MODULES DE DRINFELD, GÉOMÉTRIE RIGIDE ET CORRESPONDANCE DE LANGLANDS POUR GL_2 EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE.

MARC REVERSAT

Résumé. En 1974 Drinfeld publia sa loi de réciprocité, un pas important vers l'établissement de la correspondance de Langlands en caractéristique positive pour GL_2 ([10]). La géométrie rigide, qui a pris son essort un peu après, permet de bien détailler et expliquer ses idées et ses méthodes. C'est ce que ces notes essaient de raconter, elles sont relatives à des exposés qui se déroulent au "Séminaire de géométrie algébrique, champs et homotopie" de Toulouse, à partir d'avril 2013.

Le texte est divisé en quatre parties. La première concerne les modules de Drinfeld, introduits dans [10], nécessaires pour algébriser certains espaces analytiques ; la deuxième partie expose les outils de géométrie rigide indispensables ici, il s'agit de la géométrie rigide à la Tate, Kiehl, Gerritzen... ; les troisième et quatrième parties contiennent l'apport de cette géométrie à cette théorie : [16] et pour la cohomologie étale-rigide [2] et [30].

Ce texte a été vite écrit, les trois premières parties, déjà exposées, ont été corrigées de beaucoup de leurs maladresses et erreurs, il reste à la dernière partie de profiter des commentaires et corrections des collègues, qui voudront bien continuer à suivre ces exposés.

Table des matières

Date: 18 juin 2013.

Première partie 1. Les modules de Drinfeld.

1. Notations et préliminaires.

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p, $\mathcal{C}$ une courbe définie sur $\mathbb{F}_q$, projective, lisse et géométriquement irréductible, $K = \mathbb{F}_q(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$. On désigne par ∞ un point de $\mathcal{C}$ rationnel sur $\mathbb{F}_q$, que l'on appelle *la place à l'infini de* K et l'on pose $A = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C} - \{\infty\})$, c'est *l'anneau des fonctions régulières en dehors de l'infini*, c'est un anneau de Dedekind, son nombre de classes est fini puisque $J_{\mathcal{C}}(\mathbb{F}_q)$ est fini, où $J_{\mathcal{C}}$ est la jacobienne de $\mathcal{C}$.

Par exemple $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ est le droite projective sur $\mathbb{F}_q$, $K = \mathbb{F}_q(T)$, ∞ est la place $1/T$-adique et $A = \mathbb{F}_q[T]$. Ces données sont les analogues en arithmétique de caractéristique positive de $\mathbb{Q}$, la place à l'infini et $\mathbb{Z}$, ou d'une extension finie de $\mathbb{Q}$, etc. C'est cette situation que nous considérerons ($K = \mathbb{F}_q(T)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$), comme nous nous intéressons au représentations du groupe de Galois absolu de K, c'est en fait la situation générale.

Les valeurs absolues (les places) de K sont toutes non archimédiennes (ultramétriques) et discrètes, par exemple si $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, outre la valeur absolue triviale, ce sont à équivalence près les valeurs absolues $1/T$ et P-adiques, où P décrit les éléments irréductibles (et de coefficients dominants 1) de $\mathbb{F}_q[T]$. On supposera toujours les valeurs absolues normalisées de la manière suivante : si ϖ est une uniformisante de la valeur absolue $|\cdot|_P$ attachée au point fermé P de $\mathcal{C}$, on suppose que $|\varpi|_P = 1/\sharp(\mathbb{F}_q(P))$, $\mathbb{F}_q(P)$ désignant le corps résiduel en P, son cardinal est une puissance de q, on écrira souvent $\sharp(\mathbb{F}_q(P) = q^{\deg P}$ (par exemple si $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ et $P \in \mathbb{F}_q[T]$, $\deg P$ est le degré du polynôme P). La valuation v_P attachée à $|\cdot|_P$ est $v_P = -\log_q |\cdot|_P$, donc en particulier $v_P(\varpi) = \deg P$ et l'on voit alors que la *formule du produit*, bien connue des arithméticiens, est ici une conséquence immédiate du fait qu'un diviseur sur $\mathcal{C}$ rationnel est de degré zéro. : pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$,

$$\prod_{P \in |\mathcal{C}|} |\lambda|_P = 1 \quad \text{ou bien} \quad \sum_{P \in |\mathcal{C}|} v_P(\lambda) = 0 \ ,$$

où $|\mathcal{C}|$ désigne l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}$.

Soit K_∞ le complété de K pour la place à l'infini, on désigne par C le complété d'une clôture algébrique de K_∞, il est encore algébriquement clos. Lorsque $K = \mathbb{F}_q(T)$ et $\infty = 1/T$, on a

$$K_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T})) \text{ et } C = \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}((\frac{1}{T^r} \ ; \ r \in \mathbb{Q})) \ .$$

L'analogie avec la situation classique $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$... dit que K_∞ et C jouent les rôles de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Il faut remarquer que C n'est pas localement compact, il n'est d'ailleurs pas discrètement valué. Reprenons l'exemple de $K = \mathbb{F}_q(T)$ et $\infty = 1/T$, soit r_n une suite de nombres rationnels plus grands que 1 et qui tendent en croissant strictement vers $\sqrt{2}$ (tout nombre irrationnel plus grand que 1 conviendrait), soit

$$u_N = \sum_{1 \le n \le N} \frac{1}{T^{r_n}} \ ,$$

on a $|u_N - u_{N+1}|_\infty = |\frac{1}{T^{r_{N+1}}}|_\infty$ donc si

$$D_N = \{u \in C \ ; \ |u - u_N|_\infty \le |\frac{1}{T^{r_{N+1}}}|_\infty\} \ ,$$

on a $D_N \supset D_{N+1}$, ainsi la suite de disques (fermés) D_N est décroissante, le diamètre ne tend pas vers 0, mais $\cap_N D_N = \emptyset$, en effet, si cette intersection est non vide, elle contient un élément algébrique sur $\mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$, donc une somme finie $\sum \lambda_r \frac{1}{T^r}$ pour des r rationnels et des $\lambda_r \in \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$, on voit que ce n'est pas possible en regardant les valeurs absolues.

Tout corps ainsi, valué, non archimédien et complet, possède une clôture maximalement complète, c'est à dire un extension dans laquelle un “trou” comme il vient d'être mis en évidence n'existe pas et qui de plus est “minimal” pour cette propriété. Pour le corps que nous considérions et avec l'exemple de “trou” donné on peut voir que cette clôture maximalement complète est

$$\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}(\sum_{r \in R} \lambda_r \frac{1}{T^r} \, ; \lambda_r \in \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}} \ , \ R \text{ décrivant le parties bien ordonnées de } \mathbb{Q}) \ ,$$

(le bon ordre est pour l'ordre croissant).

Pour plus de détails sur l'arithmétique en caractéristique positive on peut consulter [49], [23], [1] et la plupart des traités classiques de théorie algébrique des nombres, pour les extensions immédiates [46], ch. 7 ([1]). Le livre de Weil [49] est précurseur sur beaucoup des aspects que nous allons développer dans ces notes.

1. un livre déjà ancien et qui est difficile à lire, on peut trouver un résumé du passage nous concernant dans [34] § 0.2.

2. Définition et premières propriétés des modules de Drinfeld.

([14], [1] lecture 1, [23]) Soient $\gamma : A \to L$ un homomorphisme d'anneaux (unitaires) dans un anneau L, que l'on suppose de plus $\mathbb{F}_q$-linéaire, par exemple L est une extension d'un quotient de A, ou encore γ est l'inclusion $A \subset C$. On dit que L est un A-anneau, ou un A-corps, que γ est sa A-structure et que $\ker\gamma$ est sa A-caractéristique. Un module de Drinfeld sur L est la donnée d'une structure de A-module sur le groupe additif $(L,+)$, mais nous allons dire cela plus précisément.

Soit $L\{\tau\}$ l'anneau des polynômes de Ore à coefficients dans L ([37]), il est muni de l'addition habituelle et sa multiplication vérifie, pour n, m dans $\mathbb{N}$ et $a \in L$

$$\tau^n\tau^m = \tau^{n+m} \ , \ \tau a = a^q\tau \ ,$$

c'est à dire que τ peut-être vu comme l'endomorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_q$ agissant sur les anneaux extensions de $\mathbb{F}_q$. Si L est un corps l'anneau $L\{\tau\}$ est euclidien à droite donc principal à gauche, aussi euclidien à gauche et donc principal à droite si de plus L est algébriquement clos.

Si L est un corps fini, extension de degré n de $\mathbb{F}_q$, alors $L\{\tau\}$ est une algèbre sur $\mathbb{F}_q$ de rang n^2, de centre $\mathbb{F}_q[\tau^n]$ (τ^n est l'automorphisme de Frobenius de L).

Définition 2.1. *Soient L un A-anneau, γ sa A-structure ; un module de Drinfeld sur L est la donnée d'un homomorphisme d'anneaux unitaires $\phi : A \to L\{\tau\}$ tel que pour tout $a \in A$ le terme de degré 0 du polynôme ϕ_a soit $\gamma(a)$ et que le coefficient de son terme de plus haut degré soit inversible dans L.*

Cette notion a d'abord été introduite par Drinfeld sous le terme de *modules elliptiques* ([10]), ce vocabulaire s'expliquera plus loin.

Proposition 2.2. *Soit $\phi : A \to L\{\tau\}$ un module de Drinfeld et supposons que L soit un anneau intègre, alors il existe un entier $r \geq 0$ tel que pour tout $a \in A$, $a \neq 0$, $\deg_\tau \phi_a = r \deg a$. Cet entier s'appelle le rang du module ϕ.*

Démonstration. L'application $a \mapsto -\deg_\tau \phi_a$, $a \in A$, induit une valuation sur K, négative sur A, donc équivalente la valuation à l'infini de K et précisons que cette dernière est équivalents à la valuation induite par $a \mapsto -\deg a$, où $\deg a$ est défini par la formule $q^{\deg a} = \sharp(A/aA)$. Donc il existe un nombre rationnel $r \geq 0$ tel que $\deg_\tau \phi_a = r \deg a$ pour tout $a \in A$, $a \neq 0$. Le fait que r soit un entier est une conséquence du lemme suivant. $\square$

Lemme 2.3. *Soit $\phi : A \to L\{\tau\}$ un module de Drinfeld, on suppose que L est un anneau intègre (en particulier la structure de A-anneau $\gamma : A \to L$ de L est telle que* $\ker\gamma$ *soit un idéal premier) et soit E une clôture algébrique de son corps des fractions ; pour tout idéal I non nul de A soit ${}_I\phi$ l'ensemble des éléments x de E tels que $\phi_a(x) = 0$ pour tout $a \in I$. Alors ${}_I\phi$ est par ϕ un A-module, qui s'appelle le module de I-torsion de ϕ.*

Ecrivons $I = \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{n_s}$ où les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de A non nuls et distincts et les $n_i > 0$ des entiers, alors

$$ {}_I\phi = \bigoplus_{1\le i\le s} {}_{\mathfrak{p}_i^{n_i}}\phi \ . $$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A et $n > 0$ un entier,

– *si $\mathfrak{p} \neq \ker\gamma$ on a un isomorphisme de A-modules*

$$ {}_{\mathfrak{p}^n}\phi \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{p}^n}\right)^r $$

où r est le rang de ϕ, r est donc un entier,

– *si $\mathfrak{p} = \ker\gamma \neq \{0\}$ il existe un entier $h > 0$, indépendant de n, tel que*

$$ {}_{\mathfrak{p}^n}\phi \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{p}^n}\right)^{r-h} \ . $$

Démonstration. On a

$$ {}_I\phi = \bigoplus_{1\le i\le s} {}_{\mathfrak{p}_i^{n_i}}\phi \ . $$

En effet $\supset$ est évident, l'autre inclusion se voit en remarquant que, dans A, $1 = \sum_{1\le i\le r} a_i$ pour des $a_i \in \prod_{j\neq i} \mathfrak{p}_j^{n_j}$, et en appliquant ϕ à $a = a \cdot 1 \in I$.

On examine donc maintenant le cas où I est une puissance d'un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$. Comme $\mathfrak{p}^n$ est de type fini le module ${}_{\mathfrak{p}^n}\phi$ est un ensemble fini, en effet, si $a \in A$, $\ker\phi_a$ est un ensemble fini. Donc ${}_{\mathfrak{p}^n}\phi$ est un A-module de torsion. Soit $x \in {}_{\mathfrak{p}^n}\phi$ annulé par a (par ϕ_a), avec a dans aucune puissance de $\mathfrak{p}$, on voit alors que $A = (\mathfrak{p}^n) + aA$ annule x, donc $x = 0$. Il suit des propriétés des anneaux de Dedekind que ${}_{\mathfrak{p}^n}\phi$ est de la forme

$$ {}_{\mathfrak{p}^n}\phi \simeq \bigoplus_{1\le i\le t(n)} \frac{A}{\mathfrak{p}^{s_i(n)}}, $$

et comme le membre de droite est annulé par $\mathfrak{p}^n$ on a $s_i(n) \le n$ pour tout n.

Il existe un entier $\alpha > 0$ tel que $\mathfrak{p}^\alpha$ soit principal, on écrit $\mathfrak{p}^\alpha = (p)$ avec $p \in A$. Ecrivons

$$\phi_p = \tau^{\ell_0}(c_{\ell_0}\mathrm{Id} + \cdots + c_\ell \tau^{\ell-\ell_0})$$

avec c_{ℓ_0} et c_ℓ non nuls, avec $\ell = r \deg p$ (cf 2.2). On voit que

$$\phi_{p^n} = \tau^{n\ell_0}(c_{n\ell_0}^{(n)}\mathrm{Id} + \cdots + c_{nr\deg p}^{(n)}\tau^{nr\deg p - n\ell_0})$$

avec $c_{n\ell_0}^{(n)}$ et $c_{nr\deg p}^{(n)}$ non nuls. Le module ${}_{p^n}\phi$ est l'ensemble des racines (dans E) du polynôme

$$Q_{p^n}(X) = c_{n\ell_0}^{(n)}X + \cdots + c_{nr\deg p}^{(n)}X^{q^{nr\deg p - n\ell_0}} \quad ,$$

donc $\sharp({}_{p^n}\phi) = q^{nr\deg p - n\ell_0}$.

On a, comme il a été expliqué plus haut que

$$(1) \qquad {}_{p^n}\phi \simeq \bigoplus_{1\le i\le t(\alpha n)} \frac{A}{\mathfrak{p}^{s_i(\alpha n)}}$$

avec donc $\prod_{1\le i\le t(\alpha n)} q^{s_i(\alpha n)\deg\mathfrak{p}} = q^{nr\deg p - n\ell_0}$ et remarquons que $\deg p = \alpha \deg \mathfrak{p}$. Finalement

$$(2) \qquad \sum_{1\le i\le t(\alpha n)} s_i(\alpha n)\deg\mathfrak{p} = nr\alpha\deg\mathfrak{p} - n\ell_0 \ .$$

Il suit de cette dernière formule que

$$n^{-1}\log_q(\sharp({}_{p^n}\phi)) = r\alpha\deg\mathfrak{p} - \ell_0$$

est indépendant de n. On a $\phi_p({}_{p^n}\phi) = {}_{p^{n-1}}\phi$, donc en appliquant ϕ_p à la relation (1) il vient avec (2)

$$nr\alpha\deg\mathfrak{p} - n\ell_0 = \sum_{\substack{1\le i\le t(\alpha n)\\ s_i(\alpha_n)>\alpha}} (s_i(\alpha n) - \alpha)\deg\mathfrak{p} +$$

$$\alpha \sum_{\substack{1\le i\le t(\alpha n)\\ s_i(\alpha_n)>\alpha}} \deg\mathfrak{p} + \sum_{\substack{1\le i\le t(\alpha n)\\ s_i(\alpha_n)\le\alpha}} s_i(\alpha n)\deg\mathfrak{p} \ ,$$

le premier morceau du membre de droite de cette formule vaut $r(n-1)\alpha\deg\mathfrak{p} - (n-1)\ell_0$, le second $\alpha t(\alpha(n-1))\deg\mathfrak{p}$, par suite

$$\alpha t(\alpha(n-1))\deg\mathfrak{p} \le \alpha\deg\mathfrak{p} - \ell_0 \ ,$$

comme l'on voit aussi que $t(\alpha n)$ est croissant avec n, il suit qu'il existe n_0 tel que $t(\alpha n)$ soit constant pour $n \ge n_0$, sa valeur étant alors

$$t := t(\alpha n) \le r - \frac{l_0}{\alpha\deg\mathfrak{p}} \quad \text{pour} \quad n \ge n_0 \ .$$

Soit $A_\mathfrak{p}$ le complété $\mathfrak{p}$-adique de A, la limite projective $T_p(\phi)$ suivant n des ${}_{p^n}\phi$ (les morphismes de transitions étant ϕ_p) est naturellement un

$A_{\mathfrak{p}}$-module et la discussion qui précède montre qu'il est de type fini, sans torsion, donc libre. On voit aussi que $T_p(\phi)/(p^n) \simeq {}_{p^n}\phi$, il suit que en tant que A-module

$$ {}_{p^n}\phi \simeq \left(\frac{A}{(p^n)}\right)^t \quad , $$

donc pour $n \geq n_0$ on a $s_i(\alpha n) = \alpha n$ et donc

$$ t = r - \frac{l_0}{\alpha \deg \mathfrak{p}} \ . \tag{3} $$

Comme γ n'est pas le morphisme nul (car unitaire) on peut choisir $\mathfrak{p}$ tel que $(p) = \mathfrak{p}^\alpha$ ne soit pas contenu dans $\ker \gamma$, c'est à dire que l'on a $l_0 = 0$, auquel cas on voit avec la formule (3) que $t = r$ et ceci montre que r est entier, de plus, toujours avec la même formule on constate alors que $\deg p = \alpha \deg \mathfrak{p}$ divise l_0.

Ce raisonnement peut être refait pour ${}_{\mathfrak{p}^{\alpha n+m}}\phi$, avec $0 \leq m < \alpha$, à la place de ${}_{\mathfrak{p}^{\alpha n}}\phi = {}_{p^n}\phi$, il vient que pour tout n

$$ {}_{\mathfrak{p}^n}\phi \simeq \left(\frac{A}{\mathfrak{p}^n}\right)^{r-h} \quad , $$

où h est un entier naturel et $h > 0$ implique $\mathfrak{p} = \ker \gamma$. $\square$

Remarque 2.4. *Soit $\phi : A \to L\{\tau\}$ un module de Drinfeld sur un anneau intègre L.*

Soit $a \in A$, $a \neq 0$, écrivons $\phi_a = c_{\ell_0}\tau^{\ell_0} + \cdots + c_\ell \tau^\ell$ avec c_{ℓ_0} et c_ℓ non nuls, alors $\ell = r \deg a$ où r est le rang de ϕ. Une propriété analogue existe pour c_{ℓ_0}, cf le lemme 3.2 plus bas.

On n'a mis en évidence l'existence du rang que pour les modules de Drinfeld sur les anneaux intègres, cela peut être fait plus généralement en remplaçant dans la définition L par le groupe additif $\mathbb{G}_{a/L}$ et ${}_I\phi$ devient un sous-schéma en groupes... Nous n'utiliserons pas ce point de vue.

3. Les isogénies.

Une isogénie entre deux modules de Drinfeld sur le même A-anneau L est un morphisme des structures de A-module qu'ils déterminent. Remarquons qu'une isogénie est d'abord un morphisme $\mathbb{F}_q$-linéaire, ceci explique la définition suivante.

Définition 3.1. *Soient L un A-anneau, ϕ et ψ deux modules de Drinfeld sur L, une isogénie $u : \phi \to \psi$ définie sur L est la donnée d'un élément u de $L\{\tau\}$ tel que pour tout $a \in A$*

$$u\phi_a = \psi_a u \quad \textit{dans} \quad L\{\tau\} \ .$$

Il suit que ϕ et ψ ont alors même rang. Une isogénie $u : \phi \to \psi$ est appelée un isomorphisme si elle est inversible, c'est à dire s'il existe une isogénie $v : \psi \to \phi$ telle que $uv = vu = 1$ dans $L\{\tau\}$ (si L est intègre, on a $L\{\tau\}^\times = L^\times$).

Lemme 3.2. *Soient L un A-corps, $u : \phi \to \psi$ une isogénie entre deux modules de Drinfeld sur L et posons $u = \tilde{u}\tau^d$ avec $\tilde{u} \in L\{\tau\}$ séparable (i.e. $\tilde{u} = u_0 + u_1\tau + \cdots$ avec $u_0 \neq 0$), alors*

1. *si la A-caractéristique de L est (0), alors $d = 0$,*
2. *si la A-caractéristique de L est $\mathfrak{P} \neq (0)$, alors $d/\deg\mathfrak{P}$ est un entier.*

On appelle hauteur de l'isogénie u l'entier 0 dans le premier cas et $d/\deg\mathfrak{P}$ dans l'autre cas. On dit que l'isogénie u est séparable si sa hauteur est nulle, qu'elle est purement inséparable si elle s'écrit $u = \tau^d$ avec $d > 0$.

Démonstration. Soit $a \in A$, de $u\phi_a = \psi_a u$ on déduit $\gamma(a)^{q^d} = \gamma(a)$, d'où le résultat puisque $\gamma(A) \simeq A/\mathfrak{P}$. □

Proposition 3.3. *Soient L un A-corps et $u : \phi \to \psi$ une isogénie entre deux modules de Drinfeld sur L. Alors il existe une isogénie $v : \psi \to \phi$ et $a \in A$, $a \neq 0$, tels que $vu = \phi_a$ et $uv = \psi_a$ dans $L\{\tau\}$.*

Démonstration. On suppose d'abord que l'isogénie est séparable. Dans une clôture algébrique L^{alg} de L soit Z l'ensemble des zéros de u ; si $u = u_0 + u_1\tau + \cdots + u_\delta\tau^\delta$, Z est l'ensemble des racines du polynôme additif séparable $u_0X + u_1X^q + \cdots + u_\delta X^{q^\delta} \in L[X]$. Comme Z est via ϕ un A-module fini, il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que ϕ_a soit nul sur Z. Donc il existe $v \in L^{\mathrm{alg}}\{\tau\}$ tel que $\phi_a = vu$, on utilise ici la structure euclidienne à droite, par unicité on a $v \in L\{\tau\}$. On voit que

$$\psi_a u = u\phi_a = uvu$$

donc, par intégrité, $\psi_a = uv$. Montrons que v est une isogénie de ψ vers ϕ : soit $b \in A$, on a $u\phi_{ab} = \psi_{ab}u$, donc $u\phi_b vu = uv\psi_b u$, par suite $\phi_b v = v\psi_b$.

Examinons maintenant le cas général. Soit $\mathfrak{P} \neq (0)$ la A-caractéristique de L, on écrit $u = \tilde{u}\tau^d$ avec $d = h\deg\mathfrak{P}$, h étant la hauteur de u. Soit $a \in A$, si $\phi_a = \gamma(a) + \alpha_1\tau + \cdots + \alpha_{r\deg a}\tau^{r\deg a}$ on pose $\phi'_a =$

$\gamma(a) + \alpha_1^{q^d}\tau + \cdots + \alpha_{r\deg a}^{q^d}\tau^{r\deg a}$ (il faut remarquer que $\gamma(a)^{q^d} = \gamma(a)$ car $\deg\mathfrak{P}$ divise d). On voit que $a \mapsto \phi'_a$ est un module de Drinfeld, que $\tau^d\phi = \phi'\tau^d$ et $\tilde{u}\phi' = \psi\tilde{u}$, on est donc ramené au cas où l'isogénie est purement inséparable.

Soit donc une isogénie $\tau^d : \phi \to \phi'$, soient $\mathfrak{P}$ la A-caractéristique de L et $a \in \mathfrak{P}$, $a \neq 0$. On a $\phi_a = \alpha_{i_0}\tau^{i_0} + \cdots + \alpha_{r\deg a}\tau^{r\deg a}$ avec $i_0 > 0$, donc τ^d divise à droite ϕ_{a^d}, i.e ;. $\phi_{a^d} = v\tau^d$ avec $v \in L\{\tau\}$; v est l'isogénie cherchée. □

Beaucoup de résultats analogues à ceux que l'on connait pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres peuvent être montrés ici pour $\mathrm{End}_A\phi$, l'anneau des isogénies du module de Drinfeld ϕ, nous ne les détaillerons pas, on renvoie à [15] et la "lecture 5" de [1], ainsi qu'à leurs bibliographies.

Exemple 3.4. *Classes d'isomorphismes des modules de rang* 1*. On se place dans le cas où $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, donc $A = \mathbb{F}_q[T]$, etc. Un module de drinfeld de rang* 1 *est caractérisé par sa valeur en T. Soient ϕ et ψ deux modules de Drinfeld sur C, de rang* 1*, on écrit $\phi_T = T + a\tau$, $\psi_T = T + b\tau$ et ces deux modules sont isomorphes si et seulement si il existe $\lambda \in C$ non nul tel que $\lambda\phi_T = \psi_T\lambda$. Un calcul simple montre que ceci est équivalent à la relation $a/b = \lambda^{q-1}$, donc λ existe. On vient de montrer qu'il n'existe qu'une seule classe d'isomorphisme de modules de Drinfeld de rang* 1*, lorsque $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, $A = \mathbb{F}_q[T]$... En général, ce nombre est égal au nombre de classes d'idéaux de A (*[27]*).*

Exemple 3.5. *Classes d'isomorphismes des modules de Drinfeld de rang* 2*. On se place enore dans le cas où $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, donc $A = \mathbb{F}_q[T]$, etc. Un module de drinfeld de rang* 2 *est caractérisé par sa valeur en T. Soient ϕ et ψ deux modules de Drinfeld sur C, de rang* 2*, on écrit $\phi_T = T + a_1\tau + a_2\tau^2$, $\psi_T = T + b_1\tau + b_2\tau^2$ et ces deux modules sont isomorphes si et seulement s'il existe $\lambda \in C$ non nul tel que $\lambda\phi_T = \psi_T\lambda$. On voit par le calcul que cela équivaut à $\lambda^{q-1} = b_1/a_1$ et $\lambda^{q^2-1} = b_2/a_2$, donc une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ et ψ soient isomorphes est que $a_1^{q+1}/a_2 = b_1^{q+1}/b_2$. La quantité*

$$j(\phi) = a_1^{q+1}/a_2$$

caractérise la classe d'isomorphismes de ϕ et l'on voit qu'un espace de modules (grossier) pour les modules de Drinfeld sur C est la droite affine $\mathbb{A}^1_C$.

4. Disgression : les extensions cyclotomiques, le corps de classes abélien.

Il s'agit ici de dire quelques mots sur l'analogue en caractéristique positive des extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}$, analogue au sens de leur rôle arithmétique : construction de l'extension abélienne maximale, théorie du corps de classes abélien. Pour $K = \mathbb{F}_q(T)$ tout est très bien écrit dans l'article de D. Hayes [26], que nous allons résumer et dans lequel D. Hayes précise que certaines des idées viennent de L. Carlitz ([6]). D. Hayes a lui-même traité le cas où le corps de base K est plus général ([27]), mais nous n'en dirons rien ici.

On a donc dans ce paragraphe $K = \mathbb{F}_q(T)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, les éléments de A irréductibles et unitaires seront appelés premiers. Rappelons qu'une extension finie L de K correspond à un revêtement $\mathcal{C}_L \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, où $\mathcal{C}_L$ est une courbe projective lisse dont le corps des fonctions est L, les points fermés de $\mathcal{C}_L$ correspondent ainsi aux places de L, d'où les notions de ramification, inertie, décomposition des places de K dans L.

On appelle *module de Carlitz* le module de Drinfeld ϕ sur C, de rang 1, défini par $\phi_T = T + \tau$, on vérifie sans peine qu'en fait pour tout $a \in A$, $\phi_a \in A\{\tau\}$ et le coefficient du terme de plus haut degré est dans $\mathbb{F}_q^\times$, si $a \neq 0$.

Étant donné $u = u_0 + u_1\tau + \cdots + u_d\tau^d \in C\{\tau\}$, on pose $u(X) = u_0X + u_1X^q + \cdots + u_dX^{q^d} \in C[X]$, alors Ker$u$ est l'ensemble des zéros de $P(X)$

Théorème 4.1. *Soient $a \in A$, $a \neq 0$ et $K_a = K({}_a\phi)$ l'extension de K (dans C) engendrée par les zéros de ϕ_a.*

L'extension K_a/K est abélienne, son groupe de Galois G_a est isomorphe à $(A/aA)^\times$ de la manière suivante : soit λ un générateur en tant que A-module de ${}_a\phi$, alors tout autre générateur s'écrit $\phi_b(\lambda)$, où $b \in A$ est inversible modulo a et

$$G_a \to (A/aA)^\times \quad , \ \sigma \mapsto b \text{ tel que } \sigma(\lambda) = \phi_b(\lambda)$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. L'extension set engendrée par les racines de $\phi_a(X)$, elle est donc normale et séparable. Soit $\sigma \in G_a = \mathrm{Gal}(K_a/K)$, si λ est un A-générateur de ${}_a\phi \simeq A/aA$, $\sigma(\lambda)$ en est aussi un générateur, donc il existe $b \in A$, premier avec a, tel que $\sigma(\lambda) = \phi_b(\lambda)$. Ceci montre l'existence du morphisme $\sigma \mapsto b$, de G_a dans $(A/aA)^\times$, qui est clairement injectif.

Pour montrer la subjectivité nous allons calculer le degré de l'extension K_a/K ; nous commençons par examiner le cas où $a = P^n$ est une puissance d'un premier de A.

Lemme 4.2. *Soient P un premier de A, $n > 0$ un entier, $a = P^n$ et λ un générateur du A-module ${}_a\phi$, soit $f(X) = \phi_P(X)/X$, alors $f(X)$ est dans $A[X]$, c'est un polynôme d'Eisenstein en P et*

$$\operatorname{irr}(\lambda, K; X) = f\left(\phi_{P^{n-1}}(X)\right) \in A[X] \ .$$

Démonstration. On examine d'abord le cas $n = 1$. Soit $s : A \to A/PA$ la surjection canonique, on voit que $\overline{\phi} = s \circ \phi$ est un module de Drinfeld de rang 1 sur A/PA, $\overline{\phi}_P$ en est une isogénie de hauteur non nulle, donc de hauteur 1, par suite $\overline{\phi}_P$ est de la forme $c\tau^{\deg P}$, $c \in (A/PA)^\times$, ce qui montre que $f(X)$ est d'Eisenstein en P.

Supposons maintenant $n > 1$. On a

$$\phi_{P^n}(X) = \phi_P\left(\phi_{P^{n-1}}(X)\right) = f\left(\phi_{P^{n-1}}(X)\right) \times \phi_{P^{n-1}}(X) \qquad (4)$$

$f\left(\phi_{P^{n-1}}(X)\right)$ est dans $A[X]$ et toujours d'Eisenstein en P. □

Ce lemme termine la démonstration du théorème lorsque a est une puissance d'un polynôme irréductible de A. Le cas général vient la linéaire disjonction entre K_a et K_b, si a et b sont des éléments de A premiers entre eux. Cette dernière assertion résulte du lemme suivant, qui précise les ramifications.

Lemme 4.3. *Soient P un premier de A, $n > 0$ un entier et $a = P^n$. Les places de K autres que les P et $1/T$-adiques ne sont pas ramifiées dans K_a, Pest totalement ramifiée, d'indice de ramification $(q^{\deg P} - 1)q^{(n-1)\deg P} = [K_a : K]$.*

Démonstration. Soit λ un A-générateur de ${}_a\phi$, on a $K_a = K(\lambda)$; soit $\overline{A}$ la fermeture intégrale de A dans K_a, on a $A[\lambda] \subset \overline{A}$. Le discriminant de $A[\lambda]$ divise l'idéal de A engendré par la norme de $g'(\lambda)$, où $g(X) = \operatorname{irr}(\lambda, K; X)$, le lemme précédent ainsi que la formule (4) montrent que ce discriminant est une puissance de P ; que le terme constant de $g(X)$ donne $\pm P = \prod \lambda'$ où λ' décrit les conjugués sur K de λ, l'ensemble de ces conjugués est l'ensemble des $\phi_b(\lambda)$ où b décrit $(A/aA)^\times$ donc λ divise chacun de ses conjugués dans $A[\lambda]$, de même un conjugué λ' divise λ dans $A[\lambda'] = A[\lambda]$: on a prouvé $P = \varepsilon\lambda^{[K_a:K]}$, $\varepsilon \in A[\lambda]^\times$. On en conclut que P est la seule place de A ramifiée dans K_a, elle est totalement ramifiée. □

Fin de la démonstration du théorème. On écrit $a = \nu P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r}$ où $\nu \in \mathbb{F}_q^\times$ et où les P_i sont des premiers de A distincts. Le corps K_a est le compositum dans C des corps $K_{P_i^{n_i}}$ et leurs ramifications montrent que chacun d'entre eux est linéairement disjoint du compositum des autres, donc $G_a \simeq \prod_{1\le i\le r} G_{P_i^{n_i}}$, ce qui permet de conclure. □

Proposition 4.4. *Soient $a \in A$, $a \neq 0$ et $K_a = K({}_a\phi)$ l'extension de K (dans C) engendrée par les zéros de ϕ_a, alors la place $1/T$-adique de K est modérément ramifiée dans K_a.*

Comme au dessus on se ramène au cas $a = P^n$, où P est un premier de A.

