1}$ de façon à amener de la structure algébrique supplémentaire.

- On va ensuite calculer l'homologie de certaines cofibres homotopiques dans les E_k-algèbres, pour obtenir des propriétés de stabilité homologique.

- On va approximer ces E_k-algèbres (en petits degrés) par des CW-algs.

- On va associer des suites spectrales à ces CW-algs de façon à calculer leur homologie

- La 1ère page de la s.s. fait apparaître l'homologie de E_k-alg libres.

Pour cet exposé : on calcule l'homologie d'une E_k-alg libre

1 – Un peu plus sur les E_k-alg :

Unité $\quad \mathcal{C}_k^+(n) := \mathrm{Emb}^{rect}\left(\bigsqcup_n I^k, I^k\right)$

$\mathcal{C}_k^+(0) = * \neq \emptyset = \mathcal{C}_k(0)$

Au niveau des algèbres

$$\gamma_A : \mathbf{E}_k^+(X) = \bigsqcup_{n\geq 0} \mathcal{C}_k^+(n) \times_{S_n} X^{\times n} \longrightarrow X$$

$$\begin{tikzcd} \cdots \quad n \geq 0 \quad \cdots_m \\ \mathcal{C}_k^{r}(0) \times X^{\times 0} = * \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\gamma_A"] \end{tikzcd}$$

unité

On obtient une notion d'alg $\left| \begin{array}{l} E_k \\ \mathcal{C}_k \end{array} \right.$ unitaire

$$\begin{tikzcd} E_k^{+}\text{-alg} \arrow[r, shift left, "U"] \arrow[r, phantom, "\top"] & E_k\text{-alg} \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$$X \sqcup * \longleftarrow\!\shortmid X$$

Gradation supplémentaire

← groupoïde avec uniquement les identités et str sym mon donnée par la somme

On considère la cat $sSet^{\mathbb{N}}$ munie de la str monoïdale sym donnée par convolution de Day :

$$(X \otimes Y)(g) = \coprod_{g_1 + g_2 = g} X(g_1) \times X(g_2)$$

Ex qui nous intéresse

$$\mathbb{N} \longrightarrow sSet$$

$$g \longmapsto B\Gamma_{g,1}$$

qui sera une E_2^+-alg dans $sSet^{\mathbb{N}}$

Alg libre

$$\begin{tikzcd} u^{\mathcal{O}} : \mathcal{O}\text{-alg}(sSet^{\mathbb{N}}) \arrow[r] \arrow[r, phantom, "\top"] & sSet^{\mathbb{N}} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$$m : \mathcal{O}\text{-alg}(sSet) \underset{F^{\mathcal{O}}}{\overset{T}{\leftrightarrows}} sSet$$

$$\mathbb{O}(X) = U^{\mathcal{O}} F^{\mathcal{O}}(X) = \coprod \mathcal{O}(n) \otimes_{S_n} X^{\otimes n}$$

$$\left(\begin{array}{l} sSet \hookrightarrow sSet^{\mathbb{N}} \\ S \mapsto \begin{cases} 0 \mapsto S \\ g > 0 \mapsto \emptyset \end{cases} \end{array} \right)$$

Rem : $\mathbb{E}_k^+(X) \cong \mathbb{E}_k(X)^+$

2 – Homologie des E_k-alg libres

On définit $H_{g,n}(X) = H_n(X(g) ; \mathbb{K})$

Soit (A, γ_A) E_k^+-alg.

En appliquant le foncteur lax-monoïdal $C_\bullet$ à γ_A on trouve

$$\begin{tikzcd} C_\bullet(\mathcal{C}_k^+(n) ; \mathbb{K}) \otimes C_\bullet(A ; \mathbb{K}) \arrow[r, "\simeq", "EZ"'] & C_\bullet(\mathcal{C}_k^+ \times A^{\times n} ; \mathbb{K}) \arrow[d, "C_\bullet(\gamma_A)"] \\ & C_\bullet(A ; \mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

$\mathbb{K}$ corps

S_n-éq $\rightsquigarrow$

$$C_\bullet(\mathcal{C}_k^+(n) ; \mathbb{K}) \otimes_{S_n} C_\bullet(A ; \mathbb{K})^{\otimes n} \longrightarrow C_\bullet(A ; \mathbb{K})$$

En passant à l'homologie, on obtient une str de $H_\bullet(\mathcal{C}_k^+ ; \mathbb{K})$-alg sur $H_{\bullet,\bullet}(A ; \mathbb{K})$

En particulier $k \geq 2$.