Proposition 4.5. *Soient P un élément premier de A et $n > 0$ un entier. La place $1/T$-adique se décompose en $q^{\deg P-1}$ places dans K_{P^n}, chacune étant d'indice de ramification $q-1$ et d'indice d'inertie 1.*

Démonstration. cf [26], th. 3.2. □

4.1. **L'extension abélienne maximale.**

Théorème 4.6. *L'extension abélienne maximale (dans C) de K est le compositum de trois sous-corps de C, qui sont*

(1) *la clôture algébrique $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ de $\mathbb{F}_q$,*
(2) *$K^T = \cup K_a$, où a décrit les éléments non nuls de A,*
(3) *le corps K^∞ ainsi construit : On raisonne avec $1/T$ comme on l'a fait avec T, soient $A' = \mathbb{F}_q[1/T]$, $\phi' : A' \to C\{\tau\}$ le module de Drinfeld défini par $\phi'_{1/T} = 1/T + \tau$; soit $n \geq 2$, l'extension $K_{(1/T)^n}$ de K est abélienne, de degré $q^{n-1}(q-1)$ et totalement ramifiée en $1/T$, elle possède une sous extension K^n abélienne, de degré q^{n-1} et totalement ramifiée (sauvagement) en $1/T$; on pose $K^\infty = \cup_{n\geq 2} K^n$.*

On montre (cf. [26]) que les extensions $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ et K^Tsont linéairement disjointes, de même pour K^∞ et le compositum $\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}} \cdot K^T$. L'extension abélienne maximale de K dans C est le compositum $K^{\mathrm{ab}} = \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}} \cdot K^T \cdot K^\infty$ et l'on a $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}/\mathbb{F}_q) \times \mathrm{Gal}(K^T/K) \times \mathrm{Gal}(K^\infty/K)$.

Lemme 4.7. (1) *Si P est un élément premier de A on désigne par $\mathcal{O}_P$ l'idéal de valuation du complété P-adique de K. On a un isomorphisme de groupes topologiques*

$$\mathrm{Gal}(K^T/K) \simeq \prod_P \mathcal{O}_P^\times \ .$$

Cet isomorphisme est ainsi construit : soient $Q \in A$, unitaire, $Q = \prod P_i^{n_i}$ sa décomposition en produit de premiers de A, λ un A-générateur de ${}_Q\phi$; soient $\underline{x} = (x_P) \in \prod_P \mathcal{O}_P^\times$ et R un élément de A tel que $R \equiv x_{P_i} \bmod P_i^{n_i}$ pour tout i ; on sait que R

détermine un unique K-automorphisme σ_R de K_Q, caractérisé par $\sigma_R(\lambda) = \phi_R(\lambda)$; ceci permet de définir

$$\prod_P \mathcal{O}_P^\times \to \mathrm{Gal}(K_Q/K) \ ,$$

qui donne l'homomorphisme cherché en passant à la limite inductive suivant Q.

(2) *Soit $\mathcal{O}_{1/T}$ l'anneau de valuation du complété $1/T$-adique de K, on a un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Gal}(K^\infty/K) \simeq \frac{\mathcal{O}_{1/T}^\times}{\mathbb{F}_q^\times} \ .$$

En effet, K^∞ est la réunion des K^n, $n \geq 2$ (voir plus haut) et $\mathrm{Gal}(K^n/K)$ *est isomorphe au quotient d'ordre q^{n-1} de $(A'/(1/T)^n A')^\times$, donc*

$$\mathrm{Gal}(K^n/K) \simeq \frac{(A'/(1/T)^n A')^\times}{\mathbb{F}_q^\times} \ .$$

Ce lemme, dont la démonstration est contenue dans l'énoncé, permet de donner une description adèlique du groupe de Galois de K^{ab} sur K.

Soit $\mathcal{I}$ le groupe des idèles de K, c'est à dire le groupe des adèles de $\mathrm{GL}_1(K)$, si V désigne l'ensembles valuations de K, à équivalence prés, $\mathcal{I}$ est l'ensemble des $\underline{x} = (x_v)_{v \in V}$ tels que $x_v \in \mathcal{O}_v^\times$ presque partout, c'est à dire que x_v est un élément inversible de l'anneau de valuation du complété de K en v, pour tout v sauf pour un nombre fini d'entre eux. Comme l'on fera plus loin, on désigne par l'∞ la valuation $1/T$-adique, on la dit "valuation à l'infini" et l'on dit que les autre places sont finies, un élément $\underline{x} = (x_v)_{v \in V}$ de $\mathcal{I}$ s'écrit $\underline{x} = (x_\infty, \underline{x}_f)$ où $x_\infty \in K_\infty^\times$ (K_∞ est le complété ∞-adique de K) et $\underline{x}_f$ désigne la "partie finie" de $\underline{x}$, c'est à dire sa projection sur les composantes finies. Soit $x_\infty \in K_\infty^\times$, il s'écrit de manière unique

$$x_\infty = \mu \cdot (1/T)^n \cdot y_\infty$$

avec $\mu \in \mathbb{F}_q^\times$, $n \in \mathbb{Z}$ et $y_\infty \in \frac{\mathcal{O}_{1/T}^\times}{\mathbb{F}_q^\times}$. Grâce en particulier au théorème des chinois, on voit donc que l'on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{I} \simeq K^\times \left(\mathbb{Z} \times \frac{\mathcal{O}_{1/T}^\times}{\mathbb{F}_q^\times} \times \prod_{v \text{ finie}} \mathcal{O}_v^\times \right) \ ,$$

comme $\mathbb{Z}$ s'envoie naturellement dans $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}/\mathbb{F}_q)$ il vient un homomorphisme injectif

$$\mathcal{I}/K^\times \hookrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

et il faut noter que cet homomorphisme est continu à image dense, la topologie de $\mathcal{I}$ étant donnée par la base d'ouverts $\prod_{v\in V} U_v$ avec $U_v = \mathcal{O}_v^\times$ presque partout.

4.2. **L'application d'Artin.** (cf [33]) Soit L une extension galoisienne finie de K (ce qui est dit ici est encore valable si par exemple K est une extension finie de $\mathbb{F}_q(T)$, ou même du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$), de groupe de Galois G. Soient $\overline{A}$ la fermeture intégrale de A dans L, $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\overline{A}$ au dessus de $\mathfrak{p}$; soit $D(\mathfrak{P})$ l'ensemble des $\sigma \in G$ tels que $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, c'est le groupe de décomposition de $\mathfrak{P}$. Il y a un morphisme naturel $D(\mathfrak{P}) \to \mathrm{Gal}(\overline{A}/\mathfrak{P}, A/\mathfrak{p})$, qui est surjectif, son noyau est le groupe d'inertie de $\mathfrak{P}$.

Si $\mathfrak{P}$ est non ramifié sur $\mathfrak{p}$ son groupe d'inertie est trivial, c'est à dire que $D(\mathfrak{P}) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{A}/\mathfrak{P}, A/\mathfrak{p})$. Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{A}/\mathfrak{P}, A/\mathfrak{p})$ est cyclique, engendré par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^\ell$, où $\ell = \sharp(A/\mathfrak{p})$, soit alors $(\mathfrak{P}, L/K) \in D(\mathfrak{P})$ donnant ce Frobenius par l'isomorphisme précédent, c'est l'élément de Frobenius en $\mathfrak{P}$, il est ainsi caractérisé : c'est l'unique élément ζ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ satisfaisant les deux assertions suivantes

(1) $\zeta \in D(\mathfrak{P})$,
(2) pour tout $x \in \overline{A}$, on a $\zeta(x) \equiv x^\ell \bmod \mathfrak{P}$, où ℓ est le cardinal de $A/\mathfrak{p}$.

Le groupe de Galois G opère transitivement sur les idéaux premiers de $\overline{A}$ au dessus de $\mathfrak{p}$, donc si $\mathfrak{P}$ est non ramifié sur $\mathfrak{p}$, il en est ainsi pour tous les idéaux premiers de $\overline{A}$ au dessus de $\mathfrak{p}$, si $\sigma(\mathfrak{P})$ est l'un d'entre eux, on a $D(\sigma(\mathfrak{P}) = \sigma D(\mathfrak{P})\sigma^{-1}$, donc si l'extension L/K est abélienne ces groupes de décomposition ne dépendent que de $\mathfrak{p}$, lorsqu'il n'y a pas de ramification, son élément donnant le Frobenius de $\mathrm{Gal}(\overline{A}/\mathfrak{P}, A/\mathfrak{p})$ est alors noté $(\mathfrak{p}, L/K)$.

Supposons encore l'extension L/K abélienne et soit S un ensemble fini de places de K contenant celles qui se ramifient dans L, soit I^S le groupe des idéaux fractionnaires de K engendré par les idéaux premiers qui ne sont pas dans S, l'homomorphisme

$$\psi_{L/K} : I^S \to \mathrm{Gal}(L/K) \ , \ \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{n_r} \mapsto \prod_{1\le i\le r} (\mathfrak{p}_i, L/K)^{n_i}$$

(où les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers non nuls de A et les n_i sont dans $\mathbb{Z}$) est appelé *l'application (globale) d'Artin*.

Revenons à $A = \mathbb{F}_q[T]$, K, etc. Soient $a \in A$, $a \neq 0$ et P un élément premier de A qui ne divise pas a. Soit $\lambda \in {}_a\phi$ un A-générateur. Il résulte du lemme 4.2 que $\phi_P(\lambda) \equiv \lambda^{q^{\deg P}} \bmod \mathfrak{P}$, où $\mathfrak{P}$ est un idéal de

K_P au dessus de (P). Mais cette congruence caractérise l'élément de Frobenius en $\mathfrak{P}$ de $\mathrm{Gal}(K_a/K)$. Conclusion :

Théorème 4.8. *Soient $a \in A$, $a \neq 0$ et P un élément premier de A qui ne divise pas a. Soit $\lambda \in {}_a\phi$ un A-générateur, alors*

$$((P), K_a/K)(\lambda) = \phi_P(\lambda) \ .$$

L'application d'Artin permet de décrire les extensions abéliennes de K en termes d'idéaux ([33], th. 3.5 et 3.6 p.154) et ceci admet aussi une version adèlique (op. cit. p.163).

5. Le point de vue analytique.

Rappelons que le corps C est algébriquement clos et complet pour la valuation prolongeant celle à l'infini de K, il n'est pas localement compact, il n'est pas non plus maximalement complet. On note $|\cdot|$ sa valeur absolue, un disque $D(a,r)$ de centre $a \in C$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_{>0}$ est l'ensemble des $z \in C$ tels que $|z-a| \leq r$; si $a = 0$ c'est un sous $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de C ; le disque de C centré à l'∞ et de rayon r est l'ensemble des $z \in C$ tels que $|z| \geq r$; ces disques sont ouverts et fermés ; on sera amené plus tard à ne considérer que des disques de rayons dans le groupe des valeurs de C, i.e. dans $|C^\times| = \mathbb{Q}^\times$.

Conformément aux notations de la géométrie rigide, que nous commençons à aborder sans le dire, nous désignerons par C^0 l'anneau de valuation de C, par C^{00} son idéal de valuation et par $\overline{C} = C^0/C^{00} = \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ son corps résiduel.

Soit $u \in C\{\tau\}$, $u = u_0 + u_1\tau + \cdots + u_s\tau^s$, on pose $u(z) = u_0 z + u_1 z^q + \cdots + u_s z^{q^s} \in C[z]$, ceci donne un morphisme d'anneaux de $C\{\tau\}$ dans $C[z]$, ce dernier étant muni de l'addition ordinaire et de la composition des applications.

Soit $D(a,r)$, $a \in C$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, un disque, une série $u(z) = \sum_{i\geq 0} u_i(z-a)^i$, $u_i \in C$, est dite convergente si elle converge pour toutes les valeurs de $z \in D(a,r)$, donc si $|u_i|r^i$ tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$. On dit de U que c'est une fonction analytique sur le disque $D(a,r)$.

Soit f une fonction définie sur C et à valeurs dans C, on dit que c'est une fonction analytique si pour tour disque $D(a,r)$, $a \in C$ et $r \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe une série $u(z) = \sum_{i\geq 0} u_i(z-a)^i$ convergente sur $D(a,r)$ telle que $f(z) = u(z)$ pour tout $z \in D(a,r)$.

5.1. **Les exponentielles additives.** Soit Λ un sous-A-module de C, libre de type fini (i.e. projectif) et discret, on dira que Λ est un réseau de C. Soit pour $z \in C$

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{\lambda\in\Lambda, z\neq 0} (1 - \frac{z}{\lambda}) \ .$$

Proposition 5.1. (1) *Le produit infini $e_\Lambda(z)$ converge uniformément sur tout disque de C, il existe des $a_n \in C$, $n \in \mathbb{N}$, tels que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^{q^n}$ converge uniformément sur tout disque de C et soit égale à $e_\Lambda(z)$ en tout point de C.*

(2) *e_Λ est $\mathbb{F}_q$-linéaire, Λ-périodique ; les zéros de e_Λ sont simples et leur ensemble est Λ.*

(3) *L'application $e_\Lambda : C \to C$ est surjective.*

Démonstration. Soit (r_i) une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, soient Λ_i l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ yens que $|\lambda| \leq r_i$; montrons que Λ_i est fini : on écrit $\Lambda = \oplus_{1\leq j\leq s} A\lambda_j$, on a $\Lambda \subset E := \oplus_{1\leq j\leq s} K_\infty \lambda_j \subset C$ et E est muni de deux normes, celle de C et celle du maximum des coefficients suivant la base (λ_j), elles sont toutes les deux de Banach, donc équivalentes([2]) et il est clair que Λ_i est fini pour la deuxième norme.

Donc Λ_i est un sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel fini de Λ et

$$e_{\Lambda_i}(z) = z \prod_{\lambda\in\Lambda_i, z\neq 0} (1 - \frac{z}{\lambda})$$

est un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire ; la suite (e_{Λ_i}) converge uniformément par exemple sur tout disque de la forme $D(0, R)$ vers e_Λ, les assertions (1) et (2) en résultent.

La preuve de (3) demande quelques préliminaires. Soit $C < z >$ l'anneau des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, avec $a_n \in C$ et $\lim_n a_n = 0$, c'est à dire l'anneau des séries convergentes sur $D(0, 1) = C^0$, ou encore des fonctions analytiques sur ce disque. Cet anneau est muni d'une norme non-archimédienne, qui est $|| \sum_{n\geq 0} a_n z^n|| = \max_n |a_n|$. On peut remarquer que si $u \in C < z >$, on a $||u|| = \max_{z\in C^0} |u(z)|$ (c'est le principe du maximum !). On écrit, comme il est naturel

$$\{u \in C < z > \ / \ ||u|| \leq 1\} = C^0 < z > \ ,$$

$$\{u \in C < z > \ / \ ||u|| < 1\} = C^{00} < z > \ ,$$

2. Lorsque le corps de base est localement compact, ce qui est le cas de K_∞, la démonstration de ce fait est la même que lorsque le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le résultat est encore vrai pour les corps non archimédiens complets non localement compact.

$C^{00} < z >$ est un idéal de $C^0 < z >$ et l'on aun isomorphisme canonique

$$C^0 < z > /C^{00} < z > \simeq \overline{C}[z] \ .$$

Lemme 5.2. *(division enclidienne) Soit $g \in C^0 < z >$, $g \notin C^{00} < z >$ dont l'image $\overline{g}$ dans $\overline{C}[z]$ est un polynôme de degré $d > 0$. Soit $f \in C < z >$, alors il existe $q \in C < z >$ et $r \in C[z]$ tels que $f = gq + r$ et $||f|| = \max(||q||, ||r||)$, de plus le couple (q, r) est unique pour ces propriétés.*

Il suit que $C < z >$ est un anneau principal.

Démonstration. Soit $g_1 \in C[z]$ de degré d tel que $\overline{g_1} = \overline{g}$. On peut supposer $||f|| = 1$, on écrit $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $z^n = g_1 q_{1,n} + r_{1,n}$ (division enclidienne dans $C^0[z]$), il vient par sommation sur n

$$f = g_1 \sum_{n\geq 0} a_n q_{1,n} + \sum_{n\geq 0} a_n r_{1,n} \ ,$$

donc en posant $q_1 = \sum_{n\geq 0} a_n q_{1,n}$, $r_1 = \sum_{n\geq 0} a_n r_{1,n}$ et $g = g_1 + h$ avec $||h|| < 1$, il vient

$$f = gq_1 + r_1 - hq_1 \text{ avec } ||-hq_1|| \leq ||h|| \text{ et } ||r_1|| \leq 1 \ .$$

On recommence alors avec $f_1 = -hq_1$, on construit ainsi des suites(f_n), (q_n) et (r_n) telles que

$$f_n = gq_n + r_n - hq_n \text{ avec } ||-hq_n|| \leq ||h||^n \text{ et } ||r_n|| \leq ||h||^{n-1} \ ,$$

on en déduit l'existence du couple (q, r), le reste du lemme est facile. □

Ce lemme permet de définir la notion de zéro d'une fonction analytique sur un disque de C, à translation et homothétie près il suffit de le faire pour les éléments de $C < z >$. Soit $f \in C < z >$, on dit que $z_0 \in C^0$ est un zéro d'ordre au moins $n > 0$ de f si $(z - z_0)^n$ divise f dans $C < z >$ (on peut remarquer que si $|z_0| > 1$, alors $z - z_0 \in C < z >^\times$). On pourrait ici aussi,comme on en a l'habitude, définir l'ordre d'un zéro à l'aide des dérivations. L'anneau $C < z >$ est principal, donc factoriel et les $z - z_0$, $z_0 \in C^0$, sont des éléments irréductibles, en particulier un élément f de $C < z >$, $f \neq 0$, ne peut-être divisible par une infinité d'entre eux (distincts ou non). Donc le nombre de zéro de $f \in C < z >$, $f \neq 0$, est fini.

Le lemme précédent montre aussi que les idéaux maximaux de $C < z >$ sont les $(z - z_0)$, $z_0 \in C^0$; en effet soit I un idéal de $C < z >$, il est principal, $I = (f)$ et la division enclidienne par f montre que $C[z]$ a pour image $C < z > /(f)$ par la surjection canonique $C < z > \to C < z > /(f)$.

Lemme 5.3. *Soit $f \in C^0 < z >$, $f \notin C^{00} < z >$, dont l'image $\overline{f}$ dans $\overline{C}[z]$ est un polynôme de degré $d > 0$. Alors il existe un polynôme $g \in C^0[z]$, de degré d, et $h \in C < z >^\times$ tels que $f = gh$.*

Il suit que les idéaux de $C < z >$, qui sont principaux, sont engendrés par des polynômes.

Démonstration. Soit $g(z) = \prod(z - z_0)$, où z_0 décrit les zéros de f, répétés autant de fois que leurs multiplicités l'exigent. On vérifie que si $z_0 \neq z_1$ sont dans C^0, alors $(z - z_0)^{n_0}$ et $(z - z_1)^{n_1}$ sont premiers entre eux, donc g divise f, on écrit $f = gh$ et l'on a aussi $||h|| = 1$, de plus h n'a pas de zéro. Comme h n'a pas de zéro, il n'est dans aucun idéal maximal, donc inversible. □

Montrons la partie (3) de la proposition. Soit $x \in C$, il faut montrer que $e_\Lambda(z) - x$ admet un zéro, mais ceci est vrai pour toute fonction analytique sur C qui possède un zéro, par exemple qui s'annule en 0, en effet soient f une telle fonction, qui s'annule en 0, $x \in C$ et $R > 0$ tel que $||f(z) - x||_{D(0,R)} > |x|$; sur $D(0, R)$ on peut écrire $f(z) - x = gh$ où g est un polynôme et h inversible, et g n'est pas le polynôme constant car $||f(z) - x||_{D(0,R)} > |x|$ (ici on a appliqué lemme 5.3, à homothétie et translation près). □

Les réseaux de C de rang r forment une catégorie, notée $\mathcal{L}_r$, $\mathrm{Hom}(\Lambda, \Lambda')$ étant le sous-groupe additif de C formé par les constantes c telles que $c\Lambda \subset \Lambda'$.

Soient Λ un réseau de C et $a \in A$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \Lambda & \hookrightarrow & C & \stackrel{e_\Lambda}{\rightarrow} & C & \rightarrow & 0 \\ & & \times a \downarrow & & \times a \downarrow & & ? \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Lambda & \hookrightarrow & C & \stackrel{e_\Lambda}{\rightarrow} & C & \rightarrow & 0 \end{array}$$

le point d'interrogation signalant que l'on définit ainsi une flèche ϕ_a^Λ rendant ce diagramme commutatif. Par définition, on a pour tout $z \in C$

$$\phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(az) \ .$$

Il résulte de cette définition que si $a \neq 0$ le noyau de ϕ_a^Λ est

$$\mathrm{Ker}\phi_a^\Lambda = e_\Lambda(\frac{1}{a}\Lambda) \simeq \frac{\frac{1}{a}\Lambda}{\Lambda} \ ,$$

en particulier c'est un ensemble fini.

Théorème 5.4. *L'application $\phi^\Lambda : a \mapsto \phi_a^\Lambda$ est un module de Drinfeld sur C de rang le rang de Λ ; $\Lambda \mapsto \phi^\Lambda$ est un isomorphisme de catégories entre celle $\mathcal{L}_r$ des réseaux de rang r de C et celle des modules de Drinfeld de rang r sur C.*

Démonstration. Montrons que ϕ^Λ est un module de Drinfeld de rang $r = rg\Lambda$. Le fait que ce soit un homomorphisme résulte de la définition, il reste à prouver que $\phi_a^\Lambda(z)$ est analytique : on peut supposer $a \neq 0$, ce sera alors un polynôme avec le bon degré, puisque ses zéros sont en nombre fini, égal à $q^{r \deg a}$, comme il a été précisé plus haut. Précisons cette dernière assertion, soit F une fonction analytique sur C n'ayant qu'un nombre fini de zéros, par exemple tous dans C^0 (ce qui est vrai à translation et homothétie près), on voit que sur $C^0 = D(0,1)$, où ce qui revient au même dans $C^0 < z >$, la fonction F s'écrit $F = P(1 + zh)$, où P est un polynôme et $h \in C^0 < z >$ vérifie $||h|| < 1$ et il résulte des arguments de la fin de la démonstration de la proposition précédente que $z \mapsto zh$ est surjectif sur C si $h \neq 0$, donc F est un polynôme.

On a

$$\phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(az) = az \prod_{\mu \in \Lambda/a\Lambda} \left(\prod_{\lambda \in \Lambda, \mu + a\lambda \neq 0} \left(1 - \frac{az}{\mu + a\lambda}\right)\right)$$

et si λ est non nul

$$1 - \frac{az}{\mu + a\lambda} = \left(1 + \frac{\mu/a}{\lambda}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z - \mu}{\lambda}\right) \ ,$$

finalement

$$\phi_a^\Lambda(e_\Lambda(z)) = C^{ste} \prod_{\mu \in \Lambda/a\Lambda} (e_\Lambda(z) - e_\Lambda(\mu/a)) \ .$$

Soit ϕ un module de Drinfeld sur C de rang r, montrons qu'il existe un unique réseau Λ de C tel que $\phi = \phi^\Lambda$. On procède ainsi : on montre que ϕ détermine de manière unique une fonction analytique $\mathbb{F}_q$-linéaire e telle que, pour tout $a \in A$, $\phi_a(e(z)) = \phi(az)$; on pose alors $\Lambda = \mathrm{Ker}\ e$ et Λ est discret car e est analytique. On commence par montrer formellement l'existence de e. On écrit $e(z) = \sum_{i \geq 0} e_i z^{q^i}$ et pour $a \notin \mathbb{F}_q$, $\phi_a(z) = az + a_1 z^q + \cdots + a_s z^{q^s}$ avec $s = r \deg a$. La relation $\phi_a(e(a^{-1}z)) = e(z)$ donne pour tout $n \geq 0$

$$e_n = (a^{q^n} - a)^{-1} \sum_{1 \leq i \leq s} a_i e_{n-i}^{q^i} \tag{5}$$

(les a_j avec $j < 0$ étant nuls). Ceci prouve l'existence formelle et l'unicité de e, mais il faut monter que e ne dépend pas du choix de a. On a pour $b \notin \mathbb{F}_q$

$$\phi_b(e(b^{-1}z)) = \phi_b(\phi_a(e(a^{-1}b^{-1}z))) = \phi_a(\phi_b(e(b^{-1}a^{-1}z)))$$

donc, par la relation formelle définissant $e(z)$

$$\phi_b(e(b^{-1}z)) = \phi_a\left(\phi_b(e(b^{-1}a^{-1}z))\right)$$

par suite $\phi_b(e(b^{-1}z)) = e(z)$.

Montrons que la série définissant e converge sur tout C. On choisit a tel que $|a| > 1$ soit suffisamment grand. Il suit de la formule (5) qu'il existe une constante réelle $\delta > 0$, ne dépendant que des coefficients de ϕ_a, telle que, pour tout $n > s = rdega$

$$|e_n|^{q^{-n}} \leq |a|^{-1}\delta^{q^{-n}} \max_{1\leq i\leq s} |e_{n-i}|^{q^{-(n-i)}} ,$$

qui donne par itération et majoration $|e_n|^{q^{-n}} \leq |a|^{-n}\delta^{\frac{q}{q-1}}$, d'où la convergence.

Lemme 5.5. *Soient Λ' et Λ deux réseaux de C de même rang r, soit H un sous-A-module fini de C. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe une isogénie $u : \phi^{\Lambda'} \to \phi^{\Lambda}$ de noyau isomorphe à H,*

(2) *il existe $c \in C^\times$ tel que $\Lambda/c\Lambda' \simeq H$.*

Démonstration. Supposons que (2) est vraie. Soient $H_1 = e_{c\Lambda'}(\Lambda) \simeq \Lambda/c\Lambda'$ et $e_{H_1} = z\prod_{\lambda\in H_1,\lambda\neq 0}(1 - z/\lambda)$. On a $e_\Lambda(z) = e_{H_1}(e_{c\Lambda'}(z))$. Soit $u(z) = e_{H_1}(cz)$, montrons que $u(\phi_a^{\Lambda'}(z)) = \phi_a^{\Lambda}(u(z))$. On a pour $a \in A$

$$u(\phi_a^{\Lambda'}(e_{\Lambda'}(z))) = u(e_{\Lambda'}(az)) = e_{H_1}(ce_{\Lambda'}(az)) = e_{H_1}(e_{c\Lambda'}(acz))$$

car $ce_{\Lambda'}(z) = e_{c\Lambda'}(cz)$, finalement

$$u(\phi_a^{\Lambda'}(e_{\Lambda'}(z))) = e_\Lambda(acz) = \phi_a^{\Lambda}(e_\Lambda(cz))$$

et il ne reste plus qu'à remarquer que $e_\Lambda(cz) = e_{H_1}(ce_{\Lambda'}(z))$.

Supposons maintenant que (1) est vraie. Comme l'on est sur C l'isogénie est séparable, c'est à dire qu'elle s'écrit $u(z) = c_0z + c_1z^q + c_2z^{q^2} + \cdots$ avec $c \in C^\times$. Remarquons que l'on a, avec une notation précédemment introduite, $u(z) = ce_H(z)$ pour un $c \in C^\times$. Soit $\Lambda'' = e_{\Lambda'}^{-1}(H)$, c'est un réseau de C de rang r et l'on a $e_{\Lambda''}(z) = e_H(e_{\Lambda'}(z))$. On a

$$\phi_a^{\Lambda}(e_{c\Lambda''}(cz)) = \phi_a^{\Lambda}(ce_{\Lambda''}(z)) = \phi_a^{\Lambda}(ce_H(e_{\Lambda'}(z))) = \phi_a^{\Lambda}(u(e_{\Lambda'}(z)))$$

donc

$$\phi_a^{\Lambda}(e_{c\Lambda''}(cz)) = u(\phi_a^{\Lambda'}(e_{\Lambda'}(z))) = u(e_{\Lambda'}(az)) = ce_{\Lambda''}(az) = e_{c\Lambda''}(acz) ,$$

finalement $\phi_a^{\Lambda} = \phi_a^{c\Lambda''}$, donc $\Lambda = c\Lambda''$. On a $\Lambda' \subset \Lambda''$ et

$$\frac{\Lambda}{c\Lambda'} \simeq \frac{c\Lambda''}{c\Lambda'} \simeq \frac{\Lambda''}{\Lambda'} \simeq H .$$

□

Ceci termine la démonstration du théorème. □

5.2. **Le demi-plan algébrique (1).** Rappelons que K_∞ est le complété de K à la place infinie. Soit

$$\Omega = C - K_\infty = \mathbb{P}^1_C(C) - \mathbb{P}^1_C(K_\infty)\ ,$$

Ω s'appelle le demi-plan algébrique, ou de Drinfeld. On montrera plus loin qu'il possède une structure analytique rigide et qu'il est fortement relié à l'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$; ses quotients jouent un grand rôle dans la connaissance de certaines représentations de rang 2 du groupe de Galois absolu de K.

Soit $x \in \Omega$, alors $\Lambda = A + Ax$ est un réseau de C de rang 2, en effet si 0 était adhérent à Λ il existerait alors une suite d'éléments de K tendant vers x, donc ce dernier serait dans K_∞.

Soit Λ un réseau de C de rang 2. Ecrivons $\Lambda = Ax_1 \oplus Ax_2$, les autres A-bases de Λ s'en déduisent par l'action de $\mathrm{GL}_2(A)$: si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$, le changement de base sous l'action de γ est donné par $(x_1, x_2) \mapsto (cx_2 + dx_1, ax_2 + bx_1)$; on a

$$\Lambda = x_1\left(A \oplus A\frac{x_2}{x_1}\right) = (cx_2 + dx_1)\left(A \oplus A\frac{a\frac{x_2}{x_1} + b}{c\frac{x_2}{x_1} + d}\right)\ .$$

Conclusion. On muni Ω de l'action suivante de $\mathrm{GL}_2(K)$: si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ et $\omega \in \Omega$, on a $\gamma(\omega) = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$, alors on a les bijections suivantes

$$\mathrm{GL}_2(A)\backslash\Omega \leftrightarrows \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'homothétie}\\ \text{des réseaux de rang 2}\end{array}\right\} \leftrightarrows \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isomorphismes}\\ \text{des modules de Drinfeld}\\ \text{de rang 2 sur } C\end{array}\right\}$$

la dernière bijection résultant du théorème 5.4.

Soient N un élément de A non nul et ϕ un module de Drinfeld de rang 2 sur C, la donnée d'une structure de niveau N sur ϕ et celle d'un isomorphisme de A-modules ${}_N\phi \xrightarrow{\sim} (A/NA)^2$ ([3]). Soit Λ le réseau de C tel que $\phi = \phi^\Lambda$. La relation $\phi^\Lambda_N(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(Nz)$ montre que ${}_N\phi = e_\Lambda^{-1}(N^{-1}\Lambda) \simeq N^{-1}\Lambda/\Lambda$, donc une structure de niveau N devient un isomorphisme $N^{-1}\Lambda/\Lambda \xrightarrow{\sim} (A/NA)^2$. Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ agissant sur Λ comme il a été dit au dessus, on voit que γ ne modifie pas une structure de niveau N sur ϕ^Λ si et seulement si $\gamma \equiv 1 \bmod. N$, i.e. γ est dans le noyau, noté $\Gamma(N)$, du morphisme canonique $\mathrm{GL}_2(A) \to$

3. Cette notion peut être définie pour tout rang et pour tout A-anneau, mais dans ce dernier cas il faut alors parler d'isomorphisme de schémas groupes.

$\mathrm{GL}_2(A/NA)$. On voit donc que l'on a les bijections suivantes

$$\Gamma(N)\backslash\Omega \leftrightarrows \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'homothétie}\\ \text{des réseaux de rang 2}\\ \text{munis de structures}\\ \text{de niveau } N\end{array}\right\} \leftrightarrows \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isomorphismes}\\ \text{des modules de Drinfeld}\\ \text{de rang 2 sur } C\\ \text{munis de structures}\\ \text{de niveau } N\end{array}\right\}$$

On peut aussi examiner les classes d'isomorphismes des couples (ϕ, H) ou ϕ est un module de Drinfeld de rang 2 sur C et H un sous-groupe de ${}_N\phi$ d'ordre $\deg N$; soit $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe des éléments $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ $\mathrm{GL}_2(A)$ tels que $c \equiv 0 \bmod. N$; alors

$$\Gamma_0(N)\backslash\Omega \leftrightarrows \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'homothétie}\\ \text{des couples } (\Lambda, H)\\ \text{où } \Lambda \text{ est un réseau}\\ \text{de rang 2 et } H\\ \text{un sous-groupe de}\\ \Lambda/N\Lambda \text{ d'ordre } \deg N\end{array}\right\} \leftrightarrows \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isomorphismes}\\ \text{des couples } (\phi, H)\\ \text{où } \phi \text{ est un module}\\ \text{de Drinfeld de rang 2}\\ \text{et } H \text{ un sous-groupe}\\ \text{de } {}_N\phi \text{ d'ordre } \deg N\end{array}\right\}$$

Le groupe $\Gamma(N)$ s'appelle un groupe de congruence de Hecke, c'est un groupe arithmétique. *Un sous groupe* Γ *de* $\mathrm{GL}_2(K)$ (ce dernier identifié avec les automorphismes linéaires de K^2) *est dit arithmétique* s'il existe un sous-A-module M discret (pour la topologie de C) de rang 2 de K^2 (i.e. un réseau de K^2) et $N \in A$ non nul, tels que, si $\Gamma(N, M)$ désigne le noyau du morphisme canonique $\mathrm{GL}(M) \to \mathrm{GL}(M/(NM))$, l'on ait $\Gamma(N, M) \subset \Gamma \subset \mathrm{GL}(M)$ et que ces inclusions soient entre groupes et sous-groupes. Ainsi $\mathrm{GL}_2(A)$ et $\Gamma_0(N)$ sont aussi des groupes arithmétiques.

5.3. **Exemples d'algébrisation.** Il est assez facile de montre que les quotients précédents de Ω sont des courbes algébriques affines, nous le faisons pour les deux premiers.

Un module de Drinfeld sur C de rang 2 est donné par $\phi_T = T + X_1\tau + X_2\tau^2$, on a $X_2 \neq 0$ et sa classe d'isomorphisme est caractérisée par $\frac{X_1^{q+1}}{X_2}$; soit donc $\mathrm{Proj}C[X_1, X_2]$, où X_1 et X_2 sont des éléments homogènes de degrés respectivement $q-1$ et q^2-1, alors

$$\mathrm{GL}_2(A)\backslash\Omega \leftrightarrows \mathrm{Spec}C\left[\frac{X_1^{q+1}}{X_2}\right] = D_+(X_2) \subset \mathrm{Proj}C[X_1, X_2]\ .$$

Soit ϕ un module de Drinfeld sur C de rang 2, il est donné par $\phi_T = T + X_1\tau + X_2\tau^2$, on pose

$$\phi_N = N + P_1(X_1, X_2)\tau + \cdots + P_{2\deg N}(X_1, X_2)\tau^{2\deg N}$$

et il est facile de vérifier que les $P_i(X_1, X_2)$ sont des polynômes homogènes de degrés $q^i - 1$. Soit Y une indéterminée de degré q, soient $d_i = q^i(q^{2\deg N - i} - 1)(q-1)^{-1}$, $0 \leq i \leq 2\deg N$, alors le polynôme

$$F(Y) = NX_2^{d_0} + P_1(X_1,X_2)X_2^{d_1}Y^{q-1} + \cdots + P_i(X_1,X_2)X_2^{d_i}Y^{q^i-1} + \\ \cdots + P_{2\deg N}(X_1,X_2)X_2^{d_{2\deg N}}Y^{q^{2\deg N}-1}$$

est homogène de degré $(q^{2\deg N} - 1)(q+1)$. Soit la variété projective

$$\mathcal{P} = \operatorname{Proj}\left(\frac{C\left[X_1, X_2, (Y_\alpha)_{\alpha\in(A/NA)^2}\right]}{\left(R, (F(Y_\alpha))_{\alpha\in(A/NA)^2}\right)}\right),$$

où X_1, X_2 et Y_α sont des éléments homogènes de degrés respectivement $q-1$, q^2-1 et q, où R est l'ensemble des relations qui fait de $\{Y_\alpha \,/\, \alpha \in (A/NA)^2\}$ un A-module isomorphe à $(A/NA)^2$, donc $R = \{Y_{\alpha+\beta} - (Y_\alpha + Y_\beta), \phi_T(Y_\alpha) - Y_{T\alpha}; \alpha, \beta \in (A/NA)^2\}$, on écrit

$$\mathcal{P} = \operatorname{Proj} C\left[x_1, x_2, (y_\alpha)_{\alpha\in(A/NA)^2}\right],$$

on a $\Gamma(N)\backslash\Omega \leftrightarrows D_+(x_2) \subset \mathcal{P}$, plus précisément

$$\Gamma(N)\backslash\Omega \leftrightarrows \operatorname{Spec} C\left[\frac{x_1^{q+1}}{x_2}, \left(\frac{y_\alpha^{q^2-1}}{x_2^q}\right)_{\alpha\in(A/NA)^2}, \left(\frac{x_1 y_\alpha^{q-1}}{x_2}\right)_{\alpha\in(A/NA)^2}\right].$$

5.4. **Modules de Drinfeld sur une base schématique.** Ces exemples d'espaces modulaires de modules de Drinfeld sont l'occasion de dire quelques mots de leur définition sur une base schématique et des foncteurs qu'il en résulte. Pour ce paragraphe les références sont [10], [9], et [43], cette dernière étant la plus détaillée.

Dans ce paragraphe la courbe $\mathcal{C}$ n'est plus supposée être la droite $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$, c'est une courbe projective, lisse et géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$, de corps des fonctions K, la notation ∞ désigne un point fermé de $\mathcal{C}$, non nécessairement rationnel sur $\mathbb{F}_q$, $A = \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathcal{C} - \{\infty\})$; rappelons que si $a \in A$, $a \neq 0$, on définit $\deg a$ par la fomule $\sharp(A/aA) = q^{\deg a}$.

Définition 5.6. *Soient S un schéma et $r > 0$ un entier. Un module de Drinfeld de rang r sur S est la donnée d'un fibré en droites et d'un morphisme d'anneau $\phi \to \operatorname{End}_S(L)$ tel que, localement sur un ouvert U sur lesquel L est trivial, ϕ soit de la forme*

$$\phi : a \mapsto \phi_a = \sum_{1\leq i\leq m} a_i\tau^i$$

avec $a_i \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(U)$, $m = r\deg a$ et $a_m \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(U)^\times$.

Un tel module de Drinfeld sera noté (L,ϕ) ou $(L,\phi)_{/S}$.

Le recollement des applications $a \mapsto a_0$ définit un morphisme $\gamma : A \to \mathcal{O}_\mathcal{C}$ appelé le morphisme caractéristique.

Ici un fibré en droite doit être vu comme un schéma, pas comme un faisceau inversible. Soit L un fibré en droites sur S, soit U un ouvert de S sur lequel L est trivial, on a

$$L|U \simeq_U \mathbb{A}^1_U = U \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[X] \ .$$

Soit L un schéma, le faisceau $\mathcal{K}_L$ sur L est associé au préfaisceau qui à tout ouvert affine U associe l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_L(U)$. Un diviseur de Cartier sur L est une section globale du faisceau $\mathcal{K}_L^\times/\mathcal{O}_L^\times$.

Soient (L, ϕ) un module de Drinfeld de rang r sur le schéma S et I un idéal non nul de A, on pose

$${}_I\phi = \bigcap_{a \in I} \mathrm{Ker}(L \stackrel{\phi_a}{\to} L) \ ,$$

on peut montrer, en particulier par des calculs voisins de ceux qui ont été déjà faits, que ${}_I\phi$ est un groupe algébrique fini et plat, de rang égal à $\sharp(A/I)^r$; si $\gamma^\sharp(S) \cap V(I) = \emptyset$ (γ est le morphisme caractéristique, $V(I)$ est le fermé de $\mathrm{Spec}A$ défini par I) alors ${}_I\phi$ est étale sur S et, localement pour la topologie étale, isomorphe au faisceau constant $(I^{-1}/A)^r$ sur S.

Définition 5.7. *Soient (L, ϕ) un module de Drinfekld de rang r sur le schéma S et I un idéal non nul de A, une structure de niveau I sur (L, ϕ) est la donnée d'un morphisme A-linéaire*

$$\ell : (I^{-1}/A)^r \to L(S) := Mor_S(S, L) \ ,$$

(ce dernier étant muni de la structure de A-module donnée par ϕ) induisant l'égalité entre diviseurs de Cartier

$${}_I\phi = \sum_{\alpha \in I^{-1}/A)^r} (\ell(\alpha)) \ .$$

Théorème 5.8. *Drinfeld,* [10]. *Soient $r > 0$ un entier et I un idéal de A tel que $\sharp V(I) \geq 2$. Alors le foncteur de la catégorie des schémas dans celle des ensembles, qui à un schéma S associe les classes d'isomorphisme des couples $(\ell, (L, \phi))$, où (L, ϕ) est un module de Drinfeld de rang r sur S muni de la structure de niveau ℓ, est représentable par un schéma $M_r(I)$ affine sur A, de type fini, de dimension $r - 1$ sur* $\mathrm{Spec}A$ *et $M_r(I) \to \mathrm{Spec}A$ est lisse en dehors $V(I)$.*

Démonstration. On ne donne qu'une légère idée de la preuve, tous les détails se trouvent dans [43]. Soit $\mathfrak{p} \in V(I)$, un élément non nul de $(\mathfrak{p}^{-1}/A)^r$, par ℓ, vu comme un diviseur de Cartier, définit une trivialisation de L ; sur chacun de des ouverts de cette trivialisation ϕ est donné par les coordonnées des ϕ_a, $a \in A$, avec des relations venant de

1 : $\phi_a\phi_b = \phi_b\phi_a$, pour $a, b \in A$,

2 : le coefficient du terme de plus haut degré de ϕ_a est inversible, pour $a \in A, a \neq 0$,

3 : $\phi_a(\ell(i)) = 0$ si $a \in I$,

4 : etc.

Ces relations sont de nature affine. Il faut remarquer que la troisième relation est non vide car $V(I)$ a au moins deux éléments, c'est elle qui rigidifie et rend le foncteur représentable. □

6. Le point de vue adèlique.

Soit $(G_t)_{t\in\mathcal{T}}$ une famille de groupes topologiques, pour presque tout $t \in \mathcal{T}$ (i.e. sauf pour un nombre fini de t) soit O_t un sous groupe ouvert de G_t, soit G l'ensemble des $(x_t) \in \prod_{t\in\mathcal{T}} G_t$ tels que $x_t \in O_t$ pour presque tout t. On munit G de la topologie dont une base d'ouverts de $1 = (1_t)_{t\in\mathcal{T}}$ est formée par les $\prod_{t\in\mathcal{T}} U_t$ où U_t est un ouvert de G_t égal à O_t pour presque tout t. Muni de cette topologie le groupe G s'appelle le *produit restreint des G_t, relativement aux sous-groupes O_t, $t \in \mathcal{T}$.*

Dans ce paragraphe nous noterons K_v le complété de K pour la topologie v-adique, $\mathcal{O}_v$ l'anneau de valuation de K_v, ϖ_v une uniformisante de K_v, que l'on supposera toujours dans K et qui sera un élément premier de A chaque fois que cela sera possible, le corps des restes de K_v sera noté $\mathbb{F}_q(v)$ou encore $\mathbb{F}_{q_v}$. On supposera que la valuation v vérifie $v(\varpi_v) = 1$ et que la valeur absolue correspondante est normalisée par $|\varpi_v|_v = q_v^{-1}$.

L'anneau des adèles de K, noté $\mathbb{A}_K$, est le produit infini restreint des $(K_v, +)$ relativement aux sous-groupes $\mathcal{O}_v$, où v décrit l'ensemble des valuations de K. On constate que c'est en fait un anneau topologique. Le produit infini restreint des $\mathrm{GL}_n(K_v)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(K_v)$) relativement aux sous-groupes $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_v)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_v)$), où v décrit l'ensemble des valuations de K, s'appelle le groupe des adèles de $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp. de $\mathrm{SL}_n(K)$) et se note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_K)$) ; cette notation est trompeuse, en particulier il faut remarquer que $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_K)$, noté aussi $\mathbb{A}_K^\times$ et appelé le groupe des idèles de $K^\times$, est ensemblistement un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{A}_K$, mais cette inclusion n'est pas topologique, par exemple la suite $x^{v_0} = (x_v^{v_0})$, définie par $x_{v_0}^{v_0} = \varpi_{v_0}$ et $x_v^{v_0} = 1$ si $v \neq v_0$, converge vers 1 dans l'anneau $\mathbb{A}_K$ des adèles mais ne converge pas dans le groupe $\mathbb{A}_K^\times$ des idèles.

Le corps K se plonge diagonalement dans $\mathbb{A}_K$, de même pour $\mathrm{GL}_n(K)$ (resp.$\mathrm{SL}_n(K)$) dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ (resp. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A}_K)$). Chaque complété K_v

se plonge sur sa coordonnée dans $\mathbb{A}_K$, de même pour les $\mathrm{GL}_n(K_v)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$. Soit $\mathbb{A}_f$ *l'anneau des adèles finis de* K, c'est à dire le produit restreint des K_v relativement aux sous-groupes $\mathcal{O}_v$, où v décrit l'ensemble des valuations de K distinctes de l'∞, on définit de même $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$; $\mathbb{A}_f$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ se plongent naturellement dans $\mathbb{A}_K$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ respectivement. On pose $\mathcal{O} = \prod_v \mathcal{O}_v$, $\mathcal{O}_f = \prod_{v\neq\infty} \mathcal{O}_v$ et $G = \mathrm{GL}_2$ pour simplifier les notations, on note Z le centre de $G = \mathrm{GL}_2$.

Théorème 6.1. (1) *Le corps K est discret dans $\mathbb{A}_K$, le quotient $\mathbb{A}_K/K$ est compact.*

(2) *Pour tout ensemble fini non vide de places de K, $K\prod_{v\in S} K_v$ est dense dans $\mathbb{A}_K$.*

Le fait que K soit discret dans $\mathbb{A}_K$ vient de la formule du produit : pour tout $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, $\prod |\lambda|_v = 1$ (le produit se faisant sur toutes les valuations de K). La suite du théorème se trouve montrée dans [7], §14 et 15, la deuxième partie s'appelle *le théorème d'approximation forte pour* $\mathbb{A}_K$, op. cit. §15.

Théorème 6.2. (1) *Le groupe $G(K)$ est discret dans $G(\mathbb{A}_K)$, de même pour $\mathrm{SL}_2(K)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_K)$, les ensembles quotients $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)$ et $\mathrm{SL}_2(K)\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_K)$ sont compacts.*

(2) *Pour tout ensemble fini non vide S de places de K, le groupe $\mathrm{SL}_2(K)\prod_{v\in S}\mathrm{SL}_2(K_v)$ est dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_K)$.*

Démonstration. (1) Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(K)$ tel que $\gamma \in \prod_v U_v$ avec $U_{v_i} = (1 + \varpi^{n_i} M_2(\mathcal{O}_{v_i})) \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{v_i})$, $n_i > 0$, $i = 1, \cdots, r$ et $U_v = \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_v)$ pour $v \neq v_i$. On écrit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et l'on voit que les coefficients de γ sont dans $\mathcal{O}_v$ pour tout v, a et d proches de 1, b et c de 0, pour un nombre fini de v, donc $\gamma = 1$.

Ici aussi la deuxième partie porte le nom *d'approximation forte*, pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_K)$, c'est un résultat difficile, voir [38] (mais simple, par contre long dans notre cas et lorsque $K = \mathbb{F}_q(T)$ et $S = \{\infty\}$). □

6.1. **Doubles classes.**

Lemme 6.3. *L'ensemble des doubles classes*

$$G(K)\backslash G(\mathbb{A}_f)/G(\mathcal{O}_f)$$

représente les classes d'isomorphismes des A-modules projectifs de rang 2, donc en fait les classes d'idéaux fractionnaires de A, comme dans notre situation A est principal, cet ensemble est réduit à un point.

Démonstration. En général, lorsque la courbe $\mathcal{C}$ de corps des fonctions K est de genre au moins 1, ce nombre de classes est fini et plus grand que 1.

On fixe des plongements $K \hookrightarrow K_v$ pour tout v, qui donnent $K^2 \hookrightarrow K_v^2$ et l'on fait les identifications $\mathrm{GL}(K^2) = G(K)$, $\mathrm{GL}(K_v^2) = G(K_v)$. Soient M un A-module projectif de rang 2 (en fait ici libre), que l'on plonge dans K^2 par un isomorphisme $M \otimes_A K \simeq K^2$, qui donc est défini mod. $\mathrm{GL}_2(K)$; compte tenu des choix précédents $M_v = M \otimes \mathcal{O}_v$ se plonge dans K_v^2 et s'écrit alors $M_v = \mathcal{O}^2\gamma_v^{-1}$ pour un $\gamma_v \in G(K_v)$ et $\gamma_v \in G(\mathcal{O}_v)$ pour presque tous v. La bijection se fait par $M \mapsto (\gamma_v)_v$. $\square$

Corollaire 6.4. *Soit $\mathcal{K}_f$ un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$, alors l'ensemble*

$$G(K)\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$$

est fini.

Démonstration. Le groupe $\mathcal{K}_f \cap G(\mathcal{O}_f)$ est ouvert, donc d'indice fini dans $G(\mathcal{O}_f)$. $\square$

Théorème 6.5. *Soient $\mathcal{K}_f$ un sous-groupe ouvert-compact de $G(\mathbb{A}_f)$, $X \subset G(\mathbb{A}_f)$ un système de représentants de $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$ et, pour tout $\underline{x} \in X$,*

$$\Gamma_{\underline{x}} = \underline{x}\mathcal{K}_f\underline{x}^{-1} \cap G(K) \ ,$$

alors les $\Gamma_{\underline{x}}$ sont des groupes arithmétiques et l'on a une bijection

$$G(K)\backslash\left(G(\mathbb{A}_f) \times \Omega\right)/(\mathcal{K}_f \times \{1\}) \leftrightarrows \coprod_{\underline{x}\in X} \Gamma_{\underline{x}}\backslash\Omega$$

(où Ω est le demi-plan algébrique).

Démonstration. Un élément de $G(K)\backslash\left(G(\mathbb{A}_f) \times \Omega\right)/\mathcal{K}_f \times \{1\}$ s'écrit $\gamma(\underline{x},\omega)(\underline{k}_f,1)$ où $\gamma \in G(K)$, $\underline{x} \in X$, $\omega \in \Omega$, $\underline{k}_f \in \mathcal{K}_f$ et où seul $\underline{x}$ est déterminé de manière unique ; la relation $\gamma(\underline{x},\omega)(\underline{k}_f,1) = (\underline{x},\omega')(1,1)$ montre que $\gamma \in \underline{x}\mathcal{K}_f\underline{x}^{-1}$. Ceci donne la bijection.

Il reste à monter que les $\Gamma_{\underline{x}}$ sont des groupes arithmétiques. Soit $\underline{x} \in X$, soit $M(\underline{x}) = \mathcal{O}_f^2\underline{x}^{-1} \cap K^2$ dans $\mathbb{A}_f^2$. Soient $v_1, \cdots, v_r$ les places finies de K telle que $\underline{x}^{-1} \notin \mathcal{O}_{v_i}$, soit $a \in A$, $a \neq 0$, tel que $\mathcal{O}_{v_i}^2 a \subset \mathcal{O}_{v_i}^2\underline{x}^{-1} \subset \mathcal{O}_{v_i}^2(1/a)$ pour tout i, on a

$$A^2a \subset \mathcal{O}_f^2 a \cap K^2 \subset \mathcal{O}_f^2\underline{x}^{-1} \cap K^2 = M(\underline{x}) \subset \mathcal{O}_f^2(1/a) \cap K^2 = A^2(1/a) \ ,$$

ce qui prouve que $M(\underline{x})$ est un A-module projectif de rang 2. Le groupe $\Gamma_{\underline{x}}$ opère sur $M(\underline{x})$, par $(\gamma, m) \mapsto m\gamma^{-1}$, où $\gamma \in \Gamma_{\underline{x}}$ et $m \in M(\underline{x})$; donc $\Gamma_{\underline{x}} \subset \mathrm{GL}(M_{\underline{x}})$. Il existe un ouvert de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ de la forme

$(1 + bM_2(\mathcal{O}_f)) \cap \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_f)$,où $b \in A$, qui est inclus dans $\underline{x}\mathcal{K}_f\underline{x}^{-1}$, alors $\Gamma(b, M) \subset \Gamma_{\underline{x}}$. $\square$

Nous avons déjà vu deux exemples où les quotients de Ω par des groupes arithmétiques sont des courbes algébriques, nous généraliserons ceci, d'abord en montrant que ces quotients sont des espaces analytiques rigides. Le demi-plan algébrique Ω joue le rôle du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ de la situation classique, i.e. lorsque corps de base est $\mathbb{Q}$; on sait que $\mathbb{H}$ est l'orbite de i sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, donc que $\mathbb{H} \leftrightarrows \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et l'on peut porter ceci dans l'analogue de la formule du théorème 6.5 pour obtenir à gauche un espace de définition des formes automorphes (cf [17], ch. 3 et 4). Dans notre situation cela ne se passe pas ainsi car l'on n'a pas une description semblable de Ω ; soit I_∞ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(K_\infty)$, c'est à dire que I_∞ est l'ensemble des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathcal{O}_\infty)$ tels que $c \in \varpi_\infty\mathcal{O}_\infty$, le théorème 6.5 est encore vrai en remplaçant Ω par le quotient $G(K_\infty)/(I_\infty Z(K_\infty))$, mais qui alors représente l'ensemble des arêtes de l'arbre de Bruhat-Tits de $G(K_\infty)$, non par Ω, mais on reliera cet arbre et Ω grâce à sa réduction analytique lorsque nous lui aurons défini sa structure analytique rigide. La même démonstration qu'en 6.5 donne

Théorème 6.6. *Soient $\mathcal{K}_f$ un sous-groupe ouvert-compact de $G(\mathbb{A}_f)$, $X \subset G(\mathbb{A}_f)$ un système de représentants de $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$ et, pour tout $\underline{x} \in X$,*

$$\Gamma_{\underline{x}} = \underline{x}\mathcal{K}_f\underline{x}^{-1} \cap G(K) \ ,$$

alors l'on a une bijection

$$G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)/\left(\mathcal{K}_f \times (I_\infty Z(K_\infty))\right) \leftrightarrows \coprod_{\underline{x}\in X} \Gamma_{\underline{x}}\backslash \left(G(K_\infty)/(I_\infty Z(K_\infty)\right) \ .$$

Dans cette formule l'espace de gauche est celui où sont définies les formes automorphes, qui se trouve donc relié à l'arbre de Bruhat-Tits, ceci sera détaillé plus loin.

Deuxième partie 2. Éléments de géométrie rigide.

Conformément aux habitudes en géométrie rigide, étant donné un corps L valué, v étant sa valuation, on note L_v son complété, L^0 son anneau de valuation, L^{00} son idéal de valuation et $\overline{L}$ son corps résiduel. Pendant tout ce chapitre, la lettre F désigne un corps valué, ou ce qui revient au même muni d'une valeur absolue ultramétrique, on suppose F complet pour cette valeur absolue, qui sera notée $|\cdot|$.

La géométrie rigide a démarrée avec un article de John Tate ([48]), qui a la particularité d'avoir été publié sans l'autorisation de son auteur [4]. Les ouvrages les plus intéressants pour notre sujet sont ceux de Gerrizen - van der Put ([20]), Fresnel - van der Put ([13]) et le résumé donné par Van Steen dans [1], lecture 6.

Rappelons que le demi-plan algébrique a pour définition $\Omega = \mathbb{P}^1_C(C) - \mathbb{P}^1_C(K_\infty)$ (où ∞ est la place $1/T$-adique). Notons $|\cdot|$ la valeur absolue et ϖ une uniformisante de K_∞, par exemple $\varpi = 1/T$, et soit

$$D = \{z \in \Omega \ / \ |\varpi| \leq |z| \leq 1 \ , \ |z-\lambda| \geq 1, |z-\varpi\lambda| \geq |\varpi| \ \forall \lambda \in \mathbb{F}_q^\times\}$$

(rappelons que $\mathbb{F}_q$ est égal au corps des restes de K_∞), D est donc la couronne de $\mathbb{P}^1_C(C)$ située entre les deux circonférences $|z| = 1$ et $|z| = |\varpi|$ de laquelle divers disques non circonférenciés ont été retirés, ces derniers étant dans les circonférences qui bordent cette couronne : la circonférence $|z| = 1$ peut être vue comme étant $(C^0)^\times$, on lui retire l'image inverse de $\mathbb{F}_q^\times$ par le morphisme $(C^0)^\times \to (\mathbb{F}^{\mathrm{alg}})_q^\times$ de la réduction modulo ϖ, une homothétie de rapport $|\varpi|$ explique ce qui se passe pour l'autre circonférence.

Pour tous $x \in K_\infty$ et $n \in \mathbb{Z}$ soit $D_{(n,x)} = x + \varpi^n D$, on vérifie que les $D_{(n,x)}$ s'ils se rencontrent sont soit égaux, soit le font suivant un de leurs bords, que $D_{(n,x)} = D_{(n',x')}$ si et seulement si $n = n'$ et $|x-x'| \leq |\varpi|^{n+1}$. On vérifie aussi que

$$\Omega = \bigcup_{x \in K_\infty, n \in \mathbb{Z}} D_{(n,x)} \ .$$

L'un des buts de ce qui suit sera de donner à D une structure d'espace analytique rigide ; on peut peut-être avoir l'intuition, du reste soutenue par l'idée de la décomposition de Mittag-Leffler des fonctions méromorphes, que les fonctions analytiques sur D sont les séries convergentes en les variables z, ϖ/z, $1/(z-\lambda)$ et $\varpi/(z-\varpi\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$. On va donner un sens à tout cela, ainsi que définir une réduction de cet

4. sans doute parce-qu'il le trouvait incomplet, des questions de cohomologies n'ayant pas été résolues...

espace analytique D, qui sera une variété algébrique sur $\mathbb{F}_q^{\text{alg}}$ (en fait ici deux droites affines se coupant en un point rationnel sur $\mathbb{F}_q$ et privées des autres de ces points rationnels). Il en résultera par recollement une structure analytique sur Ω et une réduction analytique, cette dernière permettant de retrouver l'arbre de Bruhat-Tits, tout ceci passant aux quotients par des groupes arithmétiques.

7. Les algèbres affinoïdes.

Définition 7.1. *Soient F un corps valué et complet et $n > 0$ un entier, soit*

$$T_n = T_n(F) = F < Z_1, \cdots, Z_n >$$

le sous-anneau de celui $F[[Z_1, \cdots, Z_n]]$ des séries formelles $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i Z^i$, où $a_i \in F$, $i = (i_1, \cdots, i_n)$ et $Z^i = Z_1^{i_1} \cdots Z_n^{i_n}$, telles que la suite (a_i) des coefficients tende vers 0. On pose $||f|| = max_i |a_i|$,

$$T_n^0 = T_n^0(F) = \{f \in T_n \ / \ ||f|| \leq 1\} \ , \ T_n^{00} = T_n^{00}(F) = \{f \in T_n \ / \ ||f|| < 1\}$$

le deuxième est un idéal du premier, on pose $\overline{T}_n = \overline{T_n(F)} = T_n^0 / T_n^{00}$.

Proposition 7.2. $||\cdot||$ *est une norme multiplicative sur $T_n(F)$, qui fait de ce dernier une algèbre de Banach.*

On a $\overline{T}_n \simeq \overline{F}[Z_1, \cdots, Z_n]$, qui est intègre, donc $||\cdot||$ est multiplicative, le reste est facile.

Théorème 7.3. *On suppose $n > 0$.*

(1) *(Préparation) Soit $f \in T_n(F)$, $||f|| = 1$, alors il existe un F-automorphisme σ de $T_n(F)$ tel que $||\sigma(f)|| = 1$ et que l'image de $\sigma(f)$ dans $\overline{F}[Z_1, \cdots, Z_n]$ soit de la forme*

$$\overline{\sigma(f)} = a_0 + a_1 Z_n + \cdots + a_d Z_n^d$$

avec $a_i \in \overline{F}[Z_1, \cdots, Z_{n-1}]$ et $a_d \in \overline{F}^\times$. On dit que $\sigma(f)$ est régulier en Z_n de degré d.

(2) *(Division) Soit $f \in T_n(F)$ régulier en Z_n de degré d, alors pour tout $g \in T_n(F)$ il existe un unique couple (q, r) avec $q \in T_n(F)$ et $r \in T_{n-1}(F)[Z_n]$, $\deg_{Z_n} r < d$, $g = fq + r$ et $||g|| = \max(||f|| \cdot ||q||, ||r||)$.*

Démonstration. (1). Soit $\overline{f}(Z_1, \cdots, Z_n) \in \overline{F}[Z_1, \cdots, Z_n]$ l'image de f, il existe des entiers naturels m_1, ..., m_{n-1} tels que

$$\overline{f}(Z_1 + Z_n^{m_1}, \cdots, Z_{n-1} + Z_n^{m_{n-1}}, Z_n)$$

soit un polynôme en Z_n dont le coefficient dominant est dans $\overline{F}^{\times}$. On définit σ par $\sigma(Z_i) = Z_i + Z_n^{m_i}$, $1 \leq i \leq n-1$, et $\sigma(Z_n) = Z_n$, c'est l'isomorphisme cherché.

(2). *Existence.* On écrit $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in T^0_{n-1}[Z_n]$ de coefficient dominant dans $(T^0_{n-1})^{\times}$ et $||f_2|| < 1$. On pose $g = \sum_{i\geq 0} g_i Z_n^i$, $g_i \in T_{n-1}$, et on peut supposer que $||g|| = 1$, donc que $g_i \in T^0_{n-1}$ pour tout i. On divise dans $T^0_{n-1}[Z_n]$ les Z_n^i par f_1, il vient

$$Z_n^i = f_1 q_i + r_i \ , \ q_i, r_i \in T^0_{n-1}[Z_n] \ , \ \deg_{Z_n} r_i < \deg_{Z_n} f_1 \ ,$$

on en déduit

$$g = f\sum_{i\geq 0} g_i q_i - f_2 \sum_{i\geq 0} g_i q_i + \sum_{i\geq 0} g_i r_i$$

ce que l'on écrit $g = fQ_1 + G_1 + R_1$ avec $||Q_1|| \leq ||g|| = 1$, $||G_1|| \leq ||f_2||{\cdot}||g|| = ||f_2||$, $||R_1|| \leq ||g||$ et $\deg_{Z_n} R_1 < \deg_{Z_n} f_1$. On recommence avec G_1. Par récurrence on construit ainsi des suites et relations : $G_m = f_1 Q_{m+1} + G_{m+1} + R_{m+1}$ avec $||Q_{m+1}|| \leq ||G_m||$, $||G_{m+1}|| \leq ||f_2|| \cdot ||G_m||$, $||R_{m+1}|| \leq ||G_m||$ et $\deg_{Z_n} R_{m+1} < \deg_{Z_n} f_1$; on a en particulier $||G_{m+1}|| \leq ||f_2||^{m+1}$; la somme suivant m de ces relations (avec $G_0 = g$) fournit q et r avec les propriétés voulues. La preuve de l'unicité est habituelle (on examine les degrés en Z_n). $\square$

Corollaire 7.4. *Soit $n > 0$.*

(1) *T_n est un anneau noethérien.*

(2) *T_n est un anneau factoriel.*

(3) *Tout idéal de T_n est fermé.*

(4) *Soit I un idéal de T_n alors il existe un morphisme injectif fini*

$$\mathrm{T}_d \hookrightarrow T_n/I$$

qui se factorise par un morphisme injectif $T_d \hookrightarrow T_n$ et par la surjection canonique $T_n \twoheadrightarrow T_n/I$:

$$\mathrm{T}_d \hookrightarrow T_n/I \ = \ T_d \hookrightarrow T_n \twoheadrightarrow T_n/I \ ;$$

d est la dimension de Krull de T_n/I ; en particulier T_n est de dimension de Krull n et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de T_n alors $T_n/\mathfrak{M}$ est, via la surjection canonique $T_n \to T_n/\mathfrak{M}$, une extension finie de F.