$\mathcal{C}_k^+(2) \sim S^{k-1}$

Ainsi $\quad H_\bullet(\mathcal{C}_k^+(2); \mathbb{k}) = \mathbb{k}\, u_0 \oplus \mathbb{k}\, \underbrace{u_{k-1}}_{\deg k-1}$

On obtient 2 opérations sur $H_{\bullet,\bullet}(A; \mathbb{k})$.

Produit et crochet de Browder

$\gamma_A(u_0 \otimes - \otimes -) : H_{g_1,d_1} \otimes H_{g_2,d_2} \longrightarrow H_{g_1+g_2, d_1+d_2}$

$\gamma_A(u_{k-1} \otimes - \otimes -) : H_{g_1,d_1} \otimes H_{g_2,d_2} \longrightarrow H_{g_1+g_2, d_1+d_2+k-1}$

Plus gén : $\quad H_\bullet(\mathcal{C}^+_{k}; \mathbb{k}) \cong \mathrm{Pois}_{k-1} \cong \mathrm{Com} \circ \mathrm{Lie}_{k-1}$

$\rightsquigarrow H_{\bullet,\bullet}(A; \mathbb{k})$ est une Pois_{k-1}-alg.

Si $X \in \mathrm{sSet}^{\mathbb{N}}$, on a $X \longrightarrow \mathbf{E}_k^+(X)$

donc $H_{\bullet,\bullet}(X; \mathbb{k}) \to H_{\bullet,\bullet}(\mathbf{E}_k^+(X); \mathbb{k})$

$\circlearrowleft$
Pois_{k-1}

donne, par l'adjonction libre-oubli :

$\mathrm{Pois}_{k-1}(H_{\bullet,\bullet}(X; \mathbb{k})) \longrightarrow H_{\bullet,\bullet}(E_k^+(X); \mathbb{k})$

Thm : (Cohen) Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

$$\mathrm{Pois}_{k-1}\left(H_{\bullet,\bullet}(X;\mathbb{K})\right) \cong H_{\bullet,\bullet}\left(E_k^+(X);\mathbb{K}\right)$$

On s'intéresse maintenant au cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_\ell$ ← premier

Dans cette situation, on a plus d'opérations. Ce sont les opérations de Dyer-Lashof et opérations maximales (top) :

$\underline{\ell = 2}$ $\quad Q^s : H_{g,d}(A;\mathbb{F}_2) \longrightarrow H_{2g,d+s}(A;\mathbb{F}_2)$

$\underline{\ell \neq 2}$ $\quad Q^s : H_{g,d}(A;\mathbb{F}_\ell) \longrightarrow H_{\ell g, d+2s(\ell-1)}(A;\mathbb{F}_\ell)$

$$\beta Q^s : H_{g,d}(A;\mathbb{F}_\ell) \longrightarrow H_{\ell g, d+2s(\ell-1)-1}(A;\mathbb{F}_\ell)$$

qui vérifient des relations (On peut penser ces opérations comme des versions dérivées des puissances ℓ-ièmes)

Thm (F. Cohen) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_\ell$, on a

$$W_{k-1}\left(H_{\bullet,\bullet}(X;\mathbb{F}_\ell)\right) \cong H_{\bullet,\bullet}\left(E_k^+(X);\mathbb{F}_\ell\right)$$

Alg libre pour Pois_{k-1} / opérations Dyer-Lashof et top.

3- Exemple

$\mathbb{1}^{1,0}$ le foncteur : $g \neq 1 \mapsto \emptyset$
$1 \mapsto *^{\otimes}$

Alors $H_{\bullet,\bullet}(E_2^{+}(D^{1,0});\mathbb{F}_2) \cong W_1(\mathbb{F}_2\sigma) \cong \tilde{W}_1 \circ \mathrm{lie}_{k-1}(\mathbb{F}_2\sigma)/[\sigma,\sigma]$

$\cong \tilde{W}_1(\mathbb{F}_2\sigma) \cong \mathbb{F}_2[Q^I\sigma,\ I \text{ adm}]$

$I = \{(2^k, 2^{k-1}, \dots, 2^1, 1),\ k \geq 0\}$

$|Q^I\sigma| = (2^k, 2^k - 1)$