Démonstration. (1). Soient I un idéal de T_n et $f \in I$, $f \neq 0$. A isomorphisme près on peut supposer f régulier en Z_n, il vient alors avec la division euclidienne

$$I = T_n f + I \cap T_{n-1}[Z_n]$$

et par hypothèse de récurrence T_{n-1} est noethérien.

(2). Soit $f \in T_n$, $f \neq 0$ et l'on peut supposer $||f|| = 1$, quitte à multiplier f par une constante non nulle. Soit σ un automorphisme de T_n tel que $\sigma(f)$ soit régulier en Z_n de degré d. On écrit la division euclidienne par $\sigma(f)$

$$Z_n^d = q\sigma(f) + r \ ,$$

puis, celle par $Z_n^d - r$

$$\sigma(f) = q'(Z_n^d - r) + r' \ ,$$

il vient $Z_n^d - r = qq'(Z_n^d - r) + qr'$ d'où $qq' = 1$ et $r' = 0$, donc

$$\sigma(f) = q'(Z_n^d - r) \text{ avec } q' \in T_n^\times \ ,$$

comme $Z_n^d - r \in T_{n-1}[Z_n]$, un raisonnement par récurrence permet de conclure.

(3). Ceci est en fait un phénomène général : soient T une F-algèbre de Banach qui est un anneau noethérien et M un T-module de Banach de type fini, alors tout sous-module de M est fermé. Mais on peut ici grâce à la continuité de la division euclidienne donner une démonstration directe, qu'on laisse en exercice.

(4). Montrons d'abord l'existence de d. Soit $I \neq 0$ un idéal de T_n, à isomorphisme près on peut supposer que I contient un élément f régulier en Z_n. Soit

$$s : T_n = F < Z_1, \cdots, Z_n > \twoheadrightarrow F < Z_1, \cdots, Z_n > /(f)$$

la surjection canonique, alors $s|F < Z_1, \cdots, Z_{n-1} >$ est injectif et fini ; soit I_1 le noyau de l'application composée

$$F < Z_1, \cdots, Z_{n-1} > \hookrightarrow F < Z_1, \cdots, Z_n > /(f) \twoheadrightarrow F < Z_1, \cdots, Z_n > /I$$

alors le morphisme qui s'en déduit

$$F < Z_1, \cdots, Z_{n-1} > /I_1 \to F < Z_1, \cdots, Z_n > /I$$

est injectif et fini, d'où l'existence de d par récurrence.

Il reste à prouver que d est la dimension de Krull de T_n/I. Le fait que T_d et T_n/I aient la même dimension de Krull est une conséquence du théorème de Cohen-Seidenberg. Il est à prouver que la dimension de Krull de T_d est d. Si $d = 0$ c'est vrai. Supposons $d > 0$. la dimension de Krull de T_d est au moins d à cause de la suite d'idéaux premiers

$$(0) \subset (Z_1) \subset \cdots \subset (Z_1, \cdots, Z_d) \ .$$

D'autre part soit

$$\mathfrak{p}_0 = (0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$$

une suite d'idéaux premiers de T_d avec $r+1$ termes distincts. Soit $f \in \mathfrak{p}_1$, $f \neq 0$, à isomorphisme près on peut supposer f régulier en Z_d, on a alors l'extension finie

$$T_{d-1} \hookrightarrow T_d/(f) \ ,$$

ces deux anneaux ont donc la même dimension de Krull, par hypothèse de récurrence on a $d-1 \geq r-1$. □

Définition 7.5. *On appelle F-algèbre affinoïde une F-algèbre isomorphe à un quotient $T_n(F)/I$, ou I est un idéal de l'algèbre de Tate $T_n(F)$. On voit que ce sont les F-algèbres A extensions finies $T_d(F) \hookrightarrow A$.*

Remarquons qu'une algèbre affinoïde possède au moins une norme d'algèbre de Banach, c'est la norme quotient.

Théorème 7.6. (1) *Soit A une algèbre affinoïde, alors il existe un morphisme injectif fini $T_d \hookrightarrow A$ et une norme de Banach sur A qui prolonge celle de T_d.*

(2) *Soient A une F-algèbre affinoïde et $||\cdot||$ une norme de Banach sur A, alors tout idéal de A est fermé.*

(3) *Soient A_1 et A_2 deux F-algèbres affinoïdes munies de normes de Banach, alors tout morphisme est continu.*

(4) *Toutes les normes de Banach sur une F-algèbre affinoïde sont équivalentes.*

Démonstration. (1) est une conséquence du point (4) du corollaire 7.4. (2) est la conséquence du lemme de Banach : les sous-modules d'un module de type fini de Banach sur A sont fermés. Soit $\varphi : A_1 \to A_2$, (3) est vrai si A_1 et A_2 sont de dimensions finies sur F, ou encore si seulement A_2 est de dimension finie sur F car φ se factorise à travers $A_1/\mathrm{Ker}\varphi$. Dans le cas général : soit (a_i) une suite d'éléments de A_1 tendant vers 0, soient $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A_2 et pour $m > 0$ entier

$$\psi_m : A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \twoheadrightarrow A_2/\mathfrak{M}^m \ ,$$

la seconde application étant la surjection canonique ; l'application ψ_m est continue, donc la suite $\psi_m(a_i)$ tend vers 0, supposons que $(\varphi(a_i))$ ait une limite, b, autrement dit que $(0, b)$ est adhérent au graphe de φ dans $A_1 \times A_2$, on a donc $b \in \mathfrak{M}^m$ pour tous $\mathfrak{M}$ et m, donc (théorème de Krull) $b = 0$, c'est à dire que $(0, b)$ est dans le graphe de φ ; on vient de montrer que ce dernier est fermé, donc φ est continu. (4) est une conséquence de (3). □

Soit A une F-algèbre affinoïde, on désigne par Spm$A$ l'ensemble de ses idéaux maximaux, nous ferons plus loin de Spm$A$ un espace analytique rigide, pour le moment nous le regardons comme un ensemble de points sur lequel sont définies les éléments de A, qui sont donc vus comme des fonctions sur Spm$A$. *Un idéal maximal de A sera souvent noté $\mathfrak{M}_x$ s'il est vu comme un idéal et x s'il est vu comme un point de* Spm$A$. Soit $f \in A$ et $\mathfrak{M}_x$ un idéal maximal de A, on désigne par $f(\mathfrak{M}_x)$ ou encore par $f(x)$ l'image de f par la surjection canonique $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{M}_x$. Rappelons que par cette surjection $A/\mathfrak{M}_x$ est une extension finie de F, dans laquelle la valeur absolue de F possède un unique prolongement, toujours noté $|\cdot|$.

Définition 7.7. *Soient A une F-algèbre affinoïde et $f \in A$. On appelle semi-norme spectrale de f la quantité*

$$||f||_{sp} = \sup\{|f(x)| \ / \ x \in \mathrm{Spm}A\}$$

(notée aussi parfois, lorsqu'il y a risque de confusion, $||f||_{sp}^A$).

On peut remarquer que si $f \in A$ est dans l'intersection de tous les idéaux maximaux, alors $||f||_{sp} = 0$.

Rappelons qu'une semi-norme $|||\cdot|||$ sur une algèbre A est dite potentiellement multiplicative si pour tout $f \in A$ et pour tout entier m positif $|||f^m||| = |||f|||^m$.

Lemme 7.8. *Soient A une F-algèbre affinoïde, alors $||\cdot||_{sp}$ est une semi-norme d'algèbre potentiellement multiplicative. Soit $|||\cdot|||$ une norme de F-algèbre de Banach sur A, alors $||\cdot||_{sp} \leq |||\cdot|||$.*

Sur les algèbres de Tate $T_n(F)$ la semi-norme spectrale est égale à la norme $||\cdot||$, de plus elle est atteinte, c'est à dire que pour tout $f \in T_n$ il existe $\mathfrak{M} \in \mathrm{Spm}T_n$ tel que $|f(\mathfrak{M})| = ||f||_{sp}$.

Démonstration. Le fait que $||\cdot||_{sp}$ soit une semi-norme potentiellement multiplicative est immédiat, sous réserve que $||\cdot||_{sp}$ soit à valeurs finies, mais c'est une conséquence de ce qui suit. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de$A$, alors $|||\cdot|||$ induit une norme $|||\cdot|||'$ sur $A/\mathfrak{M}$, qui est équivalente à sa valeur absolue, donc il existe $c > 0$ tel que

$$|f(\mathfrak{M})| \leq c|||f(\mathfrak{M})|||' \leq c|||f||| \ ,$$

ou encore, pourtour entier $m > 0$

$$|f(\mathfrak{M})|^m = |f^m(\mathfrak{M})| \leq c|||f^m||| \leq c|||f|||^m \ ,$$

donc $|f(\mathfrak{M})| \leq |||f|||$.

Plaçons nous sur T_n. On sait donc que $||\cdot||_{sp} \leq ||\cdot||$, il faut prouver l'inégalité inverse et que la norme spectrale est atteinte. Soit $f \in T_n$, on peut supposer f régulier en Z_n de degré d et $||f|| = 1$.

Soit $P \in F[Z_1, \cdots, Z_n]$ un polynôme qui relève l'image $\overline{f}$ de f dans $\overline{F}[Z_1, \cdots, Z_n]$, on écrit

$$P = u_0 Z_n^d + u_1 Z_n^{d-1} + \cdots + u_d$$

avec tous les u_i dans $F[Z_1, \cdots, Z_{n-1}]$ vérifiant $||u_i|| \leq 1$ (c'est la norme de T_{d-1} ou T_d), $u_0 \in T_{d-1}^{\times}$ et $||u_0|| = 1$. On fait la division euclidienne $f = Pg + r$, par construction les images de g et r dans $\overline{F}[Z_1, \cdots, Z_n]$ sont respectivement 1 et 0. Soit, sur un clôture algébrique de $\overline{F}$, c'est à dire dans $(\overline{F}^{\mathrm{alg}})^n$ le complémentaire $\overline{W}$ de la variété $\overline{V}$ des zéros de $\overline{P} = \overline{f}$; soit, dans $(\overline{F}^{\mathrm{alg}})^n$ un relèvement W de $\overline{W}$. Soit $\lambda \in W$, alors le noyau $\mathfrak{M}_\lambda$ de $T_n(F(\lambda)) \to F(\lambda)$ est un idéal maximal dont la trace $\mathfrak{M}$ sur $T_n(F)$ est un idéal maximal ; on a $|P(\mathfrak{M})| = |P(\lambda)| = 1$, donc $|f(\mathfrak{M})| = 1$. $\square$

Remarque 7.9. *On a une application naturelle $(F^{\mathrm{alg}})^n \to \mathrm{Spm}T_n$, soit $f \in T_n$, les arguments de la fin de la démonstration précédente montrent que l'ensemble des points de $(F^{\mathrm{alg}})^n$ qui donnent des éléments $\mathfrak{M}$ de $\mathrm{Spm}T_n$ tels que $|f(\mathfrak{M})|$ soit maximal, par réduction est une variété affine ouverte non vide de $(\overline{F}^{\mathrm{alg}})^n$; il y a donc "beaucoup" d'éléments de $\mathrm{Spm}T_n$ tels que $|f(\mathfrak{M})|$ soit maximal. Si $n = 1$, on retrouve le "principe du maximum", de plus il vient le corollaire*

Corollaire 7.10. *Soient $f_1, \cdots, f_r$ des éléments de T_n, alors il existe $\mathfrak{M} \in \mathrm{Spm}T_n$ tel que $|f_i(\mathfrak{M})| = ||f_i||_{sp}$ pour tout $i = 1, \cdots, r$.*

Lemme 7.11. *Soient A une algèbre affinoïde et $T_d \hookrightarrow A$ un morphisme fini injectif. On suppose A intègre. Soient $f \in A$, $f \neq 0$ et*

$$P(X) = \mathrm{irr}(f, \mathrm{Fr}(T_d); X) = X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m$$

le polynôme minimal de f sur le corps des fractions de T_d. Alors on a $P(X) \in T_d[X]$ et

$$||f||_{sp}^A = \max_{1 \leq i \leq m} ||a_i||_{T_d}^{1/i}$$

(où $|| \cdot ||_{T_d}$ est la norme de T_d notée la plupart du temps $|| \cdot ||$) ; en particulier $|| \cdot ||_{sp}^A$ est une norme et il existe $x \in \mathrm{Spm}A$ tel que $|f(x)| = ||f||_{sp}^A$.

Démonstration. Elle nécessite un autre lemme

Lemme 7.12. *Soit (L, v) un corps valué, complet et algébriquement clos, soient $E \subset M \subset L$ des sous corps avec l'extension M/E finie.*

(1) *Soit σ un E-homomorphisme de M dans L, alors $v \circ \sigma$ est une valuation de M qui prolonge $v|E$.*

(2) *Toutes les valuations de M prolongeant $v|E$ sont ainsi : si w est une telle valuation il existe un E-homomorphisme de M dans L tel que $w = v \circ \sigma$.*

(3) *Supposons que $M = E[x]$ et soient σ, τ deux E-homomorphismes de M dans L, notons E_v le complété de E pour la valuation $v|E$, on a*

$$\operatorname{irr}(\sigma(x), E_v; X) = \operatorname{irr}(\tau(x), E_v; X)$$

si et seulement si $v \circ \sigma = v \circ \tau$; cela veut dire en particulier que dans $E_v[X]$, on a la décomposition en polynômes irréductibles

$$\operatorname{irr}(x, E; X) = \prod_{1 \leq i \leq r} \operatorname{irr}(\sigma_i(x), E_v; X)$$

où les σ_i sont des E-homomorphismes de M dans L.

(4) *Supposons toujours $M = E[x]$, écrivons*

$$P(X) := \operatorname{irr}(x, E; X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d \ ,$$

soient Z l'ensemble de ses racines et $v_1, \cdots, v_r$ les valuations de M qui prolongent $v|E$, alors

$$\min_{z \in Z} v(z) = \min_{1 \leq j \leq d} (1/j) v(a_j) = \min_{1 \leq i \leq r} v_i(x) \ .$$

Si E est complet, $v(x) = (1/d) v(a_d)$.

Démonstration. La partie (1) est immédiate. Montrons (2). On peut supposer que l'extension M/E est normale. Soit $Q = E_v(M)$, c'est une extension normale finie de E_v, notons d son degré. On va montrer que Q est complet, pour la topologie de w. On écrit $E_v \subset Q^i \subset Q$ avec Q^i/E_v purement inséparable et Q/Q^i séparable. Il est immédiat de constater que Q^i est complet. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans Q, comme $|\cdot|_Q = |N_{Q/Q^i}(\cdot)|_{Q^i}$, il vient que pour tout $\sigma \in \operatorname{Gal}(Q/Q^i)$ la suite $(\sigma(x_n))$ est de Cauchy, par suite les fonctions symétriques

$$\Sigma_\ell(x_n) = \sum \sigma_{j_1}(x_n) \cdots \sigma_{j_\ell}(x_n) \ ,$$

où $\{j_1, \cdots j_\ell\}$ décrit les parties à ℓ éléments de $\{1, \cdots d\}$, forment pour tout ℓ une suite de Cauchy, dans E_v. Soit $\Sigma_\ell \in E_v$ la limite de $(\Sigma_\ell(x_n))$, alors si x est la limite de (x_n), dans le complété Q_w, on voit que x est racine de $P(X) = \sum_{0 \leq \ell \leq d} (-1)^\ell \Sigma_\ell X^{d-\ell} \in Q^i[X]$. Ainsi tous les éléments de Q_w sont algébriques sur Q^i de degré au plus d. Comme l'extension Q/Q^i est séparable, il suit qu'ell est de dimension finie., en fait de degré d, donc $Q_w = Q$.

Donc l'extension M_w/E_v est finie. Soit τ un E_v-homomorphisme de M_w dans L, alors $w \circ \tau^{-1}$ est une valuation sur $\tau(M_w)$ qui prolonge $v|E_v$, par unicité du prolongement de la valuation dans l'extension $\tau(M_w)/E_v$ il suit $w\circ\tau^{-1}=v|\tau(M_w)$.

Pour (3). Si $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ sont racines d'un même polynôme irréductible sur E_v, il existe un E_v-isomorphisme $\rho : E_v(\sigma(x))\simeq E_v(\tau(x))$, tel que $\rho(\sigma(x))=\tau(x)$, alors $v\circ\rho$ et v sont deux prolongements de $v|E_v$ à $E_v(\tau(x))$, par unicité $v\circ\rho=v$ sur $E_v(\tau(x))$, donc $v\circ\sigma=v\circ\tau$.

Réciproquement, supposons $v\circ\sigma=v\circ\tau$, alors le E-isomorphisme $E(\sigma(x))\simeq E(\tau(x))$, qui envoie $\sigma(x)$ sur $\tau(x)$, est isométrique (pour les valuations $v\circ\sigma$ et $v\circ\tau$), donc se prolonge en un E_v-isomorphisme $E_v(\sigma(x))\simeq E_v(\tau(x))$, d'où le fait que $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ aient le même polynôme irréductible sur E_v.

Pour la partie (4). Écrivons $Z=\{z_1,\cdots,z_d\}$, chaque racine étant répétée autant de fois que sa multiplicité le demande, on a $\min_j v(z_j)=\min_i v_i(x)$, supposons par exemple $v(z_1)=\min_j v(z_j)$, soit

$$Q(Y)=z_1^{-d}P(z_1Y)=Y^d+(a_1/z_1)Y^{d-1}+\cdots+(a_d/z_1^d)=\prod_{1\leq j\leq d}(Y-(z_i/z_1))\ ,$$

donc l'image $\overline{Q}(Y)$ de $Q(Y)$ dans $\overline{L}[Y]$ vérifie $\overline{Q}(Y)\neq Y^d$, donc $1=\min_j v(a_j/z_1^j)$, i.e. $v(z_1)=\min_j((1/j)v(a_j))$. □

Maintenant on montre le lemme 7.11. $P(X)$ est à coefficients dans T_d car A est une extension entière de T_d. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal de T_d, on pose $F(\mathfrak{p})=T_d/\mathfrak{p}$, soit $\widetilde{P}(X)$ l'image de $P(X)$ dans $F(\mathfrak{p})[X]$ et soit, dans une clôture algébrique fixée de $F(\mathfrak{p})$, une racine λ de $\widetilde{P}(X)$. Soit $s : T_d\to F(\mathfrak{p})$ la surjection canonique. Cette surjection s se prolonge en $s_1 : T_d[X]\to F(\mathfrak{p})(\lambda)$ par $X\mapsto\lambda$ et $\mathrm{Ker}s_1$ est un idéal maximal $\mathfrak{M}_1$ de $T_d[X]$ tel que $\mathfrak{M}_1\cap T_d=\mathfrak{p}$. L'idéal $\mathfrak{M}_1$ contient $P(X)$ donc $\mathfrak{M}_1/(P(X))$ est un idéal maximal de $T_d[X]/(P(X))\simeq T_d[f]$ au dessus de $\mathfrak{p}$; par intégralité, $\mathfrak{M}_1/(P(X))$ se prolonge en un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A au dessus de $\mathfrak{p}$ et l'on a $f(\mathfrak{M})=\lambda$. On a prouvé :
(*) Pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de T_d, pour toute racine λ de $P(X)$ mod. $\mathfrak{p}$, il existe un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A au dessus de $\mathfrak{p}$ tel que $f(\mathfrak{M})=\lambda$.

Soit $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ les racines de $\widetilde{P}(X)$ (dans une clôture algébrique fixée de $F(\mathfrak{p})$) ; on a (cf le lemme précédent)

$$\max_{\lambda\in\Lambda_{\mathfrak{p}}}|\lambda|=\max_{1\leq j\leq d}|a_j(\mathfrak{p})|^{1/j}\ ,$$

où $a_j(\mathfrak{p})$ est a_j mod. $\mathfrak{p}$. Cette dernière assertion avec (*) montre que

$$||f||_{sp}^{A}=\left(\max_{1\leq j\leq d}||a_j||_{sp}^{T_d}\right)^{1/j}\ .$$

On sait qu'il existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spm}T_d$ tel que pour tout j l'on ait $||a_j||_{sp}^{T_d} = \max|a_j(\mathfrak{p})|$ (cf le lemme 7.8 et la remarque qui le suit), d'où le fait que $||f||_{sp}$ est atteint. □

On en vient maintenant à un théorème important de ce passage, mais auparavant quelques définitions : soit A une F-algèbre affinoïde, on pose

$A^0 = \{a \in A \,/\, ||a||_{sp} \leq 1\}$, $A^{00} = \{a \in A \,/\, ||a||_{sp} < 1\}$ et $\overline{A} = A^0/A^{00}$,

$\overline{A}$ est une algèbre de type fini sur $\overline{F}$, de même dimension de Krull que A. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme entre deux algèbres affinoïdes, alors pour tout élément a de A on a $||\varphi(a)||_{sp}^B \leq ||a||_{sp}^A$, d'où l'existence de deux morphismes induits pas φ, $\varphi^0 : A^0 \to B^0$ et $\overline{\varphi} : \overline{A} \to \overline{B}$.

Théorème 7.13. *Soit A une F-algèbre affinoïde.*

(1) *Soit $f \in A$, il existe $x \in \mathrm{Spm}A$ tel que $|f(x)| = ||f||_{sp}$,*
(2) *le radical de A est égal à son nilradical, il suit que $||\cdot||_{sp}$ est une norme si et seulement si l'algèbre A est réduite,*
(3) *soit $\varphi : T_n \to A$ un morphisme fini, alors $\varphi^0 : T_n^0 \to A^0$ est entier,*
(4) *soit $||\cdot||$ une norme de Banach sur A, alors*

$$A^0 = \{f \in A \,/\, \sup_{m>0} ||f^m|| < \infty\} ,$$

soit $f \in A$, on a $||f||_{sp} = \lim_{m>0} ||f^m||^{1/m}$.

Démonstration. (1). Soient $\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq r$, les idéaux premiers minimaux de A, on a $||\cdot||_{sp}^A = \max_i ||\cdot||_{sp}^{A/\mathfrak{p}_i}$ et pour les algèbres intègres l'assertion est prouvée dans un lemme précédent.

(2). Soit f appartenant au radical de A, soient $\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq r$, les idéaux premiers minimaux de A et $\varphi_i : A \to A/\mathfrak{p}_i$ les surjections canoniques. On a par hypothèse $||\varphi_i(f)||_{sp}^{A/\mathfrak{p}_i} = 0$, donc (lemme 7.11) $\varphi_i(f) = 0$. On a prouvé $f \in \bigcap_i \mathfrak{p}_i$.

(3). Soit donc $\varphi : T_n \to A$ fini. On suppose d'abord A intègre. D'après (7.4) il existe $\alpha : T_d \hookrightarrow T_n$ tel que

$$T_d \overset{\alpha}{\hookrightarrow} T_n \overset{s}{\twoheadrightarrow} T_n/\mathrm{Ker}\varphi$$

soit injectif et fini, où s est la surjection canonique ; soit $\varphi_1 : T_n/\mathrm{Ker}\varphi \to A$ tel que $\varphi_1 \circ s = \varphi$, alors

$$\varphi_1 \circ s \circ \alpha = \varphi \circ \alpha : T_d \to A$$

est un morphisme injectif et fini, donc $(\varphi_1 \circ s \circ \alpha)^0 = (\varphi \circ \alpha)^0$ est entier (cf 7.11), donc φ^0 est entier.

Si A n'est pas intègre, soient $\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq r$ ses idéaux premiers minimaux et $s_i : A \to A/\mathfrak{p}_i$ les surjections canoniques, soit $f \in A^0$, il existe $P_i(X) \in T_n^0[X]$, unitaire, tel que ${}^{\varphi \circ s_i}P_i(f) = 0$ (lemme 7.11), donc ${}^{\varphi}P_i(f) \in \mathfrak{p}_i$, ainsi

$$^{\varphi}\left(P_1 \cdots P_r\right)(f) \in \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathfrak{p}_i \ ,$$

par suite il existe un entier $m > 0$ tel que ${}^{\varphi}\left(P_1^m \cdots P_r^m\right)(f) = 0$, ce qui prouve que f est entier sur T_n^0.

(4).Soit $T_n \hookrightarrow A$, fini. Soit $f \in A^0$, f annulant le polynôme $P(x) = X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d$ de $T_n^0[X]$ (cf lemme 7.11), unitaire. On a

$$\{f^m \ / \ m \geq 0\} \subset \sum_{0 \leq i \leq d} T_n^0 f^i \ ,$$

ainsi l'ensemble des $||f^m||$ est borné pour toute norme de Banach sur A prolongeant celle de T_n, les autres normes de Banach sur A lui sont équivalentes (cf théorème 7.6). □

Corollaire 7.14. *Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme entre deux algèbres affinoïdes et $b_1, \cdots, b_r \in B^0$, alors il existe un morphisme d'algèbres affinoïdes $\psi : A < Z_1, \cdots, Z_r > \to B$ tel que $\psi | A = \varphi$ et $\psi(Z_i) = b_i$.*

Démonstration. Soient $|| \cdot ||_A$ et $|| \cdot ||_B$ des normes de Banach sur A et B. Il résulte du théorème 7.6, partie (4), l'existence d'une constante c telle que

$$\sup_{(m_1, \cdots, m_r) \in \mathbb{N}^r} ||b_1^{m_1} \cdots b_r^{m_r}||_B \leq c \ ,$$

soit

$$\psi : A[Z_1, \cdots, Z_r] \to B \ , \ P(\underline{Z}) \mapsto {}^{\varphi}P(\underline{b}) \ ,$$

on a $||{}^{\varphi}P(\underline{b})||_B \leq c \max_{\underline{m}} ||\varphi(a_{\underline{m}})||_B$ où $a_{\underline{m}}$ est le coefficient du monôme de $P(\underline{Z})$ de degré $\underline{m}$. Ainsi ψ est continue et donc se prolonge à $A < Z_1, \cdots, Z_r >$. □

7.1. **Les algèbres affinoïdes et leurs réductions.** Le théorème suivant est essentiel pour la mise en place des espaces analytiques affinoïdes.

Théorème 7.15. *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme entre deux algèbres affinoïdes. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\varphi : A \to B$ est fini,*

(2) *$\varphi^0 : A^0 \to B^0$ est entier,*

(3) *$\overline{\varphi} : \overline{A} \to \overline{B}$ est fini.*

Démonstration. Montrons d'abord que (1)et (2) sont équivalents. Soit $\alpha : T_d \hookrightarrow A$ un morphisme fini, si φ est fini alors $(\varphi \circ \alpha)^0$ est entier (cf partie (3) du théorème 7.13), donc φ^0 est entier. Réciproquement, supposons φ^0 entier, soient

$$s : T_n = F < Z_1, \cdots, Z_n > \twoheadrightarrow B$$

un morphisme surjectif et $|| \cdot ||$ la norme de B ainsi induite. On a $||s(Z_i)||_{sp}^B \leq ||s(Z_i)|| \leq 1$, donc les $s(Z_i)$ sont dans B^0, par suite, d'après (2), il existe $P_i(X) \in A^0[X]$, unitaire, tel que ${}^{\varphi}P_i(s(Z_i)) = 0$; on désigne par δ_i le degré de P_i et l'on voit que

$$B = s(F < Z_1, \cdots, Z_n >) = \sum_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j_i < \delta_i} \varphi(A) s(Z_1)^{j_1} \cdots s(Z_n)^{j_n} .$$

On montre que (1) ou (2) implique (3). On se ramène d'abord au cas où B est intègre. Soient $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ les idéaux premiers minimaux de B et $s_i : B \to B/\mathfrak{p}_r$ les surjections canoniques, on a pour tout $b \in B$, $||b||_{sp}^B = \max_i ||s_i(b)||_{sp}^{B/\mathfrak{p}_i}$, donc l'application canonique $\overline{B} \to \prod_i \overline{(B/\mathfrak{p}_i)}$ est injective et $\overline{\varphi}$ est fini si tous les $\overline{s_i \circ \varphi} : \overline{A} \to \overline{(B/\mathfrak{p}_i)}$ le sont.

On suppose donc B intègre. Soient $\alpha : T_n \hookrightarrow A$ un morphisme fini, $s : T_n \to T_n/\mathrm{Ker}(\varphi \circ \alpha)$ la surjection canonique et $\beta : T_d \to T_n$ tel que

$$\left(T_d \overset{\gamma}{\hookrightarrow} T_n/\mathrm{Ker}(\varphi \circ \alpha)\right) = \left(T_d \overset{\beta}{\to} T_n \overset{s}{\to} T_n/\mathrm{Ker}(\varphi \circ \alpha)\right)$$

soit injectif et fini (cf théorème 7.6) ; soit $\varphi_1 : T_n/\mathrm{Ker}(\varphi \circ \alpha) \to B$ induit par $\varphi \circ \alpha$, c'est à dire que φ_1 est injectif et vérifie $\varphi_1 \circ s = \varphi \circ \alpha$; on sait que φ est fini car les assertions (1) et (2) sont équivalentes, donc φ_1 est fini, par suite $\varphi_2 = \varphi_1 \circ \gamma = \varphi \circ \alpha \circ \beta$ est fini. On est donc ramené à $A = T_d$ et $\varphi : T_d \hookrightarrow B$ injectif et fini.

Soit donc $\varphi : T_d \hookrightarrow B$ injectif et fini, avec B intègre. Montrons que $\overline{\varphi}$ est fini. Soient $E = \mathrm{Fr}(T_d)$ et $L = \mathrm{Fr}(B)$, la norme de T_d induit sur E une valeur absolue, toujours notée $|| \cdot ||$, soient $|| \cdot ||_i$, $1 \leq i \leq r$, ses prolongements à L.

Lemme 7.16. *Soit $b \in B$, alors $||b||_{sp}^B = \max_{1 \leq i \leq r} ||b||_i$.*

Démonstration. Posons $P(X) = \mathrm{irr}(b, E; X) = X^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$, on sait (cf lemme 7.11) que $P(X) \in T_d[X]$, que $||b||_{sp}^B = \max_{1 \leq i \leq m} ||a_i||^{1/i}$, on sait aussi (cf lemme 7.12) que $\max_{1 \leq i \leq r} ||b||_{sp}^B = \max_{1 \leq i \leq m} ||a_i||^{1/i}$, d'où le lemme. □

Soient L_i le complété de L pour la valeur absolue $|| \cdot ||_i$ et $\overline{L_i}$ le corps résiduel correspondant, le lemme précédant montre que le morphisme canonique

$$\overline{B} \to \prod_{1 \leq i \leq r} \overline{L_i}$$

est injectif. Montrons que $\overline{\varphi} : \overline{T_d} \to \overline{A}$ est injectif : soient $u \in T_d^0$, et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de B ; on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & T_d & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & B \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ F & \hookrightarrow & T_d/\mathfrak{M}\cap T_d) & \overset{\widetilde{\varphi}}{\hookrightarrow} & B/\mathfrak{M} \end{array}$$

l'application $\widetilde{\varphi}$ étant induite par φ, les flèches verticales étant les surjections canoniques et les flèches horizontales étant finies, on voit que

$$\varphi(u)(\mathfrak{M}) = \widetilde{\varphi}(u(\mathfrak{M}\cap T_d)) \ ,$$

donc $u(\mathfrak{M}\cap T_d) \neq 0$ si et seulement si $\varphi(u)(\mathfrak{M}) \neq 0$.

On a donc le morphisme injectif

$$\overline{T_d} \overset{\overline{\varphi}}{\to} \overline{B} \to \prod_{1\leq i\leq r} \overline{L_i} \ ,$$

$\overline{B}$ est entier sur $\overline{T_d} = \overline{F}[Z_1, \cdots, Z_d]$ puisque B^0 l'est sur T_d^0, le corps $\overline{L_i}$ est une extension finie de $\overline{E} = \overline{F}(Z_1, \cdots, Z_d)$, la fermeture intégrale de $\overline{F}[Z_1, \cdots, Z_d]$ dans $\overline{L_i}$ est un $\overline{F}[Z_1, \cdots, Z_d]$-module fini ; donc $\overline{B}$ est un $\overline{T_d}$-module fini.

Montrons que (3) implique (1) ou (2). On se ramène au cas où $A = T_d$ en remplaçant φ par $\varphi\circ\alpha$ où $\alpha : T_d \hookrightarrow A$ est fini. Soit donc $\varphi : T_d \to B$ avec $\overline{\varphi}$ fini. Soient un morphisme surjectif $s : T_n \twoheadrightarrow B$ et

$$\psi : T_d < Z_1, \cdots, z_n >= T_{d+n} \longrightarrow B \ , \ \psi|T_d = \varphi \ , \ \psi(Z_i) = s(Z_i) \ ,$$

on écrit $z_i = s(Z_i)$ et l'on désigne par $||\cdot||_\psi$ la norme de Banach de B induite par ψ ([5]) Montrons l'assertion

– pour tout $\rho \in F$, $0 < |\rho| < 1$, il existe des polynômes $P_i(X) \in T_d^0[X]$, unitaires, tels que $||^\varphi P_i(z_i)| \leq ||\rho||_\psi$, $1 \leq i \leq n$.

En effet, le fait que $\overline{\varphi}$ soit fini implique l'existence des $Q_i(X) \in T_d^0[X]$, unitaires, tels que $||^\varphi Q_i(z_i)||_{sp}^B < 1$, $1 \leq i \leq n$. Comme $||^\varphi Q_i(z_i)^m||_\psi^{1/m}$ tend vers $||^\varphi Q_i(z_i)||_{sp}^B$ lorsque $m$tend vers $+\infty$, il existe m suffisamment grand pour que $||^\varphi Q_i(z_i)^m||_\psi$ soit aussi proche de 0 que l'on veut. Montrons maintenant

– Soit $f(\underline{Z}) = f(Z_1, \cdots, Z_n) \in T_d^0 < \underline{Z} >= T_d^0 < Z_1, \cdots, Z_n >$ $(= T_{d+n}^0)$ alors on peut écrire

$$f(\underline{Z}) = R(\underline{Z}) + \kappa f_1(\underline{Z}) + \delta(\underline{Z})$$

avec $R(\underline{Z}) \in T_d^0[Z_1, \cdots, Z_n]$, $\deg_{Z_i} R < d_i := \deg P_i$, avec $f_1(\underline{Z}) \in T_d^0 < \underline{Z} >$, $\delta(\underline{Z}) \in \mathrm{Ker}\psi$ et où $\kappa \in F$, $0 \leq |\kappa| < 1$.

5. C'est la propriété essentielle de cette norme d'être de Banach, car on ne sait pas à ce moment que lorsque B est réduite la norme spectrale est de Banach , la preuve de ceci est l'objet du paragraphe suivant.

Cette assertion implique

$$\psi(T_d^0 < \underline{Z} >) = \sum_{1\leq i\leq n, 0\leq m_i<d_i} \varphi(T_d^0) z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n} + \kappa\psi(T_d^0 < \underline{Z} >) \ ,$$

qui par itération et en tensorisant par F montre que B est fini sur T_d. Prouvons donc cette assertion. Soit donc $f(\underline{Z}) \in T_d^0 < \underline{Z} >$, après divisions successives par les polynômes P_i, on obtient

$$f(\underline{Z}) = P_1(Z_1)u_1(\underline{Z}) + \cdots + P_n(Z_n)u_n(\underline{Z}) + R(\underline{Z})$$

avec $||u_i(\underline{Z})||_{sp}^{T_{d+n}} \leq ||f(\underline{Z})||_{sp}^{T_{d+n}} \leq 1$, $R(\underline{Z}) \in T_d^0[\underline{Z}]$ et $\deg_{Z_i} R < d_i$. Remarquons que

$$||^{\varphi}P_1(z_1)^{\varphi}u_1(\underline{z}) + \cdots + {}^{\varphi}P_n(z_n)^{\varphi}u_n(\underline{z})||_{\psi} \leq \max_i ||^{\varphi}P_i(z_i)||_{\psi}||^{\varphi}u_i(\underline{z})||_{\psi}$$

$$\leq |\rho| \max_i ||^{\varphi}u_i(\underline{z})||_{\psi} \leq |\rho|||u_i(\underline{Z})||_{sp}^{T_{d+n}} \leq |\rho|$$

ce qui s'écrit

$$||\psi(P_1(Z_1)u_1(\underline{Z}) + \cdots + P_n(Z_n)u_n(\underline{Z}))||_{\psi} \leq |\rho|$$

par suite il existe des éléments v de Kerψ tels que

$$||P_1(Z_1)u_1(\underline{Z}) + \cdots + P_n(Z_n)u_n(\underline{Z}) + v||_{sp}^{T_{n+d}}$$

ait un majorant aussi proche que l'on veut (par valeurs supérieures) de $|\rho|$, ce qui prouve l'assertion. □

Remarque 7.17. *Soit un morphisme $\varphi : A \to B$ entre deux F-algèbres affinoïdes.*

1. *Il peut se faite que φ^0 ne soit pas fini. Par exemple soit L/E une extension finie de corps valués et complets, que l'on suppose immédiate, c'est à dire que $|E^{\times}| = |L^{\times}|$ et $\overline{E} = \overline{L}$, alors L^0 n'est pas fini sur E^0. En effet, comme $L^0 = E^0 + E^{00}L^0$, si L^0 est fini sur E^0 le lemme de Nakayama dit que $L^0 = E^0$, donc $L = E$.*
2. *Si le corps de base F est discrètement valué et B réduite alors φ^0 est fini.*

7.2. **La norme spectrale est de Banach.** Nous allons étudier la norme spectrale des algèbres affinoïdes A à l'aide d'extensions finies $T_n \hookrightarrow A$, le lemme suivant examine le cas où il y a de l'inséparabilité. Rappelons d'abord qu'étant donné un anneau commutatif et intègre A, de corps des fractions E, le rang d'un A-module N est la dimension sur E de $N \otimes_A E$.

Lemme 7.18. *Soient F un corps valué complet de caractéristique $p > 0$, q une puissance de p, N un sous-$T_n(F)$-module de $T_n(F)^{1/q}$ $= F^{1/q} < Z_1^{1/q}, \cdots, Z_n^{1/q} >$ de rang fini sur $T_n(F)$, alors N est de type* *fini sur $T_n(F)$, fermé dans $T_n(F)^{1/q}$ (pour la norme spectrale). Si de plus N est une sous-F-algèbre unitaire de $T_n(F)^{1/q}$, c'est une algèbre affinoïde et sa norme spectrale est de Banach.*

Démonstration. D'abord un lemme auxilliaire.

Lemme 7.19. *Soient A un anneau noethérien et intègre, E son corps des fractions, M un A-module libre et N un sous-A-module de M de rang fini. Alors, si $\{e_i\}_{i\in I}$ une A-base de M, il existe une partie finie J de I telle que N soit un sous-module de $\oplus_{j\in J}Ae_j$, en particulier N est de type fini sur A.*

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une A-base de M, on a

$$N\otimes_A E\hookrightarrow M\otimes_A E=\oplus_{i\in I}Ee_i$$

et il existe une partie finie J de I telle que $N\otimes_A E\subset\oplus_{i\in J}Ee_i$. Montrons $N\subset\oplus_{j\in J}Ae_j$.

Soit $x\in N$, on a $x\in M$, donc $x=\sum_{i\in I}a_ie_i$ avec les a_i dans A, presque tous nuls ; on a également $x\in N\otimes E$, donc $x=\sum_{j\in J}\frac{b_j}{d}e_j$, où $b_j,d\in A$, $d\neq 0$; donc dans M

$$dx=\sum_{j\in J}b_je_j=\sum_{i\in I}da_ie_i\ ,$$

d'où le lemme. □

Démontrons le lemme 7.18. Soit $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ une F-base de $F^{1/q}$, on a

$$T_n(F)^{1/q}=\oplus_{\substack{i\in I,1\leq\ell\leq n\\0\leq m_\ell<q}}T_n(F)\lambda_iZ_1^{m_1/q}\cdots Z_n^{m_n/q}$$

et, d'après le lemme précédent, il existe une partie finie J de I telle que

$$N\subset\oplus_{\substack{j\in J,1\leq\ell\leq n\\0\leq m_\ell<q}}T_n(F)\lambda_jZ_1^{m_1/q}\cdots Z_n^{m_n/q}\ ;$$

soit $F_1=F(\lambda_j\ /\ j\in J)$, alors N est un sous-$T_n(F)$-module de $F_1<\underline{Z}^{1/q}>=F_1<Z_1^{1/q},\cdots,Z_n^{1/q}>$, dont la norme spectrale est induite par celle de $T_n(F)^{1/q}$ et qui de plus est un $T_n(F)$-module fini. Donc N est de type fini sur $T_n(F)$, fermé dans $F_1<\underline{Z}^{1/q}>$, donc dans $T_n(F)^{1/q}$.

Supposons que N soit une F-sous-algèbre unitaire de $T_n(F)^{1/q}$, alors l'inclusion $T_n(F)\subset N$ est un morphisme fini, donc N est une algèbre affinoïde ; par intégralité on vérifie que sur N on a $||\cdot||_{sp}^N=||\cdot||_{sp}^{T_n(F)^{1/q}}$. Donc la norme spectrale de N est de Banach. □

Rappelons qu'un anneau commutatif, unitaire et noethérien A est

(1) *japonais* s'il est intègre et si la fermeture intégrale de A dans toute extension finie de $\mathrm{Fr}(A)$ est un A-module fini,

(2) *de Nagata* si $A/\mathfrak{p}$ est japonais, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.

Théorème 7.20. *(Gerritzen* [18]*) Soit A un F-algèbre affinoïde réduite.*

(1) *La fermeture intégrale de A dans son anneau total des fractions est un A-module fini, c'est donc une algèbre affinoïde ; A est un anneau de Nagata.*

(2) *La norme spectrale de A est de Banach.*

Démonstration. On commence par examiner le cas où A est intègre. Soit $\alpha : T_d(F) \hookrightarrow A$ un morphisme fini. On pose $L = \mathrm{Fr}(T_d(F))$, $M = \mathrm{Fr}(A)$, M/L est une extension finie, soit N une fermeture normale de M sur L et L_1 le corps des invariants par le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N/L)$: l'extension L_1/L est purement inséparable et l'extension N/L_1 est galoisienne. Soient B la fermeture intégrale dans N de T_d ou de A et $B_1 = B \cap L_1$, ce dernier est la fermeture intégrale de T_d dans L_1.

Il existe une puissance q de l'exposant caractéristique p de L tel que $B_1 \subset T_d(F)^{1/q}$, de plus B_1 est de rang fini sur $T_d(F)$, le lemme précédent montre donc que B_1 est une algèbre affinoïde dont la norme spectrale est de Banach, que B_1 est un $T_d(F)$-module fini.

Examinons B en tant que B_1-module, dans l'extension galoisienne N/L_1. Montrons que B est fini sur B_1. Soient $\{b_1, \cdots, b_r\} \subset B$ une L_1-base de N, $\{b_1^*, \cdots, b_r^*\}$ la base duale pour la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{N/L_1}(xy)$ et $d \in B_1$, $d \neq 0$, tel que $db_i^* \in B$ pour tout i. On a pour tout $b \in B$, $b = \sum_{1\leq i\leq r} \mathrm{Tr}_{N/L_1}(bb_i^*)b_i$ donc $db = \sum_{1\leq i\leq r} \mathrm{Tr}_{N/L_1}(b(db_i^*))b_i$ et on constate que $\mathrm{Tr}_{N/L_1}(b(db_i^*)) \in B_1$ puisque $b(db_i^*) \in B$, donc

$$B \subset \frac{1}{d} \sum_{1\leq i\leq r} B_1 b_i \ ,$$

par conséquent B est fini sur B_1 et c'est une algèbre affinoïde.

On a $\mathrm{Tr}_{N/L_1}(B^0) \subset B_1^0$, en effet , si $\sigma \in \mathrm{Gal}(N/L_1)$, on a par intégralité $\sigma(B) = B$ et σ induit une bijection de $\mathrm{Spm}B$, de plus, pour tous $b \in B$ et $\mathfrak{M} \in \mathrm{Spm}B$, $|b(\mathfrak{M})| = |\sigma(b)(\mathfrak{M})|$. Supposons maintenant que les b_i de la base précédente de N/L_1 soient dans B^0 (ce qui est toujours possible), on peut choisir $d \in B_1$,$d \neq 0$, tel que $db_i^* \in B^0$ pour tout i, les mêmes calculs qu'au dessus et la remarque qui vient d'être faite concernant la trace donnent

$$dB^0 \subset \sum_{1\leq i\leq r} B_1^0 b_i \ .$$

Maintenant on montre que la norme spectrale de B est de Banach. Soit $b \in B$, $b \neq 0$, $b = \sum_{1\leq i\leq r} a_i b_i$ avec $a_i = \mathrm{Tr}_{N/L_1}(bb_i^*)$. Soient $\lambda \in F$

et $c_1 > 0$ tels que $0 < c_1 \leq ||\lambda b||_{sp}^B \leq 1$; il faut remarquer que l'on peut choisir λ de telle sorte la constante c_1 ne dépende pas de b. On a $d\lambda b \in \sum_{1\leq i\leq r} B_1^0 b_i$,

$$||d\lambda b||_{sp}^B \leq \max_i ||d\lambda a_i||_{sp}^A ||b_i||_{sp}^B \leq c_2 \max_i ||d\lambda a_i||_{sp}^A$$

où $c_2 = \max_i ||b_i||_{sp}^B \leq 1$. D'autre part on a $\max_i ||d\lambda a_i||_{sp}^A \leq 1 \leq c_1^{-1}||\lambda b||_{sp}^B$; ces formules se regroupent en

$$||d\lambda b||_{sp}^B \leq c_2 \max_i ||d\lambda a_i||_{sp}^A \leq c_2 c_1^{-1} ||\lambda b||_{sp}^B$$

donc

$$||db||_{sp}^B \leq c_2 \max_i ||da_i||_{sp}^A \leq c_2 c_1^{-1} ||b||_{sp}^B \ . \tag{6}$$

L'application $B_1 \to B_1$, $a \mapsto da$, est une bijection continue, donc bicontinue (pour la norme spectrale de B_1, qui est de Banach), donc il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour tout $a \in B_1$ l'on ait $||da||_{sp}^{B_1} \leq c_3 ||a||_{sp}^{B_1}$, cela donne avec (6)

$$\max_i ||a_i||_{sp}^A \leq (c_1 c_3)^{-1} ||b||_{sp}^B \ ,$$

une inégalité de ce type dans l'autre sens étant évidente il en résulte que la norme spectrale de B est de Banach.

Maintenant on examine le cas général, on suppose seulement que A est réduite. Soient $\mathfrak{p}_i$, $1 \leq i \leq r$, les idéaux premiers minimaux de A, $s_i : A \to A/\mathfrak{p}_i$ les surjections canoniques et $s : A \to \prod_i A/\mathfrak{p}_i$ le morphisme diagonal qui s'en déduit. On sait (Bourbaki, algèbre commutative, § 2, n° 5) que l'on a des morphismes canoniques, qui sont injectifs, celui de droite étant un isomorphisme

$$A \hookrightarrow \oplus_{1\leq i\leq r} A/\mathfrak{p}_i \hookrightarrow \mathrm{Fr}(A) \xrightarrow{\sim} \oplus_{1\leq i\leq r} \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p}_i) \ ,$$

on sait aussi (op. cit.) que, via ces morphismes, la fermeture intégrale $\widetilde{A}$ de A dans $\mathrm{Fr}(A)$ est la somme directe des fermetures intégrales $\widetilde{A/\mathfrak{p}_i}$ des $A/\mathfrak{p}_i$ dans $\mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p}_i)$. Il suit avec ce qui précède que $\widetilde{A}$ est un A-module fini. Il reste à prouver que $|| \cdot ||_{sp}^A$ est de Banach.

Soit $|| \cdot ||$ une norme de Banach sur A, elle induit une norme de Banach $|| \cdot ||_i$ sur $A/\mathfrak{p}_i$, soit $|| \cdot ||^0$ la norme de Banach $||(a_1, \cdots, a_r)||^0 = \max_i ||a_i||$, sur $\oplus_{1\leq i\leq r} A/\mathfrak{p}_i$, cela fait d'ailleurs de ce dernier un A-module de Banach fini, donc $s(A)$ est fermé pour $||\cdot||^0$ et $s : (A, ||\cdot||) \to (s(A), ||\cdot||^0)$ est bicontinu. La norme $\max_i ||\cdot||_{sp}^{A/\mathfrak{p}_i}$ est de Banach sur $\oplus_{1\leq i\leq r} A/\mathfrak{p}_i$, donc équivalente à $||\cdot||^0$, par suite $||\cdot||_{sp}^A = \max_i ||s_i(\cdot)||_{sp}^{A/\mathfrak{p}_i}$ est équivalente sur A à $|| \cdot ||$ et est donc de Banach. $\square$

Remarque 7.21. *Voici quelques propriétés des algèbres affinoïdes que nous ne démontrerons pas ici.*

On dit qu'un sous anneau R de F^0 est discret s'il vérifie

(1) *il existe un sous-corps fermé E de F, discrètement valué, tel que $E^0 \subset R$,*
(2) *il existe $\pi \in F^{00}$ tel que $F^{00} \cap R \subset \pi F^0$,*
(3) *le quotient $\overline{R} := R/(R \cap F^{00})$ est un corps et $\overline{F}$ est une extension algébrique purement inséparable de $\overline{E}$.*

Par exemple, si F est discrètement valué, $R = F^0$ est un sous-anneau discret de F^0.

Soit $(A, ||\cdot||)$ une F-algèbre de Banach, une base normale d'algèbre de l'algèbre $(A, ||\cdot||)$ est une base normale $\{e_i\}_{i\in I}$ de l'espace de Banach $(A, ||\cdot||)$ possédant la propriété suivante : il existe un sous-anneau discret R de F^0 tel que le complété $\widehat{\bigoplus}_{i\in I} Re_i$ soit un sous-anneau de A.

On dit qu'une F-algèbre affinoïde A est distinguée s'il existe un morphisme surjectif $T_n(F) \twoheadrightarrow A$ tel que la norme spectrale $||\cdot||_{sp}^A$ de A soit induite par celle de $T_n(F)$ et que $(A, ||\cdot||_{sp}^A)$ admette une base normale d'algèbre.

Si F est discrètement valué ou algébriquement clos, toutes les F-algèbres affinoïdes réduites sont distinguées.

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme entre deux F-algèbres affinoïdes, avec B distinguée, supposons que $\overline{\varphi}$ soit fini, que $\overline{B} = \sum_{1\leq i\leq r} \overline{\varphi}(\overline{A})\overline{b}_i$, avec les b_i dans B^0, alors $B^0 = \sum_{1\leq i\leq r} \varphi(A^0)b_i$. Si de plus A est réduite, alors $\overline{\varphi}$ est injectif, resp. bijectif, si et seulement s'il en est de même de φ^0.

7.3. **Produit tensoriel d'algèbres affinoïdes.** Soit $\psi : A \to B$ un morphisme entre F-algèbres affinoïdes, on dit que B est une A-algèbre affinoïde.

Par exemple on définit $A < X_1, \cdots, X_n >$ de la manière suivante : on a $\theta : A \simeq F < Y_1, \cdots, Y_m > /I$, on a

$$A < X_1, \cdots, X_n > \simeq \frac{F < Y_1, \cdots, Y_m, X_1, \cdots, X_n >}{IF < Y_1, \cdots, Y_m, X_1, \cdots, X_n >}$$

par un isomorphisme qui restreint à A est θ et qui envoie X_i sur lui-même.

Soit B une A-algèbre affinoïde, la structure des algèbres affinoïdes montre qu'en général il existe un isomorphisme de A-algèbres affinoïdes $B \simeq A < X_1, \cdots, X_n > /J$ où J est un idéal de $A < X_1, \cdots, X_n >$.

Proposition 7.22. *Soient A une F-algèbre affinoïde, B et C deux A-algèbres affinoïdes, on écrit $B \simeq A < \underline{X} > /I$, $C \simeq A < \underline{Y} > /J$, avec*

$\underline{X} = X_1, \cdots, X_n$ et $\underline{Y} = Y_1, \cdots, Y_m$; soient

$$D = \frac{A < \underline{X}, \underline{Y} >}{IA < \underline{X}, \underline{Y} > + JA < \underline{X}, \underline{Y} >}$$

et $\beta : B \to D$, $\gamma : C \to D$ les A-morphismes canoniques ; D est une A-algèbre affinoïde possédant la propriété universelle suivante : pour toute A-algèbre affinoïde E, pour tous A-morphismes $u : B \to E$ et $v : C \to E$ il existe un unique A-morphisme $\varphi : D \to E$ tel que $\varphi \circ \beta = u$, $\varphi \circ \gamma = v$.

Démonstration. Soient $\widetilde{u} : A < \underline{X} > \twoheadrightarrow B \xrightarrow{u} E$ et $\widetilde{v} : A < \underline{Y} > \twoheadrightarrow C \xrightarrow{v} D$, on définit $\widetilde{\varphi} : A < \underline{X}, \underline{Y} > \to E$ tel que $\widetilde{\varphi}|A < \underline{X} >= \widetilde{u}$ et $\widetilde{\varphi}|A < \underline{Y} >= \widetilde{v}$, cette application donne φ. □

Définition 7.23. *Soient A une F-algèbre afinoïde, B et C deux A-algèbres affinoïdes, on appelle produit tensoriel topologique sur A de B et C tout triplet (E, u, v) possédant la propriété universelle de (D, β, γ) de la proposition précédente. On choisit un tel triplet, par exemple celui mis en évidence précédemment et on le note $B\widehat{\otimes}_A C$.*

Remarque 7.24. *Le produit tensoriel topologique $B\widehat{\otimes}_A C$ est en fait le produit fibré de B et C sur A dans la catégorie des F-algèbres affinoïdes.*

Si B ou C est fini sur A, $B\widehat{\otimes}_A C$ est le produit tensoriel algébrique $B \otimes_A C$ des A-algèbres.

8. Les espaces affinoïdes.

Soit A une F-algèbre affinoïde, on fait de son spectre maximal (i.e. de l'ensemble de ses idéaux maximaux) $\mathrm{Spm}A$ un espace topologique de la manière suivante : les ouverts sont les réunions des ensembles de la forme

$$U_A(f_1, \cdots, f_r) = \{\mathfrak{M} \in \mathrm{Spm}A \ / \ |f_1(\mathfrak{M})| = \cdots = |f_r(\mathfrak{M})| = 1\} ,$$

où $f_1, \cdots, f_r \in A$.

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme entre F-algèbres affinoïdes, on désigne par $\varphi^\sharp : \mathrm{Spm}B \to \mathrm{Spm}A$ l'application qui à $\mathfrak{N} \in \mathrm{Spm}B$ associe $\varphi^{-1}(\mathfrak{N})$; l'application $\varphi^\sharp$ est continue, par exemple, si $f \in A$, $(\varphi^\sharp)^{-1}(U_A(f)) = U_B(\varphi(f))$.

8.1. les parties affinoïdes et rationnelles.

Définition 8.1. *Soient A une F-algèbre affinoïde et $X = \mathrm{Spm}A$. On dit qu'une partie Y de X est affinoïde si il existe une F-algèbre affinoïde A_Y et un morphisme $\theta : A \to A_Y$ possédant les propriétés suivantes*

(1) *$\theta^\sharp(\mathrm{Spm}A_Y) \subset Y$,*

(2) *pour toute F-algèbre affinoïde B et tout morphisme $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi^\sharp(\mathrm{Spm}B) \subset Y$, il existe un unique morphisme $\psi : A_Y \to B$ tel que $\psi \circ \theta = \phi$.*

On dit que (A_Y, θ), ou encore que $\theta : A \to A_Y$, est un couple associé à Y ; s'il existe, il est unique à isomorphisme unique près (ce qui autorise à dire "le couple associé" et non "un couple associé").

La proposition suivante donne la liste des premières propriétés des parties affinoïdes.

Proposition 8.2. (1) *Soient A une algèbre affinoïde, $X = \mathrm{Spm}A$, Y une partie affinoïde de X et (A_Y, θ) son couple associé. Alors $\theta^\sharp : \mathrm{Spm}A_Y \to Y$ est une bijection. Si $\mathfrak{N} \in \mathrm{Spm}A_Y$, alors pour tout entier $m > 0$ le morphisme canonique $A/(\theta^\sharp(\mathfrak{N}))^m \to A_Y/\mathfrak{N}^m$ est un isomorphisme, de plus $\mathfrak{N} = \theta(\theta^\sharp(\mathfrak{N}))A_Y$.*

(2) *Soient A une algèbre affinoïde, $X = \mathrm{Spm}A$, Y_1 une partie affinoïde de X et Y_2 une partie affinoïde de Y_1 (ce dernier étant vu comme $\mathrm{Spm}A_{Y_1}$), alors Y_2 est une partie affinoïde de X (son couple associé étant $((A_{Y_1})_{Y_2}, \theta_2 \circ \theta_1)$).*

(3) *Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme entre algèbres affinoïdes, Y une partie affinoïde de $\mathrm{Spm}A$ et (A_Y, θ) son couple associé, alors $(\varphi^\sharp)^{-1}(Y)$ est une partie affinoïde de $\mathrm{Spm}B$ et $(B, \mathrm{Id}_B \otimes \theta : B \to B\widehat{\otimes}_A A_Y)$ est son couple associé.*

(4) *Soient A une algèbre affinoïde, $X = \mathrm{Spm}A$ et $Y_1, \cdots, Y_r$ des parties affinoïdes de X, alors $Y_1 \cap \cdots \cap Y_r$ est une partie affinoïde de X, son couple associé est donné par le morphisme canonique $A \to A_{Y_1}\widehat{\otimes}_A \cdots \widehat{\otimes}_A A_{Y_r}$.*

Démonstration. (1). Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta} & A_Y \\ s\downarrow & \swarrow & \downarrow s_Y \\ \frac{A}{\theta^\sharp(\mathfrak{N})^m} & \xrightarrow{\widetilde{\theta}} & \frac{A_Y}{\mathfrak{N}^m} \end{array}$$

les applications s et s_Y sont les surjections canoniques, $\widetilde{\theta}$ est induite par θ et désignons par φ la flèche oblique $\varphi : A_Y \to \frac{A}{\theta^\sharp(\mathfrak{N})^m}$, son existence provient de la propriété universelle de A_Y, puisque l'image de $s^\sharp$ est $\{\mathfrak{N}\} \subset Y$, donc $\varphi \circ \theta = s$; on a aussi $\widetilde{\theta} \circ \varphi = s_Y$, toujours à cause de cette même propriété universelle ; comme s_Y est surjectif cette dernière relation montre que $\widetilde{\theta}$ est surjectif ; la relation $\varphi \circ \theta = s$ montre que $A_Y = \theta(A) + \mathfrak{N}^m$; on a $\mathrm{Ker}\varphi \supset \mathfrak{N}^m$; si $x \in \mathrm{Ker}\varphi$, $x \notin \mathfrak{N}^m$, on peut supposer $x \in \theta(A)$, donc x a un antécédant y par θ et l'on voit que $y \in \mathrm{Ker}s$, donc $y \in \theta^\sharp(\mathfrak{N})^m$ par suite $x \in \mathfrak{N}^m$. Finalement $\mathrm{Ker}\varphi = \mathfrak{N}^m$, donc $\widetilde{\theta}$ est injectif. On a prouvé que $\widetilde{\theta}$ est un isomorphisme, ceci donne toutes les assertions de (1). Les autres points sont faciles. $\square$

La partie (1) de la proposition permet d'identifier Y et $\mathrm{Spm}A_Y$, ce que nous ferons dorénavant.

Définition 8.3. *Soient A une F-algèbre affinoïde, $X = \mathrm{Spm}A$, $r = \{f_0, \cdots, f_m\} \subset A$ tels que $\sum_{0\leq i\leq m} f_iA = A$. Soit*
$$R = \{x \in X \ / \ |f_i(x)| \leq |f_0(x)| \ \forall \ i = 1, \cdots, m\} \ ,$$
on dit que R est une partie rationnelle de X, que c'est la partie rationnelle de X associée à r. Dans l'algèbre affinoïde $A < Z_1, \cdots, Z_m >$ soit l'idéal $I(r) = \sum_{0\leq i\leq m}(f_i - Z_if_0)A < Z_1, \cdots, Z_m >$, soient $A(r) = A < Z_1, \cdots, Z_m > /I(r)$ et le morphisme canonique $\theta : A \to A(r)$.

Proposition 8.4. *Soient A une F-algèbre affinoïde, R une partie rationnelle de $X = \mathrm{Spm}A$ associée à $r = \{f_0, \cdots, f_m\}$. Alors R est une partie affinoïde de X et $\theta : A \to A(r)$ est le couple associé.*

Il existe $\pi \in F^\times$ tel que $|f_0(x)| \geq |\pi|$ pour tout $x \in R$ (dit d'une manière heuristique, la fonction f_0 est inversible sur R).

Démonstration. Montrons $\theta^\sharp(\mathrm{Spm}A(r)) \subset R$. Soient $s : A < \underline{Z} >= A < Z_1, \cdots, Z_m > \twoheadrightarrow A(r)$ la surjection canonique , $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de$A(r)$ et $\mathfrak{N} = s^{-1}(\mathfrak{M})$, on a $||Z_i||_{sp}^{A<\underline{Z}>} \leq 1$, donc $||f_i||_{sp}^{A(r)} \leq ||f_0||_{sp}^{A(r)}$ pour tout i puisque la norme spectrale de $A(r)$ est majorée par la norme induite par la norme spectrale de $A < \underline{Z} >$. Donc $\theta^\sharp(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N} \cap A$ est dans R.

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme entre algèbres affinoïdes tel que $\varphi^\sharp(\mathrm{Spm}B) \subset R$. Alors $\varphi(f_0)$ n'est dans aucun idéal maximal de B, donc est inversible, de plus, si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de B et $f \in A$, $|\varphi(f)(\mathfrak{M})| = |f(\varphi^\sharp(\mathfrak{M}))|$, donc $||\varphi(f_i)/\varphi(f_0)||_{sp}^B \leq 1$, ce qui permet de définir $\psi : A(r) \to B$ qui est le quotient de l'application $\widetilde{\psi} : A < \underline{Z} > \to B$ telle que $\widetilde{\psi}|A = \varphi$ et $\widetilde{\psi}(T_i) = \varphi(f_i)/\varphi(f_0)$ pour tout i.

On a $f_0 \in A(r)^\times$ et pour tout $x \in \mathrm{Spm}A(r) = R$, $|(1/f_0)(x)| = 1/|f_0(x)|$ montre que $||f_0||_{sp}^{A(r)} \geq (||1/f_0||_{sp}^{A(r)})^{-1}$. $\square$

La proposition suivante compile des propriétés immédiates des parties rationnelles.

Proposition 8.5. (1) *Soient A une algèbre affinoïde, $r = \{f_0, \cdots, f_n\}$ et $r' = \{f'_0, \cdots, f'_m\}$ deux parties de A définissant respectivement les parties rationnelles R et R' de $X = \mathrm{Spm}A$, $\theta_r : A \to A(r)$ et $\theta_{r'} : A \to A(r')$ les morphismes canoniques ; supposons*

$R \supset R'$, alors il existe un unique morphisme $\theta_{r,r'} : A(r) \to A(r')$ tel que $\theta_{r'} = \theta_{r,r'} \circ \theta_r$ et $\theta_{r,r'}$ est un isomorphisme si $R = R'$.

(2) *Soient A une algèbre affinoïde, $r = \{f_0, \cdots, f_n\}$ et $r' = \{f'_0, \cdots, f'_m\}$ deux parties de A définissant respectivement les parties rationnelles R et R' de $X = \mathrm{Spm}A$, alors $R \cap R'$ est une partie rationnelle, définie par $r'' = \{f_0 f'_0, \cdots, f_i f'_j, \cdots\}$, de plus l'homomorphisme $A(r)\widehat{\otimes}_A A(r') \to A(r'')$ induit par $\theta_{r,r''}$ et $\theta_{r',r''}$ est un isomorphisme.*

(3) *Soient A une algèbre affinoïde, R une partie rationnelle de $X = \mathrm{Spm}A$ et R' une partie rationnelle de R (ce dernier vu comme le spectre maximal de l'algèbre $A(r)$), alors R' est une partie rationnelle de X.*

(4) *Soient $\varphi : A \to B$ un homomorphisme entre F-algèbres affinoïdes et R une partie rationnelle de $X = \mathrm{Spm}A$, alors $(\varphi^\sharp)^{-1}(R)$ est une partie rationnelle de $Y = \mathrm{Spm}B$; si R est associée à $r = \{f_0, \cdots, f_n\}$ alors $(\varphi^\sharp)^{-1}(R)$ l'est à $\varphi(r) := \{\varphi(f_0), \cdots, \varphi(f_n)\}$; de plus, de $\theta_{\varphi(r)} \circ \varphi : A \to B(\varphi(r))$ il résulte (par la propriété universelle) un unique morphisme $A(r) \to B(\varphi(r))$, qui induit avec φ un isomorphisme $A(r)\widehat{\otimes}_A B \xrightarrow{\sim} B(\varphi(r))$.*

Le résultat suivant est important, sa démonstration est délicate.

Théorème 8.6. *(Grauert-Gerritzen,* [19]*) Soient A une algèbre affinoïde et Y une partie affinoïde de $X = \mathrm{Spm}A$. Alors Y est une réunion finie de parties rationnelles de X.*

9. Le site $\mathrm{Spm}A$.

Nous définissons une topologie de Grothendieck sur le spectre maximal d'une algèbre affinoïde, puis un pré-faisceau structural, qui s'avèrera être un faisceau. Eb n toute généralité la définition d'une topologie de Grothendieck est la suivante

Définition 9.1. *Une topologie de Grothendieck $\mathcal{G}$ est la donnée d'une catégorie ouv$(\mathcal{G})$ et d'un ensemble cov$(\mathcal{G})$, les objets de ce derniers étant des familles $(U_i \to U)_{i\in I}$ de morphismes de ouv$(\mathcal{G})$ soumises aux conditions suivantes*

(1) *pour tout $(U_i \to U)_{i\in I}$ de cov$(\mathcal{G})$ et tout morphisme $V \to U$ de ouv$(\mathcal{G})$ les produits fibrés $U_i \times_U V$ existent et $(U_i \times_U V \to V)_{i\in I}$ est dans cov$(\mathcal{G})$,*

(2) *soient* $(U_i \to U)_{i\in I}$ *et, pour tout* $i \in I$, $(U_{i,j} \to U_i)_{j\in J_i}$ *des éléments de* $cov(\mathcal{G})$, *alors* $(U_{i,j} \to U)_{i,j}$, *obtenu par composition des morphismes dans* $ouv(\mathcal{G})$, *est un élément de* $cov(\mathcal{G})$,

(3) *les isomorphismes* $V \xrightarrow{\sim} U$ *de* $ouv(\mathcal{G})$ *sont dans* $cov(\mathcal{G})$.

Les objets de $ouv(\mathcal{G})$ *s'appellent souvent les ouverts de la topologie et les éléments de* $cov(\mathcal{G})$ *les recouvremens admissibles.*

Dans l'immédiat nous allons utiliser la définition suivante, qui est moins générale mais adaptée aux espaces déjà munis d'une topologie (au sens ordinaire).

Définition 9.2. *Une topologie de Grothendieck sur un espace topologique* X *est la donnée*

(1) *d'un ensemble* $\mathcal{A}$ *d'ouverts de* X *telle que* $\emptyset$ *et* X *soient dans* $\mathcal{A}$ *et que si* U *et* V *sont deux éléments de* $\mathcal{A}$ *alors* $U \cap V$ *est encore dans* $\mathcal{A}$ *; les éléments de* $\mathcal{A}$ *sont appelés les ouverts admissibles ;*

(2) *pour tout* $U \in \mathcal{A}$ *d'un ensemble* $Cov(U)$ *de recouvrements ouverts de* U *formé d'éléments de* $\mathcal{A}$ *et soumis aux axiomes suivants*

   (a) *pour tout* $U \in \mathcal{A}$ *le recouvrement* $\{U\}$ *réduit à* U *est dans* $Cov(U)$ *;*

   (b) *pour tous* $U, V \in \mathcal{A}$, *avec* $V \subset U$, *et pour tout* $\mathcal{U} \in Cov(U)$, $\mathcal{U} \cap V = \{W \cap V\}_{W\in\mathcal{U}}$ *est dans* $Cov(V)$ *;*

   (c) *pour tous* $U \in \mathcal{A}$ *et* $\mathcal{U} \in Cov(U)$, *pour tous* $V \in \mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}_V \in Cov(V)$,

$$\bigcup_{V\in\mathcal{U}} \mathcal{V}_V = \{W \ / \ \text{il existe } V \in \mathcal{U} \text{ avec } W \in \mathcal{V}_V\}$$

   est dans $Cov(U)$ *;*

les éléments de $Cov(U)$ *sont appelés les recouvrements admissibles de* U.

Soit A une F-algèbre affinoïde et $X = \mathrm{Spm}A$. On a déjà mis sur X une topologie. On définit sur X une première topologie de Grothendieck qui est la suivante :

– les ouverts admissibles sont les parties rationnelles,
– les recouvrements admissibles sont les recouvrements par des ouverts admissibles qui admettent des recouvrements plus fins finis,

(soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux éléments de $Cov(U)$, on dit que $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$ si pour tout $V \in \mathcal{V}$ il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V \subset U$).

Soit A une F-algèbre affinoïde et $X = \mathrm{Spm}A$. Si R est une partie rationnelle de X associée à $r \subset A$, on pose $\mathcal{O}_X(R) = A(r)$; ceci définit un préfaisceau sur X, les restrictions étant données par la propriété universelle des parties affinoïdes. Si M est un A-module, on désigne par $\widetilde{M}$ le préfaiceau sur X défini par $\widetilde{M}(R) = M \otimes_A \mathcal{O}_X(R)$; $\widetilde{M}$ est un préfaisceau de $\mathcal{O}_X$-modules.

Théorème 9.3. *(Tate,* [48]*) Soit A une F-algèbre affinoïde, M un A-module et $X = \mathrm{Spm}A$ muni de la topologie de Grothendieck précédente (par les parties rationnelles), alors $\widetilde{M}$ est acyclique pour la cohomologie de Čech de tout recouvrement admissible de X ; $\widetilde{M}$ est un faisceau, en particulier $\mathcal{O}_X$ est un faisceau.*

Il suit alors du théorème de Gerritzen et Grauert que l'on peut définir une nouvelle topologie de Grothendieck sur le spectre maximal d'un algèbre affinoïde.

Définition 9.4. *Soit A une F-algèbre affinoïde et $X = \mathrm{Spm}A$. On définit sur X la topologie de Grothendieck suivante :*
- *les ouverts admissibles sont ses parties affinoïdes,*
- *les recouvrements admissibles sont les recouvrements par des ouverts admissibles qui admettent des recouvrements plus fins finis.*

Le faisceau $\mathcal{O}_X$ est défini sur les parties affinoïdes par $\mathcal{O}_X(Y) = A_Y$ (notations de la définition 8.2) ; si M est un A-module le faisceau $\widetilde{M}$ est défini sur les parties affinoïdes par $\widetilde{M}(Y) = M \otimes_A A_Y$.

Muni de cette topologie de Grothendieck on dit que $X = \mathrm{Spm}A$ est un espace (analytique) affinoïde.

Théorème 9.5. *(Tate, Gerritzen-Grauert,* [48], [19]*) Soit A une F-algèbre affinoïde, $\widetilde{M}$ un A-module et $X = \mathrm{Spm}A$ muni de la topologie de Grothendieck donnée en 9.4, alors $\widetilde{M}$ est acyclique pour la cohomologie de Čech de tout recouvrement admissible de X ; $\widetilde{M}$ est un faisceau, en particulier $\mathcal{O}_X$ est un faisceau.*

On dit que $\mathcal{O}_X$ est le faisceau structural de l'espace affinoïde X, que le faisceau $\widetilde{M}$ est quasi-cohérent, cohérent si M est un A-module de type fini.

9.1. **La fibre du faisceau structural.** Soient A une F-algèbre affinoïde et $x \in X = SpmA$, si Y et Y' sont deux parties affinoïdes de X, avec $Y' \subset Y$, on désigne par $\rho_{Y,Y'} : \mathcal{O}_X(Y) \to \mathcal{O}_X(Y')$ le morphisme canonique (la restriction de Y à Y') ; la fibre de $\mathcal{O}_X$ en x est

$$\mathcal{O}_{X,x} = \varinjlim_{x\in Y} \mathcal{O}_X(Y) \ ,$$

où Y décrit les parties affinoïdes de X contenant x. Pour toute partie affinoïde Y de X et tout $x \in X$ on note $\rho_{Y,x} : \mathcal{O}_X(Y) \to \mathcal{O}_{X,x}$ le morphisme canonique.

En particulier si $A = T_n = F < \underline{Z} >= F < Z_1, \cdots, Z_n >$ et si 0 est le point de X représenté par l'idéal maximal $\mathfrak{M}_0 = (Z_1, \cdots, Z_n)$, on écrit $\mathcal{O}_{X,0} = F\{\underline{Z}\} = F\{Z_1, \cdots, Z_n\}$, c'est l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage du point 0 de X, il peut aussi être vu comme l'ensemble des éléments u de $F[[\underline{Z}]] = F[[Z_1, \cdots, Z_n]]$ qui possèdent un rayon de convergence.

Par un raisonnement très proche de celui utilisé pour les algèbres affinoïdes, on montre qu'il existe dans $F\{\underline{Z}\}$ une "préparation de la variable à la Weierstraß", par suite une division euclidienne, dont il résulte, comme pour les algèbres affinoïdes

Proposition 9.6. *L'anneau $F\{\underline{Z}\} = F\{Z_1, \cdots, Z_n\}$ est noethérien et factoriel. C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{M}_0 = (Z_1, \cdots, Z_n)$, il est de dimension de Krull n.*

Proposition 9.7. *Soient A une algèbre affinoïde, $x \in X = \mathrm{Spm}A$, $\mathfrak{M}_x$ l'idéal maximal de A correspondant à x et $\rho_{X,x} : A \to \mathcal{O}_{X,x}$ le morphisme canonique de A dans la fibre en x. Alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local, $\rho_{X,x}(\mathfrak{M}_x)\mathcal{O}_{X,x}$ est son unique idéal maximal et l'on a un isomorphisme canonique $A/\mathfrak{M}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\left(\rho_{X,x}(\mathfrak{M}_x)\mathcal{O}_{X,x}\right)$.*

Démonstration. Pour alléger les notations on n'écrit pas les applications $\rho_{X,x}$, etc. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$, $f \notin \mathfrak{M}_x\mathcal{O}_{X,x}$, il existe une partie rationnelle R de X tel que $f \in \mathcal{O}_X(R)$, $x \in R$ et donc $f(x) \neq 0$. Soit R' l'ensemble de y de R tels que $|f(y| \geq |f(x)|$, c'est une partie rationnelle de R, donc de X, contenant x et sur laquelle f ne s'annule pas, donc $f \in \mathcal{O}_X(R')^\times$, par suite $f \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$.

Il reste à montrer $A/\mathfrak{M}_x \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_x\mathcal{O}_{X,x}$, mais cela résulte de la partie (1) de la proposition 8.2. □

En général, comme dans cette démonstration, afin d'alléger le texte, on n'écrit pas les morphismes $\rho_{X,x}$ ou encore $\rho_{Y,Y'}$.

Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme de F-algèbres affinoïdes, $\varphi^\sharp : Y = \mathrm{Spm}B \to X = \mathrm{Spm}A$, $y \in Y$ et $x = \varphi^\sharp(y) \in X$, $R \subset X$ une partie rationnelle et $(\varphi^\sharp)^{-1}(R) \subset Y$; on a un morphisme canonique

$$\varphi^\sharp_R : \mathcal{O}_X(R) \to \mathcal{O}_Y((\varphi^\sharp)^{-1}(R)) \ ,$$

qui considéré pour tout R est le morphisme $\mathcal{O}_X \to (\varphi^\sharp)_*\mathcal{O}_Y$; par passage aux limites inductives on en déduit un morphisme canonique $\varphi_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ dont on vérifie que c'est un morphisme local.

Proposition 9.8. *Soient A une F-algèbre affinoïde, $\varphi : F < \underline{Z} >= F < Z_1, \cdots, Z_n > \to A$ un morphisme surjectif, $x \in X = \mathrm{Spm}A$, $y = \varphi^\sharp(x) \in Y = \mathrm{Spm}F < \underline{Z} >$. Alors $\varphi_x : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est surjectif* *et induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{F<\underline{Z}>} A \simeq \mathcal{O}_{X,x}$. En particulier $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau noethérien (et local).*

Démonstration. Soit R une partie rationnelle de X,

$$R = \{t \in X \ / \ |f_i(t)| \leq |f_0(t)|\}$$

avec les f_i dans A, $0 \leq i \leq r$, soient $g_i \in F < \underline{Z} >$ tel que $\varphi(g_i) = f_i$ et

$$R' = \{t \in Y \ / \ |g_i(t)| \leq |g_0(t)|\} \ .$$

Comme φ est surjectif on a $\varphi^\sharp(R) = R'$. La proposition résulte des deux assertions suivantes, que nous allons démontrer : $\mathcal{O}_Y(R') \overset{\varphi_{R'}}{\to} \mathcal{O}_X(R)$ est surjectif et $\mathcal{O}_Y(R') \otimes_{F<\underline{Z}>} A \simeq \mathcal{O}_X(R)$.

Soient $u \in \mathcal{O}_X(R) = A < \underline{T} > /(f_i - T_i f_0)_i$ et $\widetilde{u} = \sum_{\underline{j}} u_{\underline{j}} \underline{T}^{\underline{j}} \in A < \underline{T} >$ qui relève u. Soient $\widetilde{v} = \sum_{\underline{j}} v_{\underline{j}} \underline{T}^{\underline{j}} \in F < \underline{Z}, \underline{T} >$ avec $\varphi(v_{\underline{j}}) = u_{\underline{j}}$ et v l'image de $\widetilde{v}$ dans $\mathcal{O}_Y(R') = F < \underline{Z}, \underline{T} > /(g_i - T_i g_0)_i$, alors v est un antécédent de u par $\varphi_{R'}$.

On a une application naturelle $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{F<\underline{Z}>} A \to \mathcal{O}_{X,x}$ (dont on sait avec ce qui précède qu'elle est surjective), nous construisons l'application inverse. Soit $u \in \mathcal{O}_{X,x}$, soit R une partie rationnelle de X telle que $u \in \mathcal{O}_X(R)$ et, comme au dessus, $v \in \mathcal{O}_Y(R')$ un antécédent de u par $\varphi_{R'}$. On voit que $v \otimes 1 \in \mathcal{O}_{Y,y} \otimes_{F<\underline{Z}>} A$ ne dépend pas du choix de l'antécédent v, et ceci déterminera l'application inverse, sous réserve de prouver que $\mathrm{Ker}\varphi_{R'} = (\ker \varphi)\mathcal{O}_Y(R')$ et ceci est une conséquence de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F < \underline{Z}, \underline{T} > & \overset{\widetilde{\varphi}}{\to} & A < \underline{T} > \\ s \downarrow & & \downarrow s' \\ \frac{F<\underline{Z},\underline{T}>}{(g_i - T_i g_0)_i} & \overset{\varphi_{R'}}{\to} & \frac{A<\underline{T}>}{(f_i - T_i f_0)_i} \end{array}$$

où $\widetilde{\varphi}$ est défini par $\widetilde{\varphi}|F < \underline{Z} >= \varphi$ et $\widetilde{\varphi}(T_i) = T_i$, où s et s' sont les surjections canoniques. $\square$

Théorème 9.9. *Soient A une algèbre affinoïde, $x \in X = \mathrm{Spm}A$, $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de A qui représente x, $A_{\mathfrak{M}}$ le localisé de A en $\mathfrak{M}$, $\widehat{A}_{\mathfrak{M}}$ son complété $\mathfrak{M}$-adique, $\alpha : A \to A_{\mathfrak{M}}$ et $\beta : A_{\mathfrak{M}} \to \widehat{A}_{\mathfrak{M}}$ les morphismes canoniques. Soient $\rho_x : A \to \mathcal{O}_{X,x}$ le morphisme canonique et $\widehat{(\mathcal{O}_{X,x})}_{\mathfrak{M}\mathcal{O}_{X,x}}$ le complété $\mathfrak{M}\mathcal{O}_{X,x}$-adique de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors il existe des morphismes $a : A_{\mathfrak{M}} \to \mathcal{O}_{X,x}$ et $b : \mathcal{O}_{X,x} \to \widehat{A}_{\mathfrak{M}}$ tels que : a et b sont fidèlement plats, $b \circ a = \beta$, $a \circ \alpha = \rho_x$, de plus $\widehat{(\mathcal{O}_{X,x})}_{\mathfrak{M}\mathcal{O}_{X,x}} \simeq \widehat{A}_{\mathfrak{M}}$ via le morphisme b et ρ_x est plat.*

Démonstration. Si $u \in A$, $u \notin \mathfrak{M}$, il existe une partie rationnelle R de X contenant x sur laquelle u ne s'annule pas, donc $1/u \in \mathcal{O}_X(R)$. Ceci prouve l'existence de a.

On a $a(\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M}\mathcal{O}_{X,x}$ donc en particulier $a(\mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}) \neq \mathcal{O}_{X,x}$.

On a $\mathcal{O}_{X,x}/\left(\mathfrak{M}^r\mathcal{O}_{X,x}\right) \simeq A_{\mathfrak{M}}/\left(\mathfrak{M}^r A_{\mathfrak{M}}\right)$, d'où l'existence de b, de l'isomorphisme entre les complétés $\mathfrak{M}$-adiques et le fait que $b \circ a = \beta$.

Il reste à prouver que a et b sont fidèlement plats, pour cela on utilise les résultat suivants. Soit $m : B \to C$ un morphisme d'anneaux commutatifs et unitaires ; alors si ce sont des anneaux locaux, m est fidèlement plat si et seulement s'il est plat et si $m(\mathfrak{M}_B) \neq C$ (où $\mathfrak{M}_B$ est l'idéal maximal de B) ; m est plat si et seulementt si pour tout idéal I de B, l'homomorphisme $m \otimes \mathrm{Id} : I \otimes_B C \to m(I)C$ est un isomorphisme. Soit I un idéal de $A_{\mathfrak{M}}$, si $I \otimes_{A_{\mathfrak{M}}} \mathcal{O}_{X,x} \to I\mathcal{O}_{X,x}$ a un noyau, il en est de même de

$$(I \otimes_{A_{\mathfrak{M}}} \mathcal{O}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \widehat{A}_{\mathfrak{M}} \to I\widehat{A}_{\mathfrak{M}}$$

qui est injectif car fidèlement plat. On a prouvé que a est fidèlement plat.

Comme il a été fait au dessus, pour toute partie rationnelle R de X contenant x on a $(\widehat{\mathcal{O}_X(R)})_{\mathfrak{M}\mathcal{O}_X(R)} \simeq \widehat{A}_{\mathfrak{M}}$, donc le morphisme canonique $\mathcal{O}_X(R) \to \widehat{A}_{\mathfrak{M}}$ est plat. Soit I un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et soit R une partie rationnelle de X contenant x et telle qu'un système générateur (fini) de I soit dans $\mathcal{O}_X(R)$, soit J l'idéal de $\mathcal{O}_X(R)$ engendré par ce système générateur. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} J \otimes_{\mathcal{O}_X(R)} \widehat{A}_{\mathfrak{M}} & \stackrel{\sim}{\to} & J\widehat{A}_{\mathfrak{M}} \\ \downarrow & & \shortparallel \\ I \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \widehat{A}_{\mathfrak{M}} & \to & I\widehat{A}_{\mathfrak{M}} \end{array}$$

par conséquent la flèche horizontale du bas ne peut avoir de noyau. Donc b est fidèlement plat. □

Corollaire 9.10. *Soient A une algèbre affinoïde, Y une partie affinoïde de $X = \mathrm{Spm}A$, alors l'application $A \to A_Y$ du couple associé à Y est plate.*

10. La réduction canonique des espaces affinoïdes.

Soit A une F-algèbre affinoïde, $\overline{A} = A^0/A^{00}$ est une algèbre de type fini sur $\overline{F} = F^0/F^{00}$. Soient $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A et $L = A/\mathfrak{M}$, ce dernier est une extension finie de F ; on a le diagramme commutatif

$$(7)\qquad \begin{array}{ccc} A & \stackrel{\varphi}{\to} & L \\ \cup & & \cup \\ A^0 & & L^0 \\ s\downarrow & & \downarrow\overline{s} \\ \overline{A} & \stackrel{\overline{\varphi}}{\to} & \overline{L} \end{array}$$

où φ, s et $\overline{s}$ sont les surjections canoniques et où $\overline{\varphi}$ est induite par ces applications. Soit $\overline{\mathfrak{M}} = \mathrm{Ker}\overline{\varphi}$, c'est un idéal maximal de $\overline{A}$. On vient de définir une application $r : \mathrm{Spm}A \to \mathrm{Spm}\overline{A}$, $\mathfrak{M} \mapsto \overline{\mathfrak{M}}$, appelée *réduction canonique de l'espace affinoïde* Spm$A$.

Proposition 10.1. *Soient A une F algèbre affinoïde, $s : A^0 \to \overline{A}$ la surjection canonique, $X = \mathrm{Spm}A$, $\overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$ et $r : X \to \overline{X}$ la réduction canonique. Soit $x \in X$ représenté par l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, alors $r(x)$ est représenté par l'idéal $s(\sqrt{\mathfrak{M} \cap A^0 + A^{00}})$ de $\overline{A}$. L'application r est surjective.*

Démonstration. On considère le diagramme (7), il est facile de vérifier que $\sqrt{\mathfrak{M} \cap A^0 + A^{00}} \subset \mathrm{Ker}(\overline{\varphi} \circ s)$, montrons l'inclusion inverse. Soit $a \in \mathrm{Ker}(\overline{\varphi} \circ s)$, on a $|a(x)| < 1$, donc si $P(T) = \mathrm{irr}(a(x), \overline{F}; T) = T^d + \alpha_1 T^{d-1} + \cdots + \alpha_d$, on a $\alpha_i \in F^{00}$, par conséquent, la relation $P(a(x)) = 0$ implique $P(a) \in \mathfrak{M}$, par suite $a^d \in \mathfrak{M} + A^{00}$.

Montrons que r est surjectif. Soit $\mathfrak{N}$ un idéal maximal maximal de $\overline{A}$, écrivons $\mathfrak{N} = (\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_\ell)$ avec $a_i \in A^0$, soit $I = (a_1, \cdots, a_\ell)$, c'est un idéal de A. Montrons $I \neq A$. Sinon on a une relation $1 = \sum_{1\leq i\leq \ell} \alpha_i a_i$ avec $\alpha_i \in A$; si les a_i sont dans A^0 il vient $1 = \sum_{1\leq i\leq \ell} \overline{\alpha}_i \overline{a}_i \in \mathfrak{N}$, ce qui est impossible. Donc $\max ||\alpha_i||_{sp}^A > 1$; soit $\lambda \in F$ tel que $|\lambda|^{-d} = \max ||\alpha_i||_{sp}^A > 1$ pour un certain entier $d > 0$ et pour simplifier l'écriture supposons que le maximum des $||\alpha_i||_{sp}^A$ est obtenu pour $i = 1$, on a $1 = \sum_{1\leq i\leq \ell} \alpha_i a_i$, donc $\lambda \alpha_1^{d-1} = \sum_{1\leq i\leq \ell} (\lambda \alpha_1^{d-1} \alpha_i) a_i$, par suite dans $\overline{A}$, $0 = \sum_{1\leq i\leq \ell} \overline{(\lambda \alpha_1^{d-1} \alpha_i)} \overline{a}_i$, il suffit donc d'avoir fait l'hypothèse que ℓ est minimal pour avoir une contradiction.

On a donc prouvé $I \neq A$, soit donc $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A contentant I, clairement $\mathfrak{M} \cap A^0 + A^{00} \subset s^{-1}(\mathfrak{N})$, donc avec la première partie de cette démonstration, $s(\sqrt{\mathfrak{M} \cap A^0 + A^{00}}) = \mathfrak{N}$. $\square$

Exemple 10.2. *$X = \mathrm{Spm}F < Z >$, alors $\overline{F < Z >} = \overline{F}[Z]$. Supposons F algébriquement clos, alors X s'identifie à F^0, $\overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{F}[Z]$ est une droite affine sur $\overline{F}$, donc s'identifie à $\overline{F}$ et la réduction canonique $r : X \to \overline{X}$ devient la réduction ordinaire $F^0 \to \overline{F}$.*

Définition 10.3. *Soient A une F-algèbre affinoïde et $r : X = \mathrm{Spm}A \to \overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$ la réduction canonique de son spectre maximal. Une partie de X de la forme $r^{-1}(U)$ ou U est un ouvert de Zariski de $\overline{X}$ est dite formelle (ou pure).*

La proposition suivante donne des propriétés des parties formelles.

Proposition 10.4. (1) *Soient A une F-algèbre affinoïde, $r : X = \mathrm{Spm}A \to \overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$ la réduction canonique, $f \in A^0$ et $\overline{f} \neq 0$ son image dans $\overline{A}$, supposée non nulle, et*

$$X_f := r^{-1}(D(\overline{f})) = \{x \in X \ / \ |f(x)| = 1\} \ ;$$

c'est une partie rationnelle de X et les parties formelles de X sont des réunions finies de X_f.

(2) *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de F-algèbres affinoïdes, $\varphi^\sharp : X = \mathrm{Spm}B \to Y = \mathrm{Spm}A$, r_X et r_Y les réductions canoniques respectives, alors $r_Y \circ \varphi^\sharp = (\mathrm{Spm}\overline{\varphi}) \circ r_X$, par suite l'image inverse par $\varphi^\sharp$ d'une partie formelle de Y est une partie formelle de X.*

(3) *Soient A une F-algèbre affinoïde, $r : X = \mathrm{Spm}A \to \overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$ la réduction canonique, $f \in A^0$. Soit $\rho : A \to \mathcal{O}_X(r^{-1}(D(\overline{f})))$ le morphisme canonique, alors $\overline{\rho} : \overline{A} \to \overline{\mathcal{O}_X(r^{-1}(D(\overline{f}))}$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_{\overline{X}}(D(\overline{f}) \to \overline{\mathcal{O}_X(r^{-1}(D(\overline{f}))}$.*

Démonstration. Seule troisième partie demande une démonstration et l'on peut supposer $\overline{f} \neq 0$, donc $||f||_{sp}^A = 1$, on a $\mathcal{O}_X(r^{-1}(D(\overline{f}))) = A < T > /(fT-1)$. Soit $s : A < T > \to A < T > /(fT-1)$ la surjection canonique, supposons

$$s(A < T >^0) = (A < T > /(fT-1))^0 \ \text{ et}$$
$$s(A < T >^{00}) = (A < T > /(fT-1))^{00} \ ,$$

alors s donne une surjection $\overline{A < T >} \to \overline{A < T > /(fT-1)}$ dont découle le résultat voulu. Montrons ces formules. Soit $u \in A < T >$ tel que $s(u) \in (A < T > /(fT-1))^0$, on écrit $u = \sum_{i \geq 0} u_i T^i$ avec les $u_i \in A$, soit m_1 tel que $|| \sum_{i > m_1} u_i T^i ||_{sp}^{A<T>} < ||s(u)||_{sp}^{(A<T>/(fT-1))}$, on a

$$f^{m_1} u = \sum_{0 \leq i \leq m_1} u_i f^{m_1 - i} + \sum_{0 \leq i \leq m_1} u_i f^{m_1 - i}(f^i T^i - 1) + f^{m_1} \sum_{i > m_1} u_i T^i \ ,$$

soit $v_1 = \sum_{0 \leq i \leq m_1} u_i f^{m_1 - i}$, on a $||s(f^{m_1} u - v_1)||_{sp}^{A<T>/(fT-1)} < 1$ et $v_1 \in A$; on a $|v_1(x)| \leq 1$ pour tout $x \in X_f$, puisque $s(u) \in (A < T > /(fT-1))^0$, si $||v_1||_{sp}^A \leq 1$ on s'arrête ; supposons $||v_1||_{sp}^A > 1$, alors comme $X_{v_1} \cap X_f = \emptyset$ (pour la notation X_{v_1} voir la remarque suivante) on a $\max_{x \in X_{v_1}} |f(x)| < 1$ (c'est un maximum et non une borne supérieure car X_{v_1} est un espace affinoïde), donc il existe un entier $m_2 > 0$ tel que $\max_{x\in X_{v_1}} |f(x)^{m_2} v_1(x)| < 1$; posons $v_2 = f^{m_2} v_1$, si $||v_2||_{sp}^A \leq 1$ on s'arrête, sinon on recommence ce qui vient d'être fait ; on construit ainsi un recouvrement de Spm$A$ éventuellement infini, $\{X_f, X_{v_1}, X_{v_2}, \cdots\}$, on peut en extraire un recouvrement fini car il est formé d'ouverts formels et de son image dans la variété affine Spm$\overline{A}$ on peut en extraire un recouvrement fini ; on a prouvé qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $||f^m v_1||_{sp}^A \leq 1$, donc $f^{m+m_1}u$ appartient à $A < T >^0$ modulo un élément de $(fT-1)$,écrivons $f^{m+m_1}u = w_1 + w_2$ avec $w_1 \in A < T >^0$ et $w_2 \in (fT-1)A$, on a donc

$$u = T^{m+m_1} f^{m+m_1} u + (1 - T^{m+m_1} f^{m+m_1})u = T^{m+m_1} f^{m+m_1} w_1 + w_3$$

avec $w_3 = T^{m+m_1} w_2 + (1 - T^{m+m_1} f^{m+m_1})u \in (fT-1)A$, donc $u - w_3$ est un antécédent de $s(u)$ dans $A < T >^0$. Ceci prouve les formules cherchées.

□

Remarque 10.5. *Soient A une F-algèbre affinoïde, $r : X = \mathrm{Spm}A :\to \overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$ la réduction canonique, $f \in A$, $f \neq 0$, il existe $\lambda \in F$ et un entier $d > 0$ tels que $||\lambda f^d||_{sp} = 1$; on a*

$$X_{\lambda f^d} = \{x \in X \ / \ |f(x)| = ||f||_{sp}\} \ ;$$

le membre de droite de cette égalité se note encore X_f.

Les ouverts formels de $X = \mathrm{Spm}A$ de la forme X_f, $f \in A$, s'appellent des ouverts formels principaux.

Le résultat suivant est difficile à prouver.

Théorème 10.6. *(Kiehl,* [31]*) Soient A une F-algèbre affinoïde et $r : X = \mathrm{Spm}A \to \overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$ la réduction canonique, soit U un ouvert de Zariski de $\overline{X}$, alors $r^{-1}(U)$ est une partie affinoïde de X.*

L'ensemble de ces résultats donnent

Théorème 10.7. *Soient A une F-algèbre affinoïde, $X = \mathrm{Spm}A$ et $\overline{X} = \mathrm{Spm}\overline{A}$, alors la réduction canonique est un morphisme $r : (X, \mathcal{O}_X) \to (\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ d'espaces annelés localement annelés en anneaux locaux.*

Exemple 10.8. *Soit $X = \mathrm{Spm}F < Z >$ et $Y = \mathrm{Spm}F < Z, 1/Z >= \mathrm{Spm}(F < Z, T > /(ZT-1))$; Y est une partie formelle de X, $Y = X_Z$.*

11. LES ESPACES ANALYTIQUES RIGIDES.

La lettre F désigne toujours un corps valué complet.

Définition 11.1. *Un F-espace (analytique) affinoïde est la donnée d'un espace topologique muni d'une topologie de Grothendieck et d'un faisceau de F-algèbres $(X, \mathcal{G}_X, \mathcal{O}_X)$, et d'un isomorphisme $\phi = (\varphi^\sharp, \varphi)$ avec le spectre maximal* $\mathrm{Spm}A$ *d'une F-algèbre affinoïde A muni de la topologie de Grothendieck et du faisceau structural précédemment définis ; cela veut dire que $\varphi^\sharp : X \to \mathrm{Spm}A$ est un isomorphisme d'espaces topologiques munis de topologies de Grothendieck, que $\varphi : \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}A} \to \varphi^\sharp_* \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme de faisceaux de F-algèbres.*

Un F-espace analytique rigide est la donnée d'un espace topologique muni d'une topologie de Grothendieck et d'un faisceau de F-algèbres $(X, \mathcal{G}_X, \mathcal{O}_X)$, et d'un recouvrement admissible $(U_i)_{i\in I}$ de X tels que $(U_i, \mathcal{G}_X|U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ soit un F-espace affinoïde, pour tout $i \in I$.

Un espace analytique rigide est donc un recollement d'espaces affinoïdes, il en est de même des morphismes : un morphisme $\phi : X \to Y$ est la donnée

- *d'une application $\varphi : X \to Y$,*
- *de recouvrements admissibles affinoïdes (i.e. formés d'espaces affinoïdes) $(X_i)_{i\in I}$ de X et $(Y_j)_{j\in J}$ de Y et d'une application $\zeta : I \to J$,*
- *de telle manière que, pour tout $i \in I$, $\varphi|X_i$ soit un morphisme d'espaces affinoïdes à valeurs dans $Y_{\zeta(i)}$ et que, pour tous i et i' dans I, $\varphi|X_i$ et $\varphi|X_{i'}$ coïncident sur $X_i \cap X_{i'}$ en tant que morphismes d'espaces affinoïdes.*

Exemple 11.2. *La droite projective analytique rigide. Soient U_0 et U_∞ deux copies de* $\mathrm{Spm}F < Z >$ *collées de la manière suivante :*

$$U_0 = \mathrm{Spm}F < Z_1 > \supset \mathrm{Spm}F < Z_1, 1/Z_1 >$$

$$\overset{Z_1 \mapsto Z_2^{-1}}{\simeq} \mathrm{Spm}F < Z_2, 1/Z_2 > \subset \mathrm{Spm}F < Z_2 > = U_\infty \ ,$$

si F est algébriquement clos, on peut identifier U_0 avec le disque circonférencié de centre 0 et de rayon 1, U_∞ avec celui “centré à l'infini et de rayon 1”, i.e. $\{z \in F \ / \ |z| \geq 1\} \cup \{\infty\}$, et l'on colle U_0 et U_∞ sur “leur bord ” $\{|z| = 1\}$; on obtient la sphère de Riemann de la géométrie rigide.

11.1. **Faisceaux sur un espace analytique rigide.**

Les espaces analytiques rigides étant des recollements d'espaces affinoïdes on définit les faisceaux quasi-cohérents, cohérents, localement libres... à partir de ces mêmes notions sur les espaces affinoïdes, de même pour la notion de morphisme de faisceaux.

Définition 11.3. *Soit* $X = \mathrm{Spm}A$ *un espace affinoïde, un faisceau* $\mathcal{F}$ *sur* X *est quasi-cohérent, resp. cohérent, resp. localement libre... s'il existe un recouvrement admissible (fini)* $(U_i)_{1\leq i\leq m}$ *et pour tout* i *un* $\mathcal{O}_X(U_i)$*-module* M_i*, resp. de type fini, resp. localement libre..., tel que la restriction de* $\mathcal{F}$ *à* U_i *soit le faisceau*

$$\mathcal{F}|U_i = \widetilde{M_i} := \Big(V \mapsto M_i \otimes_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{O}_X(V)\Big) \ ,$$

on dit que le recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq m}$ *trivialise* $\mathcal{F}$*. Un morphisme de tels faisceaux se ramène, par un recouvrement qui les trivialise tous deux, à une collection de morphismes de modules soumis à des compatibilités...*

Il se déduit de ceci les mêmes notionspour les espaces analytiques rigides, puisqu'ils sont des recollement d'espaces affinoïdes.

Proposition 11.4. *Soit* X *un espace analytique.*

(1) *Soit* $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *un morphisme de faisceaux quasi-cohérents, resp. cohérents, sur* X*. Alors* φ *possède un noyau et une image, qui sont des faisceaux quasi-cohérents, resp. cohérents.*

(2) *Soit* $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ *une suite de faisceaux quasi-cohérents sur* X*, alors elle est exacte si et seulement si pour tout* $x \in X$ *la suite des fibres* $0 \to \mathcal{F}_{1,x} \to \mathcal{F}_{2,x} \to \mathcal{F}_{3,x} \to 0$ *est exacte.*

La première partie ce cette proposition n'est pas difficile à prouver, la seconde est une question locale, donnée par le lemme suivant (qui d'ailleurs en dit un peu plus).

Lemme 11.5. *Soient* $X = \mathrm{Spm}A$ *un espace affinoïde,* $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ *une suite de* A*-modules, elle est exacte si et seulement si la suite de faisceaux correspondantes* $\widetilde{M_1} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{M_2} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{M_3}$ *est exacte.*

Démonstration. L'exactitude de la suite de modules entraîne celle des faisceaux car $A \to \mathcal{O}_X(R)$ est plat pour toute partie rationnelle R de X. Inversement, l'exactitude de la suite de faisceaux implique celles des fibres, donc celle des modules. □

Le corollaire suivant se déduit aussi aisément du lemme.

Corollaire 11.6. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau quasi-cohérent sur un espace analytique* X*, alors* $\mathcal{F} = 0$ *si et seulement si* $\mathcal{F}_x = 0$ *pour tout* $x \in X$*.*

Exemple 11.7. *Supposons que F est algébriquement clos et n'est pas maximalement complet, c'est à dire qu'il existe un corps E, valué, complet, extension de F, et il existe $\xi \in E^0$ tels que $\delta := \inf_{\alpha \in F} |\xi - \alpha| > 0$, donc si $D(\xi, \delta) = \{\beta \in E \ / \ |\xi - \beta| \leq \delta\}$, on a $D(\xi, \delta) \cap F = \emptyset$.*

Soit $X = \mathrm{Spm} F < Z >$ et soit $\mathcal{R}$ la famille des parties rationnelles R de X qui étendues à $\mathrm{Spm} E < Z >$ contiennent ξ, c'est à dire que si $R = \{x \in X \ / \ |f_i(x)| \leq |f_0(x)|, 1 \leq i \leq m\}$, on a de plus $|f_i(\xi)| \leq |f_0(\xi)|$ pour tout i. Soit M la limite inductive des $\mathcal{O}_X(R)$ pour $R \in \mathcal{R}$, soit $\mathcal{F}$ le faisceau sur X défini sur les parties rationnelles par : $\mathcal{F}(R) = M$ si $R \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{F}(R) = 0$ sinon. Alors $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules, qui n'st pas nul puisque $\mathcal{F}(X) = M$, mais dont toutes les fibres sont nulles. On voit donc que dans les résultats précédents l'hypothèse de quasi-cohérence n'est pas de trop.

Le résultat suivant est difficile, on peut le trouver dans les manuels [13] et [12], il est dû à R. Kiehl [31].

Théorème 11.8. *Soit $X = \mathrm{Spm} A$ un espace affinoïde et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X,alors le morphisme canonique $\widetilde{\mathcal{F}(X)} \to \mathcal{F}$ est un isomorphisme. Ainsi $\mathcal{F}(X)$ est un A-module de type fini.*

11.2. **Les fermés analytiques.** Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un F-espace analytique, un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ sur X est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules pour lequel il existe un recouvrement admissible affinoïde $(U_j = \mathrm{Spm} A_j)_{j \in J}$ et des idéaux I_j des A_j tels que $\mathcal{I}|U_j \simeq \widetilde{I_j}$ pour tout $j \in J$. Soit $V(\mathcal{I}) \subset X$ défini par $V(\mathcal{I}) \cap U_j = V(I_j)$, où $V(I_j)$ est le fermé de Zariski de $\mathrm{Spm} A_j$ défini par l'idéal I_j. Le faisceau $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ est cohérent, on a $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|U_j \simeq \widetilde{(A_j/I_j)}$; on vérifie que $(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ *est un espace analytique rigide, c'est le fermé analytique de X associé au faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$.*

12. Réductions des espace analytiques rigides, espaces analytiques formels.

Définition 12.1. *Un F-espace analytique formel est un espace F-analytique $(X, \mathcal{G}_X, \mathcal{O}_X)$ - où donc X est un espace topologique, $\mathcal{G}_X$ une topologie de Grothendieck et $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural - muni d'un recouvrement admissible $(U_i)_{i \in I}$ tel que, pour tout i, $(U_i, \mathcal{G}_X|U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$ soit un espace affinoïde et que de plus, pour tout j, $U_i \cap U_j$ soit une partie formelle de U_i. On dit que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement (admissible) formel de X. La réduction analytique de X attachée au recouvrement* *formel* $(U_i)_{i\in I}$*, est la variété algébrique sur* $\overline{F}$ *obtenue en recollant les réductions canoniques* $\overline{U_i}$ *suivant les* $\overline{U_i \cap U_j}$ *; cette réduction se note* $\overline{X}$*, ou encore* $\overline{X}^{(U_i)_{i\in I}}$*, elle est munie d'un morphisme* $r : X \to \overline{X}$ *d'espaces annelés localement annelés en anneaux locaux, obtenu par recollement de ceux* $U_i \to \overline{U_i}$ *des réductions canoniques des* U_i*.*

Dans cette définition on a noté $\overline{U_i \cap U_j}$ la réduction canonique $U_i \cap U_j$, selon le théorème de Kiehl 10.6 c'est un espace affinoïde ; sans ce théorème on sait que $U_i \cap U_j$ est dans U_i une réunion finie d'ouverts formels principaux (cf remarque 10.5) et l'on sait qu'une intersection finie d'ouverts formels principaux est encore un ouvert formel principal ; dans les deux cas on a l'existence des mêmes morphismes canoniques $\overline{U_i \cap U_j} \to \overline{U_i}$ et $\overline{U_i \cap U_j} \to \overline{U_j}$, ce qui permet de former $\overline{U_i} \cup \overline{U_j}$.

La notion de morphisme d'espaces formels est tout à fait analogue à celle 11.1 des espaces analytiques rigides, la différence étant que les recouvrements affinoïdes intervenant alors sont formels et qu'un tel morphisme $\varphi : X \to Y$ induit un morphisme $\overline{\varphi} : \overline{X} \to \overline{Y}$ entre les réductions.

Naturellement la réduction d'un espace analytique formel dépend de son recouvrement formel. Soient X un espace analytique rigide, $(U_i)_{i\in I}$ et $(V_j)_{j\in J}$ deux recouvrements formels de X, on suppose que $(U_i)_{i\in I}$ est plus fin que $(V_j)_{j\in J}$, c'est à dire qu'il existe un morphisme $\zeta : I \to J$ tel que $U_i \subset V_{\zeta(i)}$ pour tout $i \in I$, on a donc un morphisme d'espaces formels $\varphi : (X, (U_i)_{i\in I}) \to (X, (V_j)_{j\in J})$, qui donne un morphisme entre les réductions analytiques, $\overline{\varphi} : \overline{X}^{(U_i)_{i\in I}} \to \overline{X}^{(V_j)_{j\in J}}$, qui n'a aucune raison d'être un isomorphisme.

Exemple 12.2. *Soit* $X = \mathrm{Spm} F < Z >$*, alors* $\{X\}$ *est un recouvrement formel de* X*, un autre est ainsi défini : soit* $\pi \in F$*,* $0 < |\pi| < 1$*, soient*

$$V_1 = \{x \in X \ / \ |Z(x)| \leq |\pi|\} = \mathrm{Spm} F < \frac{Z}{\pi} > \simeq \mathrm{Spm} \frac{F < Z, T >}{(\pi T - Z)}$$

$$V_2 = \{x \in X \ / \ |\pi| \leq |Z(x)| \leq |1\} = \mathrm{Spm} F < \frac{\pi}{Z}, Z > \simeq \mathrm{Spm} \frac{F < Z, T >}{(ZT - \pi)} \ ,$$

$V = (V_1, V_2)$ *est un recouvrement formel de* X*, on a*

$$V_1 \cap V_2 = \{x \in X \ / \ |Z(x)| = |\pi|\} \ ,$$

donc (cf remarque 10.5) $V_1 \cap V_2 = (V_1)_Z$ *dans* V_1 *et* $V_1 \cap V_2 = (V_2)_{1/Z}$ *dans* V_2*. Le recouvrement* V *est plus fin que le recouvrement* $\{X\}$*, la réduction canonique* $\overline{V}_1$ *est une droite affine sur* $\overline{F}$*, celle de* $\overline{V}_2$ *est formée de deux droites affines se coupant en un point double ordinaire, le recollement, qui donne* $\overline{X}^V$*, est une droite projective et une droite* *affine sur* $\overline{F}$ *se coupant en un point double ordinaire (*$\overline{V}_1$ *avec l'une des composantes de* $\overline{V}_2$ *donne la droite projective), la réduction* $\overline{X}^{\{X\}}$ *est une droite affine sur* $\overline{F}$*, le morphisme canonique* $\overline{X}^V \to \overline{X}^{\{X\}}$ *consiste à contracter au point d'intersection la droite projective. Autrement dit on passe de* $\overline{X}^{\{X\}}$ *à* $\overline{X}^V$ *par l'éclatement d'un point ; ceci a été complètement élucidé par M. Raynaud (*[40]*).*

12.1. **Cohomologies des espaces analytiques et de leurs réductions.** Soient X un espace analytique formel et $\overline{X}$ sa réduction, il existe des théorèmes de comparaison entre les cohomologies sur X et sur $\overline{X}$, essentiellement dues à S. Bosch ([3]) et M. van der Put ([20]), nous citons les principaux résultats, mais avant nous précisons deux notions. La dimension d'un espace analytique rigide est la borne supérieure des dimensions de ses ouverts admissibles affinoïdes, la dimension d'un espace affinoïde Spm$A$ étant la dimension de Krull de A. Un espace analytique rigide (resp. formel) est connexe s'il n'est pas la réunion disjointe de deux espaces analytiques rigides (resp. formels).

Proposition 12.3. *Soit* $(X, U = (U_j)_{j\in J})$ *un* F*-espace analytique formel connexe, dont on suppose que le recouvrement* U *est fini (donc en particulier* X *est de dimension finie) ; notons* $\overline{U} = (\overline{U_i})_{i\in I}$ *l'image du recouvrement formel par la réduction* $r : X \to \overline{X}^U$*. Soit* $\mathcal{O}_X^0$ *le faisceau sur* X *qui à tout ouvert admissible affinoïde* V *associe* $\mathcal{O}_X(V)^0$*. On a*

(1) *pour tout* $i \geq 0$

$$\dim_F H^i(X, \mathcal{O}_X) = \dim_F H^i(U, \mathcal{O}_X) \leq$$
$$\dim_F H^i(\overline{X}^U, \mathcal{O}_{\overline{X}^U}) = \dim_F H^i(\overline{U}, \mathcal{O}_{\overline{X}^U}) \ ,$$

(2) *on a* $H^0(U, \mathcal{O}_X^0) = \mathcal{O}_X(X)^0$ *et pour tout* $i \geq 1$ *le* F^0*-module* $H^i(U, \mathcal{O}_X^0)$ *est de type fini,*

(3) *si* $i > \dim X$ *on a* $H^i(U, \mathcal{O}_X^0) = 0$

(4) *pour tout* $i \geq 0$*, si* $H^i(\overline{U}, \mathcal{O}_{\overline{X}^U}) = 0$ *alors* $H^i(U, \mathcal{O}_X^0) = 0$*,*

(5) *pour tout* $i \geq 0$ *on a la suite exacte de* $\overline{F}$*-espaces vectoriels*

$$0 \to H^i(U, \mathcal{O}_X^0) \otimes_{F^0} \overline{F} \to H^i(U, \mathcal{O}_X^0 \otimes_{F^0} \overline{F}) \to Tor_1^{F^0}(H^{i+1}(U, \mathcal{O}_X^0), \overline{F}) \to 0 \ .$$

(pour(5) voir Bourbaki, Algèbre, ch. 10, § 4, n° 7, cor 1)

13. Courbes analytiques et courbes algébriques.

Dans ce paragraphe les variétés algébriques sont considérées du point de vue ancien consistant à n'examiner que leurs points fermés, de plus *on les suppose toutes noethériennes, de type fini et séparées sur leur corps de base, c'est tout ceci que nous entendons par le terme "variété algébrique"*. Ainsi une variété algébrique affine est le spectre maximal d'une algèbre de type fini sur le corps de base. La lettre F désigne toujours un corps valué complet.

Soient X une variété (algébrique) sur F et Y un ouvert de Zariski affine de X, soient $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}_X(Y)$ et

$$U = \{x \in Y \ / \ |f_i(x)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, r\} \ ,$$

la famille des réunions finies des parties de X ainsi définies vérifie les axiomes des ouverts et muni donc X d'une topologie ; il faut noter qu'un tel U dépend de l'ouvert de Zariski affine Y et du choix des f_i ; supposons de plus que $\mathcal{O}_X(Y) = F[f_1, \cdots, f_r]$, alors U est dit admissible.

Soit U un ouvert admissible de X, un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de U est admissible si il est formé d'ouverts admissibles et si pour tout ouvert admissible $V \subset U$, $V \neq X$, V est recouvert par un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$.

On obtient ainsi une topologie de Grothendieck sur X, nous allons maintenant définir le faisceau analytique structural pour en faire un espace F-analytique.

Lemme 13.1. *Soient X une variété algébrique sur F, Y un ouvert de Zariski affine de X, $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}_X(Y)$ tels que $\mathcal{O}_X(Y) = F[f_1, \cdots, f_r]$ et U l'ouvert admissible associé ; soit I le noyau de $s : F[T_1, \cdots, T_r] \to \mathcal{O}_X(Y)$, $T_i \mapsto f_i$, et soit $A_U = F < T_1, \cdots, T_r > /IF < T_1, \cdots, T_r >$; l'application s induit un morphisme $j_U : \mathcal{O}_X(Y) \to A_U$, alors l'image de j_U est dense et $j_U^\sharp : \mathrm{Spm} A_U \to \mathrm{Spm}\mathcal{O}_X(Y) = Y$ induit une bijection*

$$\mathrm{Spm} A_U \rightleftarrows \{y \in Y \ / \ |f_i(y)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, r\} = U \ .$$

Démonstration. Le fait que l'image de j_U est dense est immédiat. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} F[T_1, \cdots, T_r] & \hookrightarrow & F < T_1, \cdots, T_r > \\ s \downarrow & & \downarrow \widetilde{s} \\ \mathcal{O}_X(Y) & \xrightarrow{j_U} & A_U \end{array}$$

soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A_U, comme $\widetilde{s}(T_i) = f_i$ on a

$$1 = ||T_i|| \geq ||f_i||_{sp}^{A_U} \geq |f_i(\mathfrak{M})| = |f_i(j_U^{-1}(\mathfrak{M}))| \ ,$$

donc $j_U^\sharp(\mathfrak{M}) \in \{y \in Y \ / \ |f_i(y)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, r\}$. Soit $\mathfrak{N} \in \{y \in Y \ / \ |f_i(y)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, r\}$, soit L une extension finie de F contenant les $f_i(\mathfrak{N})$, $T_i \mapsto f_i(\mathfrak{N})$ définit un morphisme $F < T_1, \cdots, T_r > \to L$ dont le noyau $\widetilde{\mathfrak{M}}$ contient $s^{-1}(\mathfrak{N})F < T_1, \cdots, T_r >$, alors $\mathfrak{N} \mapsto \widetilde{s}(\widetilde{\mathfrak{M}})$ est l'application inverse de $j_U^\sharp$. □

Lemme 13.2. *Soient X une variété algébrique sur F, Y et Z des ouverts de Zariski affines de X, $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}_X(Y)$ tels que $\mathcal{O}_X(Y) = F[f_1, \cdots, f_r]$, $g_1, \cdots, g_s \in \mathcal{O}_X(Z)$ tels que $\mathcal{O}_X(Z) = F[g_1, \cdots, g_s]$, on pose $U = \{y \in Y \ / \ |f_i(y)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, r\}$, $V = \{z \in Z \ / \ |g_i(z)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, s\}$.*

On suppose que $U \subset V$, alors il existe un unique morphisme $\ell_U : \mathcal{O}_X(Y \cap Z) \to A_U$ dont l'image est dense et il existe un unique morphisme $\rho_{V,U} : A_V \to A_U$ tel que $\rho_{V,U} \circ j_V = \ell_U \circ rest_{Z,Y\cap Z}$, où $rest_{.,.}$ désigne les restrictions du faisceau $\mathcal{O}_X$.

Démonstration. Montrons l'existence de $\rho_{V,U}$. On peut supposer que la constante 1 figure parmi le f_i et les g_i, si bien, que

$U = U \cap V = \{x \in Y \cap Z \ / \ |(f_i g_j)(x)| \leq 1 \ , \ i = 1, \cdots, r \ , \ j = 1, \cdots, s\}$

car $Y \cap Z$ est affine, la variété X étant séparée, donc

$$\mathcal{O}_X(Y \cap Z) = F[f_i g_j \ , \ i = 1, \cdots, r \ , \ j = 1, \cdots, s] \ ,$$

ce qui, prouve l'existence de ℓ_U et la densité. On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_X(Z) \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(Y \cap Z) & & | \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_U & & A_V \end{array}$$

où la flèche oblique est $rest_{Z,Y\cap Z}$ et les flèches verticales respectivement ℓ_U et j_U. On a $||g_i||_{sp}^{A_U} \leq 1$, donc l'application $rest_{Z,Y\cap Z} : \mathcal{O}_X(Z) \to \mathcal{O}_X(Y \cap Z)$, qui est définie sur une partie dense de A_V et à image dans une partie dense de A_U, se prolonge en une application $A_V \to A_U$, qui est $\rho_{U,V}$. □

Les deux lemmes précédents conduisent au résultat suivant.

Théorème 13.3. *Soit X une variété algébrique sur F, pour tout admissible U de X soit $\mathcal{O}_X^{an}(U)$ la limite inductive des A_V pour V admissible et $V \supset U$, les morphismes de transitions étant donnés par le deuxième lemme précédant. Alors X muni de la topologie de Grothendieck précédemment explicitée et du faisceau $\mathcal{O}_X^{an}$ est un espace analytique rigide, appelé l'analytifié de la variété X et noté $(X^{an}, \mathcal{O}_X^{an})$ ou encore X^{an}.*

Exemple 13.4. *L'exemple 11.2 donne l'analytification de la droite projective. Nous nous intéressons maintenant à celle de la droite affine $\mathbb{A}_F^1 = \mathrm{Spm}F[T]$. Soit $\pi \in F$, $0 < |\pi| < 1$, pour $n \geq 0$ soient*

$$Y_n = \mathrm{Spm}F[\pi^n T] \simeq \mathbb{A}_F^1 \quad et \quad U_n = \{x \in y_n \ / \ |(\pi^n T)(x)| \leq 1\} \ ,$$

on a $\mathbb{A}_F^1 = \bigcup_n U_n$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F^1}^{an}(U_n) = F < \pi^n T >$. Soient, pour $n \geq 0$,

$$Z_n = \mathrm{Spm}F[\pi^{n+1}T, 1/(\pi^n T)] = D(T) \quad et$$

$$V_n = \{x \in Z_n \ / \ |(\pi^{n+1}T)(x)| \leq 1 \ , \ |1/(\pi^n T)| \leq 1\} \ ,$$

on a $\mathbb{A}_F^1 = U_0 \bigcup (\bigcup_n V_n)$ et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_F^1}^{an}(V_n) = F < \pi^{n+1}T, 1/(\pi^n T) >$. Dans les deux cas on a la même structure analytique. Par analogie avec le cas où F est algébriquement clos on dit que les U_n sont des disques et que les V_n sont des couronnes.

Le recouvrement $(U_0; V_n, n \geq 0)$ fait de $(\mathbb{A}_F^1)^{an}$ un espace formel, la réduction analytique associée a pour composantes irréductibles des $\mathbb{P}_{\overline{F}}^1$, qui se coupent en des points doubles ordinaires, c'est un graphe de $\mathbb{P}_{\overline{F}}^1$, en fait une demi-droite (infinie), c'est à dire que si l'on forme la graphe d'intersection de cette réduction, que l'on associe un sommet à chaque composante irréductible et que l'on joint par une arête deux sommets représentants des composantes se coupant, alors on obtient un demi droite (infinie).

Les analogues des théorèmes GAGA de Serre ([44]) sont vrai ici, ils ont été établis par Ursula Köpf ([32]).

Le résultat suivant est aussi un analogue du cas classique, il est connu des spécialistes mais n'a jamais été publié (il a été rédigé dans un cours de DEA - on dirait maintenant de M2 - de Bordeaux [41]), mais avant de l'énoncer il faut définir la notion d'espace analytique rigide *complet* et d'espace analytique *régulier*.

Définition 13.5. *Soit X un F-espace analytique rigide que l'on suppose réduit (i.e. $\mathcal{O}_X(Y)$ est une algèbre réduite pour tout ouvert admissible affinoïde Y),*

1. *soient Y et Z deux ouverts admissibles affinoïdes de X avec $Z \subset Y$; on dit que Z est intérieur à Y et l'on écrit $Z \Subset Y$ s'il existe $f_1, \cdots, f_r \in F < T_1, \cdots, T_r >$ et un isomorphisme d'espaces analytiques,*

   $$Y \simeq \{x \in \mathbb{A}_F^n \ / \ |T_i(x)| \leq 1, f_i(x) = 0 \ , \ i = 1, \cdots, r\}$$

   (on a $\mathbb{A}_F^n = \mathrm{Spm}F[T_1, \cdots, T_r] \ni f_i$) et s'il existe $\pi \in F$, $0 < |\pi| < 1$, tel que, via cet isomorphisme,

   $$Z \subset \{x \in Y \ / \ |T_i(x)| \leq |\pi|\} \ ,$$

(2) *on dit que l'espace analytique est complet s'il admet deux recouvrements admissibles affinoïdes finis* $(Y_i)_{1\leq i\leq r}$ *et* $(Z_i)_{1\leq i\leq r}$ *tels que* Z_i *soit intérieur à* Y_i *pour tout* i.

Il s'agit ici de la notion de compacité en géométrie rigide. Les analytifiés des variétés projectives sont des espaces analytiques complets (c'est un bon exercice de le montrer pour $\mathbb{P}^1_F$).

La notion d'espace analytique régulier est plus simple à donner

Définition 13.6. *Un espace analytique* X *est dit régulier si, quel que soit son ouvert admissible affinoïde* U, *l'anneau* $\mathcal{O}_X(U)$ *est régulier.*

Nous en venons au dernier énoncé de cette partie.

Théorème 13.7. *Soit* X *une courbe analytique sur* F *(i.e. un* F*-espace analytique de dimension* 1*) régulier et complet, alors* X *est une courbe algébrique projective sur* F.

Troisième partie 3. Le demi-plan algébrique (2) et ses quotients.

On utilise de nouveau les notations et les conventions de la partie sur les modules de Drinfeld : $\mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments et de caractéristique p, $K = \mathbb{F}_q(T)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, la valuation $1/T$-adique de K est dite à l'infini, $K_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ est le complété $1/T$-adique (on dit aussi ∞-adique) de K, C est le complété d'une clôture algébrique de K_∞ ; on a vu que C n'est pas localement compact. La lettre ϖ désigne une uniformisante de K_∞, souvent ce sera $\varpi = 1/T$; on note $|\cdot|$ la valeur absolue de C, normalisée par $|1/T| = 1/q$. Conformément aux usages en arithmétiques et aux habitudes en géométrie rigide on note $(\ )^0$ et $(\ )^{00}$ les anneaux et idéaux de valuation des corps considérés sauf pour les complété de K, ainsi l'anneau de valuation de K_∞ est noté $\mathcal{O}_\infty$ et C^0 celui de C.

On pose $G = \mathrm{GL}_2$.

Rappelons que l'on a

$$G(K_\infty) =< Z(K_\infty), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in K_\infty^\times, b \in K_\infty >$$

(où $Z = diag(*, *)$ est le centre de G), rappelons aussi que le sous-groupe d'Iwahori I_∞ de $G(K_\infty)$ est l'ensemble des éléments $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $G(\mathcal{O}_\infty)$ tels que $c \in \varpi\mathcal{O}_\infty$.

La structure analytique de $\mathbb{P}^1_C$ est la suivante

$$\mathbb{P}^1_C = \mathrm{Spm} C < T_1 > \cup \mathrm{Spm} C < T_2 >$$

le recollement se faisant suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spm}C < T_1 > & & \mathrm{Spm}C < T_2 > \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Spm}C < T_1, 1/T_1 > & \overset{T_1 \mapsto 1/T_2}{\simeq} & \mathrm{Spm}C < T_2, 1/T_2 > \end{array}$$

et, comme C est algébriquement clos, les idéaux maximaux de $C < T_1 >$ sont les $(T_1 - \lambda)$, $\lambda \in C^0$, de même pour $C < T_2 >$, on utilisera souvent l'égalité $\mathbb{P}^1_C = C \cup \{\infty\}$ ainsi que la notation habituelle $(\lambda : \mu)$ pour désigner un élément de $\mathbb{P}^1_C$, avec $\lambda = (\lambda : 1)$ pour $\lambda \in C$ et $\infty = (1 : 0)$.

Il faut remarquer que le recouvrement analytique précédent de $\mathbb{P}^1_C$ est formel, que la réduction analytique associée est $\mathbb{P}^1_{\overline{C}}$.

Pour tout $z \in C$ on définit “la partie imaginaire de z” : $|z|_i = \inf_{x\in K_\infty} |z-x|$; on a pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(K_\infty)$

$$|\gamma(z)|_i = \frac{\det\gamma}{|cz+d|^2}|z|_i \ .$$

14. L’espace analytique formel Ω.

On a déjà parlé du demi-plan algébrique au début de la partie sur la géométrie rigide, on a

$$\Omega = \mathbb{P}^1_C(C) - \mathbb{P}_C(K_\infty) = C - K_\infty \ ;$$

le groupe $G(K_\infty) = \mathrm{GL}_2(K_\infty)$ opère sur Ω par

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(K_\infty), z \in \Omega \ ; \ z \mapsto \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ .$$

Soit

$$D = \{z \in \Omega \ / \ |\varpi| \le |z| \le 1, |z-\lambda| \ge 1, |z-\varpi\lambda| \ge |\varpi| \ \forall\lambda \in \mathbb{F}_q^\times\} \ ,$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in K_\infty$, en posant $D_{(n,x)} = x + \varpi^n D$ on a

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}, x\in K_\infty} D_{(n,x)}$$

et l’on voit facilement que $D_{(n,x)}$ et $D_{(n',x')}$ sont égaux si et seulement si $n = n'$ et $|x-x'| \le |\varpi|^{n+1}$, qu’il est nécessaire que $|n-n'| = 1$ pour que $D_{(n,x)}$ et $D_{(n',x')}$ se rencontrent sans être égaux. Lorsque $D_{(n-1,x)}$ et $D_{(n,x')}$ se rencontrent sans être égaux, leur intersection est un cercle avec des trous, par exemple $D_{(n,x)}$ et $D_{(n-1,x)}$ se rencontrent, soit $L = D_{(n,x)} \cap D_{(n-1,x)}$, on a

$$\begin{aligned} (8) \qquad L &= \{z \in \Omega \ / \ |z-x-\lambda\varpi^n| = |\varpi|^n \ \forall\lambda \in \mathbb{F}_q^\times\} \\ &= \{z \in \Omega \ / \ |z-x|_i = |z-x| = |\varpi|^n\} \ . \end{aligned}$$

Le lemme suivant synthétise les propriétés des espaces analytiques $D_{(n,x)}$, il n’est pas difficile à prouver.

Lemme 14.1. (1) *$G(K_\infty)$ agit sur l’ensemble $\{D_{(n,x)} \ / \ n \in \mathbb{Z}, x \in K_\infty\}$, cette action est transitive ; pour $i = 0, 1$ soient $L_i = \{z \in D \ / \ |z| = |\varpi|^i\}$ alors*

(a) *le stabilisateur dans son ensemble de D dans $G(K_\infty)$ est engendré par $Z(K_\infty)I_\infty$ et $\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,*

(b) *$Z(K_\infty)I_\infty$ est le sous-groupe de $G(K_\infty)$ des éléments qui stabilisent D ainsi que L_0 et L_1 dans leurs ensembles (en particulier sans échanger L_0 et L_1).*

(2) *D est un ouvert admissible affinoïde de $\mathbb{P}^1_C$, on a*

$$D = \mathrm{Spm} C < T, \varpi/T, 1/(T-\lambda), \varpi/(T-\varpi\lambda) >_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}$$

$$\simeq \mathrm{Spm}\frac{C < T, S, T_\lambda, S_\lambda >_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}}{(TS-\varpi, (T-\lambda)T_\lambda - 1, (S-\varpi\lambda)S_\lambda - \varpi)_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}} \ ,$$

sa réduction canonique est

$$\overline{D} = \mathrm{Spm}\frac{\overline{C}[T, S, 1/(T-\lambda), 1/(S-\lambda)]_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}}{(TS)} \ .$$

et il s'en déduit les réductions canoniques des $\gamma(D)$, $\gamma \in G(K_\infty)$.

(3) *Soient $D_0 = D$, $D_1 = \varpi D$, on a (i=0,1)*

$$D_i = \mathrm{Spm} C < \varpi^i T, \varpi^{i+1}/T, 1/(\varpi^i T - \varpi^i\lambda), \varpi^{i+1}/(\varpi^i T - \varpi^{i+1}\lambda) >_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}$$

Soit $\Delta = D_0 \cup D_1$ (en fait Δ à la même définition que D, mais en remplaçant ϖ par ϖ^2), c'est un espace affinoïde et $\mathcal{U} = \{D_0 \ , \ D_1\}$ en est un recouvrement formel, la réduction analytique associé est

$$\overline{\Delta}^{\mathcal{U}} = \overline{D_0} \cup \overline{D_1}$$

où, si l'on écrit

$$\overline{D_i} = \mathrm{Spm}\frac{\overline{C}[T_i, S_i, 1/(T_i-\lambda), 1/(S_i-\lambda)]_{\lambda\in\mathbb{F}_q^\times}}{(T_iS_i)} \ ,$$

le recollement se fait suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{D_0} & & \overline{D_1} \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Spm}\overline{C}[S_0, 1/(S_0-\lambda)]_{\lambda\in\mathbb{F}_q} & \overset{S_0\mapsto 1/T_1}{\simeq} & \mathrm{Spm}\overline{C}[T_1, 1/(T_1-\lambda)]_{\lambda\in\mathbb{F}_q} \end{array}$$

De ce lemme on déduit une structure analytique formelle pour Ω.

Théorème 14.2. *Soit I l'ensemble des couples (n,x) où n est un entier et où $x \in K_\infty/\varpi^{n+1}\mathcal{O}_\infty$ (ou plus exactement x décrit un système de représentants de ce quotient), alors $(\Omega, \{(D)_i\}_{i\in I})$ est un espace analytique formel, la réduction analytique associée $\overline{\Omega}$ a pour composantes irréductibles des $\mathbb{P}^1_{\overline{C}}$, chacune rencontrant $q+1$ autres composantes en les points de $\mathbb{P}^1_{\overline{C}}$ rationnels sur $\mathbb{F}_q$ et qui sont des points doubles ordinaires de $\overline{\Omega}$. On définit son graphe d'intersectionde $\overline{\Omega}$ de la manière suivante : à chaque composante irréductible on fait correspondre un sommet et on* *relie deux sommets par une arête si et seulement si les composantes irréductibles se rencontrent. Via son action sur Ω, le groupe $G(K_\infty)$ agit sur $\overline{\Omega}$ ainsi que sur son graphe d'intersection. Le graphe d'intersection de $\overline{\Omega}$ est un arbre, canoniquement isomorphe à l'arbre de Bruhat-Tits de $G(K_\infty)$, cet isomorphisme est $G(K_\infty)$-équivariant.*

L'isomorphisme équivariant entre le graphe d'intersection de $\overline{\Omega}$ et l'arbre de Bruhat-Tits de $G(K_\infty)$ est décrit dans le paragraphe suivant.

14.1. **L'arbre de Bruhat-Tits de $G(K_\infty)$.** Considérons l'ensemble des réseaux $\mathcal{R}$ de K_∞^2, c'est à dire des sous-$\mathcal{O}_\infty$-modules de K_∞^2, libres de rang 2. On dit que deux réseaux M_1 et M_2 de K_∞^2 sont équivalents s'il existe $\lambda \in K_\infty^\times$ tel que $M_1 = \lambda M_2$. On note $[M]$ la classe d'équivalence du réseau M. On désigne par τ le graphe dont les sommets sont les classes d'équivalences des réseaux de K_∞^2, deux sommets $[M_1]$ et $[M_2]$ étant joints par une arête s'il existe $\lambda \in K_\infty^\times$ tel que λM_2 soit un sous-réseau de M_1 et que $M_1/\lambda M_2$ soit de dimension 1 sur $\mathbb{F}_q$ (rappelons que le corps des restes de K_∞ est $\mathbb{F}_q$), autrement dit $\varpi M_1 \subsetneqq \lambda M_2 \subsetneqq M_1$. On voit donc que de chaque sommet il part exactement $q+1$ arêtes , le graphe τ est un arbre, c'est à dire un graphe planaire sans circuit (voir [45], comme pour beaucoup des résultats rappelés dans ce paragraphe) ; τ s'appelle *l'arbre de Bruhat-Tits de* $G(K_\infty)$. On dira qu'une arête de τ est orientée si l'on a fixé un ordre entre ses deux sommets, une arête non orientée est dite géométrique, elle donne lieu à deux arêtes orientées.

Le groupe $G(K_\infty)$ agit sur $\mathcal{R}$ via l'action à droite sur K_∞^2, c'est à dire que si $(\lambda,\mu) \in K_\infty^2$ et $\gamma \in G(K_\infty)$ avec $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\gamma \cdot (\lambda,\mu) = (a\lambda + c\mu, b\lambda + d\mu)$. Il suit une action de $G(K_\infty)$ sur l'arbre τ ; l'action est transitive sur l'ensemble $Som(\tau)$ des sommets de τ et l'ensemble $Ar^+(\tau)$ des arêtes orientées de τ ($Ar(\tau)$ désigne l'ensemble des arêtes géométriques). Soient $M_0 = \mathcal{O}_\infty \oplus \mathcal{O}_\infty$ et $M_1 = \varpi\mathcal{O}_\infty \oplus \mathcal{O}_\infty$, alors le stabilisateur dans $G(K_\infty)$ du sommet $[M_0]$ est $G(\mathcal{O}_\infty)Z(K_\infty)$, celui de l'arête orientée $[M_1] \to [M_0]$ est $I_\infty Z(K_\infty)$. Ainsi on a des bijections

$$G(K_\infty)/G(\mathcal{O}_\infty)Z(K_\infty) \xrightarrow{\sim} Som(\tau)\ ,\ \gamma \mapsto \gamma([M_0])\ ,$$

$$G(K_\infty)/I_\infty Z(K_\infty) \xrightarrow{\sim} Ar^+(\tau)\ ,\ \gamma \mapsto \gamma([M_1] \to [M_0])\ .$$

Deux demi-droites de τ sont dites équivalentes si elles ont une infinité d'arêtes en commun, une classe d'équivalence de demi-droites est appelé *un bout de* τ. Soit s un sommet de τ, chaque bout de l'arbre τ admet un représentant unique qui est une demi-droite commençant en s. Si l'on prend pour s le sommet $[M_0]$ avec $M_0 = \mathcal{O}_\infty \oplus \mathcal{O}_\infty$, les arêtes commençant en s correspondent aux sous espaces de dimension 1 de $M_0/\varpi M_0$, donc aux points de $\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_\infty/\varpi\mathcal{O}_\infty)$, de même les chemins de longueurs ℓ (sans aller et retour) commençant en s correspondent au sous espaces de dimension 1 de $M_0/\varpi^\ell M_0$, donc aux points de $\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_\infty/\varpi^\ell\mathcal{O}_\infty)$; finalement on voit qu'*il existe une bijection entre les bouts de τ et* $\mathbb{P}^1(K_\infty)$, dont on constate qu'elle ne dépend pas du choix du sommet s.

Expliquons comment est défini l'isomorphisme τ avec le graphe d'intersection de $\overline{\Omega}$. Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de K_∞^2 et soit M l'un de ses réseaux, il existe un couple unique (n, λ), où n est un entier et $\lambda \in K_\infty$ mod. $\varpi\mathcal{O}_\infty$ tels que $M(n, \lambda) := \mathcal{O}_\infty\varpi^{-n}(e_1 - \lambda e_2) \oplus \mathcal{O}_\infty e_2$ soit dans $[M]$ et on vérifie si $[M']$ et $[M]$sont les sommets d'une arête, et si $M(n', \lambda') \in [M']$, on a soit $n' = n+1$ et $\lambda' = \lambda$ mod. $\varpi^{n+1}\mathcal{O}_\infty$, ou bien l'inverse, c'est à dire que les rôles de n et n' sont échangés. Au sommet $[M(n, \lambda)]$ de τ on associe (cf (8))

$$L(n, \lambda) = \{z \in \Omega \ / \ |z - \lambda|_i = |z - \lambda| = |\varpi|^n\} \ ,$$

à l'arête de sommets $[M(n+1, \lambda)]$ et $[M(n, \lambda)]$ (la définition de λ montre que l'on peut choisir le même) on associe “la couronne bordée par $L(n+1, \lambda)$ et $L(n, \lambda)$”, c'est à dire $\lambda + \varpi^n D = D_{(n,\lambda)}$; passant à la réduction $\overline{\Omega}$ puis à son graphe d'intersection, cela donne l'isomorphisme cherché. On voit que cet isomorphisme est $G(K_\infty)$-équivariant en particulier en remarquant que l'arête orientée $[M_1] \to [M_0]$ de τ est associée à la couronne D dans la démarche précédente, que le stabilisateur de cette arête est égal au sous-groupe des éléments de $G(K_\infty)$ qui stabilisent D sans permuter L_0 et L_1 (i.e. sans permuter ses bords, cf le lemme 14.1, (1)).

15. Quotients de Ω par des groupes arithmétiques.

Rappelons que dans notre situation $K = \mathbb{F}_q(T)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, $\infty = 1/T$, etc. Rappelons aussi qu'un groupe arithmétique Γ est un sous-groupe de $G(K)$, ce dernier identifié avec $\mathrm{GL}(K^2)$, tel qu'il existe un sous-A-module Q de K^2 libre de rang 2 et un idéal non nul N de A (ou un élément non nul N de A) vérifiant

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{Aut}_A(Q) \to \mathrm{Aut}_A(Q/NQ)) \subset \Gamma \subset \mathrm{Aut}_A(Q) \ ,$$

ces inclusions étant entre groupes et sous-groupes. Lorsque $Q = A^2$ on note $\Gamma(N)$ le noyau précèdent, c'est à dire

$$\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(G(A) \to G(A/NA)) \ ;$$

on va surtout s'intéresser à ces groupes arithmétiques.

Un groupe arithmétique Γ opère sur l'espace analytique formel $(\Omega, \{D_i\}_{i\in I})$ et sur l'arbre τ par restriction de l'action de $G(K_\infty)$ (cf le théorème 14.2), ceci de manière équivariante au sens de op. cit., c'est à dire que τ étant confondu avec le graphe d'intersection de la réduction analytique de Ω, son action de Γ provient de celle sur Ω ; il faut noter de plus que Γ opère sur τ sans inversion (sans qu'un sommet d'une arête soit envoyé sur son autre sommet). Le théorème suivant n'est pas difficile à prouver

Théorème 15.1. *Soit Γ un coupe arithmétique, alors l'application canonique $s : \Omega \twoheadrightarrow \Gamma\backslash\Omega$ de Ω sur son quotient $\Gamma\backslash\Omega$ est un isomorphisme local, pour tout $i \in I$ on a $s|D_i \simeq s(D_i)$, ainsi $(\Gamma\backslash\Omega, \Gamma\backslash\{D_i\}_{i\in I})$ est un espace analytique formel, la réduction analytique associée est $\Gamma\backslash\overline{\Omega}$, elle est formée de $\mathbb{P}^1_C$ se coupant en des points doubles ordinaires rationnels sur $\mathbb{F}_q$, son graphe d'intersection est $\Gamma\backslash\tau$.*

On désigne par M_Γ l'espace analytique $\Gamma\backslash\Omega$, lorsque pour un idéal non nul N de A on a $\Gamma = \Gamma(N)$, on écrit simplement $M_N = M_{\Gamma(N)}$.

L'espace C-analytique M_Γ est régulier et de dimension 1 (tous ses anneaux locaux $\mathcal{O}_{M_\Gamma,x}$ sont de dimension 1 et réguliers).

Nous allons maintenant donner des précisions sur ces quotients M_Γ.

15.1. **Complétion de M_Γ, (1).** Nous commençons par donner des propriétés des quotients de l'arbre de Bruhat-Tits par des groupes arithmétiques elles figurent toutes dans le chapitre II du livre de Serre [45], ou bien s'en déduisent aisément.

Proposition 15.2. *Soit Γ un groupe arithmétique, $\Gamma\backslash\tau$ est un graphe planaire ainsi constitué*

(1) *un graphe fini $(\Gamma\backslash\tau)^0$, sans boucle, sans bout, constitué de cycles ;*

(2) *un nombre fini (cf la partie (4) de cet énoncé) de demi droites infinies $(L_i)_{1\le i\le r}$, appelées les pointes de $\Gamma\backslash\tau$, ne se rencontrant pas, chacune d'entre elles n'ayant en commun avec $(\Gamma\backslash\tau)^0$ qu'un seul sommet (qui est le sommet par lequel elle s'y rattache),*

(3) *par la surjection canonique $s : \tau \to \Gamma\backslash\tau$ l'image inverse d'une pointe de $\Gamma\backslash\tau$ est l'orbite sous Γ d'un bout de τ ; l'image d'une demi-droite infinie (sans aller et retour) de τ, à un nombre fini d'arêtes près, est une pointe de $\Gamma\backslash\tau$;*

(4) *les pointes de $\Gamma\backslash\tau$ sont en bijection avec $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1_C(K)$, en particulier elles sont en nombre fini.*

Le dernier point est expliqué dans la deuxième partie de la démonstration du lemme 15.5.

Un élément de $G(K_\infty)$ est dit *parabolique* s'il possède un unique point fixe dans $\mathbb{P}^1_C$ (l'action étant la même que sur Ω, c'est à dire l'action fractionnaire), ce sont les éléments de γ de $G(K_\infty)$ qui s'écrivent $\gamma = \alpha\beta$ avec $\alpha \in Z(K_\infty)$ et où β n'admet que 1 pour valeur propre ; en particulier β est d'ordre p et, inversement, tout élément de $G(K_\infty)$ d'ordre p est parabolique. Soit Γ un groupe arithmétique, un *point parabolique de* Γ est un élément de $\mathbb{P}^1_C$ fixé par une infinité d'éléments paraboliques de Γ.

Lemme 15.3. (1) *Soit* Γ *un groupe arithmétique, alors l'ensemble de ses points paraboliques est* $\mathbb{P}^1_C(K)$.

(2) *Soit* Q *un sous-A-module de* K^2 *libre de rang* 2*, alors le quotient (toujours pour l'action fractionnaire)* $\mathrm{GL}(Q)\backslash\mathbb{P}^1_C(K)$ *est réduit à un point.*

Démonstration. (1) Si $\Gamma' \subset \Gamma$ est un sous-groupe d'indice fini, on vérifie que Γ' et Γ ont les mêmes points paraboliques. On est donc ramené à $\Gamma = G(A)$. Un point parabolique de $G(A)$ étant fixé par un élément parabolique de $G(A)$, il est dans $G(K)$; on voit que 0 et ∞ sont paraboliques ; soit $z \in K^\times$ et $c \in A$, $c \neq 0$, tel que cz et cz^2 soient dans A, alors $\begin{pmatrix} cz+1 & -cz^2 \\ c & -cz+1 \end{pmatrix}$ est parabolique et fixe z.

(2) Il existe un élément γ de $G(K)$ tel que $Q = \gamma(A^2)$, on voit que l'on est ramené au cas $Q = A^2$. On a $\mathbb{P}^1_C(K) = G(A)(0)$, en effet $\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(0)$, si b et d sont des éléments non nuls de A premiers entre eux, si $ad - bc = 1$ avec $a, c \in A$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(0) = b/d$. $\square$

La démonstration de la partie (2) du lemme donne l'idée de ce qu'il se passe lorsque l'anneau A n'est plus principal, mais simplement de Dedekind (c'est le cas lorsque l'on remplace K par une de ses extensions finies), on a alors $G(A)\backslash\mathbb{P}^1_C(K) \simeq Pic(A)$.

Lemme 15.4. *Soient* $\ell > 1$ *et* $\Omega_\ell = \{z \in \Omega \ / \ |z|_i \geq \ell\}$*, soit* $\gamma \in G(A)$*, alors* $\gamma(\Omega_\ell) \cap \Omega_\ell \neq \emptyset$ *si et seulement si* γ *est dans le groupe* $B(A)$ *des matrices triangulaires supérieures de* $G(A)$.

Démonstration. Soient $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(A)$, avec $c \neq 0$, et $z \in \Omega_\ell$ tels que $\gamma(z) \in \Omega_\ell$. On a donc

$$\ell \leq |\gamma(z)|_i = \frac{1}{|cz+d|^2}|z|_i \leq \frac{1}{|c|^2|z|_i} \leq \frac{1}{|c|^2\ell} ,$$

par suite $|c| < 1$, d'où une contradiction. La réciproque est immédiate. □

Lemme 15.5. *Soit* Γ *un groupe arithmétique, alors* $\Gamma\backslash\mathbb{P}^1_C(K)$*, l'ensemble de ses points paraboliques modulo* Γ*, est en bijection avec l'ensemble des pointes de* $\Gamma\backslash\tau$*. Cette bijection se fait ainsi : chaque point parabolique de* Γ *détermine, via la réduction de* M_Γ *et son graphe d'intersection, un sous graphe de* $\Gamma\backslash\tau$ *qui est infini, par suite qui définit une pointe.*

Démonstration. Sans nuire à la généralité de la démonstration, afin de simplifier les notations, on suppose que $\Gamma \subset G(A)$. Soit λ un point parabolique de Γ, quitte à conjuguer par un élément de Γ on peut supposer que $\lambda = \infty$, cf le lemme 15.3 ; soit $\ell > 1$, il existe n_0 tel que la suite de couronne $\varpi^n D$ vérifie

$$\bigcup_{n \leq n_0} \varpi^n D \subset \Omega_\ell .$$

Soit $\Gamma_\infty = B(A) \cap \Gamma$, c'est un sous-groupe infini de Γ ; avec le lemme précédent on voit que si $\gamma \in \Gamma$ est tel que

$$\gamma\left(\bigcup_{n \leq n_0} \varpi^n D\right) \cap \bigcup_{n \leq n_0} \varpi^n D \neq \emptyset$$

alors $\gamma \in \Gamma_\infty$. Donc par le morphisme canonique $\Omega \to \Gamma\backslash\Omega$ l'image de $\bigcup_{n \leq n_0} \varpi^n D$ est $\Gamma_\infty \backslash \bigcup_{n \leq n_0} \varpi^n D$, de plus on voit aisément que le graphe d'intersection de ce dernier est infini.

Inversement, soit L une pointe de $\Gamma\backslash\tau$, elle se relève, après quotient par Γ, réduction analytique et construction du graphe d'intersection, en une suite de disque emboités $(\lambda + \varpi^n D)_{n \geq n_0}$ avec $\lambda \in G(K_\infty)$, ou bien $(\varpi^n D)_{n \leq n_0}$. Comme cette suite de disque reste infinie modulo Γ on voit que λ est un point parabolique de Γ (en particulier $\lambda \in G(K)$, ceci précise la dernière assertion de la proposition 15.2). □

Lemme 15.6. *Soit* Γ *un groupe arithmétique et soit* Γ_∞ *l'ensemble des* $\gamma \in \Gamma$ *tels que* $\gamma(\infty) = \infty$*, alors il existe un sous-*$\mathbb{F}_q$*-espace vectoriel* B *de* K*,* α *et* β *dans* K *non nuls, il existe deux sous-groupes* H_1 *et* H_2 *de*

$\mathbb{F}_q^\times$, *tels que*

$$\Gamma_\infty = \begin{pmatrix} H_1 & B \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \subset \Gamma \quad \textit{et} \quad \alpha A \subset B \subset \beta A \ .$$

Quitte à conjuguer Γ *par* $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on peut supposer que* $\beta = 1$, *c'est à dire que* $B \subset A$.

Soit la fonction e *sur* Ω *ainsi définie*

$$e(z) = z \prod_{b \in B, b \neq 0} \left(1 - \frac{z}{b}\right) \ ,$$

c'est une fonction $\mathbb{F}_q$*-linéaire. Soit* $\ell > |\alpha|$, *il existe une constante* Λ_ℓ *telle que*

$$z \in \Omega_\ell \quad \textit{si et seulement si} \quad |e(z)| \geq \Lambda_\ell \ .$$

Démonstration. Il existe un sous-A-module M de K^2 de rang 2 et $N \in A$, $N \neq 0$, tels que $\mathrm{Ker}(\mathrm{GL}(M) \to \mathrm{GL}(M/NM)) \subset \Gamma \subset \mathrm{GL}(M)$, les stabilisateurs de l'∞ des premiers et troisième groupes sont de la forme $\begin{pmatrix} H & I \\ 0 & H' \end{pmatrix}$, où H et H' sont des sous-groupes de $\mathbb{F}_q^\times$ et où I est un idéal fractionnaire de K, d'où l'existence de H_1, H_2, B, α et β.

La fonction e est $\mathbb{F}_q$-linéaire pour les mêmes raisons que les exponentielles additives. Soient $B_\ell = \{b \in B, |b| < \ell\}$ et $N_\ell = \sharp B_\ell$, on va montrer que

$$\Lambda_\ell = \ell^{N_\ell} \prod_{b \in B_\ell, b \neq 0} |b|^{-1}$$

répond à la question.

Soit $z \in \Omega_\ell$ et soit $\lambda \in K$ tel que $|z - \lambda| = |z|_i$. On peut écrire $\lambda = \alpha a/b$, avec a et b dans A premiers entre eux, on écrit $a = bc + r$ (division euclidienne), par suite $|z - \lambda| = |z - \alpha c - \alpha r/b| = |z - \alpha c|$ car $|\alpha r/b| < |\alpha|$. On a donc $|z - \lambda| = |z|_i$ avec $\lambda \in B$, par suite $e(z) = e(z - \lambda) + e(\lambda) = e(z - \lambda)$. Donc

$$e(z) = (z - \lambda) \prod_{b \in B, b \neq 0} \left(1 - \frac{z - \lambda}{b}\right) \ .$$

On a $|1 - \frac{z-\lambda}{b}| \geq 1$ car le contraire implique $|b + \lambda - z| < |b| = |z - \lambda| = |z|_i$ qui est faux. D'autre part $|1 - \frac{z-\lambda}{b}| > 1$ équivaut à $|z|_i = |z - \lambda| > |b|$ donc

$$|e(z)| = |z - \lambda| \prod_{\substack{0 < |b| < |z|_i \\ b \in B}} | \frac{z - \lambda}{b} | \ ,$$

donc $|e(z)| \geq \Lambda_\ell$.

Soit $z \in \Omega$ tel que $|e(z)| \geq \Lambda_\ell$. Remarquons que $\Lambda_\ell \geq |\alpha|$. Soit $\lambda \in K$ tel que $|z|_i = |z - \lambda|$; en raisonnant comme au dessus on voit que λ s'écrit $\lambda = \alpha c + \alpha\varepsilon$ avec $c \in A$ et $\varepsilon \in K$, $|\varepsilon| < 1$, il vient

$$|e(z-\lambda)| = |e(z-\alpha c) - e(\alpha\varepsilon)| = |e(z) - e(\alpha\varepsilon)| = |e(z)| \ ,$$

la dernière égalité venant de $|e(\alpha\varepsilon)| < |\alpha|$ (car $|\alpha\varepsilon| < |\alpha|$). Il vient donc en raisonnant comme au dessus et en posant $N(z) = \sharp\{b \in B, |b| < |z|_i\}$

$$\Lambda_\ell \leq |e(z-\lambda)| = |z|_i^{N(z)} \prod_{0<|b|<|z|_i} |b|^{-1} \ ,$$

dont on déduit $|z|_i \geq \ell$. □

Le résultat suivant est un corollaire des deux lemmes précédents, il en utilise les notations.

Corollaire 15.7. *Soient Γ un groupe arithmétique, $\Gamma_\infty = Stab_\Gamma(\infty)$ et $\ell > |\alpha|$, ℓ dans le groupe des valeurs de K_∞.*

(1) *L'inclusion $\Omega_\ell \subset \Omega$ induit un morphisme injectif d'espaces analytiques formels*

$$\Gamma_\infty \backslash \Omega_\ell \hookrightarrow \Gamma \backslash \Omega = M_\Gamma \ ,$$

qui fait de $\Gamma_\infty \backslash \Omega_\ell$ un sous-espace ouvert de M_Γ.

(2) *Soit $\Delta_\ell = \{z \in C \ / \ |z| \leq \Lambda_\ell^{-(q-1)}\}$, alors L'application*

$$\Omega_\ell \longrightarrow \Delta - \{0\} \ , \ z \longmapsto \frac{1}{e(z)^d} \ ,$$

où d est l'ordre du groupe $H_1 H_2$ (cf lemme 15.6), induit un isomorphisme d'espaces analytiques

$$\Gamma_\infty \backslash \Omega_\ell \xrightarrow{\sim} \Delta_\ell - \{0\} \ .$$

Démonstration. Compte tenu des deux lemmes précédents il reste à préciser (2) : nous expliquons seulement d'où vient la puissance par d. On a $\Gamma_\infty = \begin{pmatrix} H_1 & B \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$, si $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty$, on a pour $z \in \Omega_\ell$

$$e(\gamma(z)) = e(\lambda\mu^{-1}z + b\mu^{-1}) = e(\lambda\mu^{-1}z) + e(b\mu^{-1}) = \lambda\mu^{-1}e(z)$$

puisque $b\mu^{-1} \in B$ et que e est $\mathbb{F}_q$-linéaire, par suite $e(\gamma(z))^d = e(z)^d$. □

Soit Γ un groupe arithmétique, les résultats précédents montrent que pour ℓ suffisamment grand $\Gamma_\infty \backslash \Omega_\ell$ peut être vu comme un sous-espace formel de M_Γ, le graphe d'intersection de sa réduction se trouve alors dans une pointe de $\Gamma \backslash \tau$, en remplaçant Ω_ℓ par Δ_ℓ dans M_Γ on supprime la pointe concernée, à un nombre fini d'arêtes de cette pointe près. Ce qui a été fait pour l'∞ s'applique par conjugaison à tous les points paraboliques de Γ, donc à toutes les pointes de $\Gamma_\infty\backslash\tau$. Détaillons un peu ceci. Soient $g_1, \cdots, g_r \in G(A)$ tels que $P_1 = g_1(\infty), \cdots, P_r = g_r(\infty)$ représentent modulo Γ les points paraboliques de Γ, soient $\Omega_{P_i} = g_i(\Omega_\ell)$ et $\Gamma_{P_i} = Stab_\Gamma(P_i)$, alors pour ℓ suffisamment grand les $\Gamma_{P_i}\backslash\Omega_{P_i}$ peuvent être vus comme des ouverts analytiques de M_Γ, le graphe d'intersection de $\Gamma_{P_i}\backslash\Omega_{P_i}$ étant égal à une pointe L_i de $\Gamma\backslash\tau$, à un nombre fini d'arêtes de L_i près et les L_i formant l'ensemble des pointes de $\Gamma\backslash\tau$. On substitue dans M_Γ $g_i(\Delta_\ell)$ à $\Gamma_{P_i}\backslash\Omega_{P_i}$, on obtient ainsi un espace analytique formel, les couronnes du recouvrement formel de M_Γ contenus dans les $\Gamma_{P_i}\backslash\Omega_{P_i}$ étant supprimées et remplacées par les $g_i(\Delta_\ell)$ (qui sont des disques) ; on note $\widetilde{M_\Gamma}$ cet espace formel, sa réduction analytique est formée d'un nombre fini de $\mathbb{P}^1_{\overline{C}}$ se coupant en des points doubles ordinaires rationnels sur $\mathbb{F}_q$, le graphe d'intersection de cette réduction est fini, c'est $(\Gamma\backslash\tau)^0$ auquel s'ajoute les débuts finis des pointes.

$$\widetilde{M_\Gamma} = \left(\Gamma\backslash\Omega - \bigcup_{1\leq i\leq r} \Gamma_{P_i}\backslash\Omega_{P_i}\right) \bigcup_{1\leq i\leq r} g_i(\Delta_\ell)\ .$$

On voit aisément que $\widetilde{M_\Gamma}$ est un espace analytique complet, défini sur C, régulier et de dimension 1. C'est donc une courbe algébrique ; la nature de sa réduction analytique (formée d'un nombre fini de $\mathbb{P}^1_{\overline{C}}$ se coupant en des points doubles ordinaires rationnels sur $\mathbb{F}_q$) montre que c'est une *courbe de Mumford*, quelques mots vont en être dits dans le le paragraphe suivant, il suit que son genre est égal à la dimension homologique du graphe d'intersection de sa réduction, donc à celle de $\Gamma\backslash\tau$ (la dimension homologique est le nombre de cycles minimaux). On résume ceci dans un théorème.

Théorème 15.8. *Soit* Γ *un groupe arithmétique, alors* M_Γ *est une courbe affine, son complété projectif* $\widetilde{M_\Gamma}$ *est de genre la dimension homologique du graphe quotient* $\Gamma\backslash\tau$*. Les courbes* $\widetilde{M_\Gamma}$ *s'appelle les courbes modulaires de Drinfeld.*

On peut remarquer que ces espaces, M_Γ et $\widetilde{M_\Gamma}$, ainsi que leurs propriétés, ne font pas ici intervenir les modules de Drinfeld, mais ceux-ci sont nécessaires pour monter par exemple que $\widetilde{M_N} := \widetilde{M_{\Gamma(N)}}$ est définie sur K (où N est un élément non nul de A), et même sur $A[1/N]$, ceci se voit avec la détermination explicite de M_N faite au paragraphe 5.3.

Corollaire 15.9. *Soit* N *un élément non nul de* A*, les courbes modulaires* $\widetilde{M_N}$ *sont définies sur* $A[1/N]$*.*

15.2. **Complétion de M_Γ, (2).** Les courbes modulaires sont des courbes de Mumford, ces dernières ont été construites par D. Mumford dans [35], la version dont nous disons quelques mots ici est de L. Gerritzen et M. van der Put ([20]), où se trouvent montrées toutes nos affirmations. Soit F un corps valué ultramétrique complet, les courbes de Mumford définies sur F sont les courbes algébriques sur F qui admettent une réduction analytique formée d'un nombre fini de droites projectives $\mathbb{P}^1_{\overline{F}}$ sur $\overline{F}$ se coupant en des points doubles ordinaires rationnels sur $\overline{F}$. Le groupe $G(F) = \mathrm{GL}_2(F)$ opère sur $\mathbb{P}^1_F$ par l'action fractionnaire, $G(F)$ possède des sous-groupes libres de type fini, qui agissent de manière discontinue, une manière "géométrique" de les construire se trouve dans [20], § I-4 ; soit donc G un sous-groupe de $G(F)$, libre à g générateurs, soient $\mathcal{L}$ l'ensemble de ses points limites, c'est à dire l'ensemble des $x \in \mathbb{P}^1_F$ tels qu'il existe $y \in \mathbb{P}^1_F$ et une suite infinie (g_n) d'éléments de G avec $x = \lim g_n(y)$, alors $\mathcal{L}$ est une partie compacte et à intérieur vide de $\mathbb{P}^1_F$. Soit $\Xi = \mathbb{P}^1_F - \mathcal{L}$, c'est un espace analytique sur F, avec des propriété proches de celles du demi-plan algébrique Ω et qui se décrit de manière voisine, en particulier c'est un espace formel dont la réduction analytique est un arbre de droites $\mathbb{P}^1_{\overline{F}}$, chacune de ces droites ne rencontrant qu'un nombre fini d'utres droites, suivant des points doubles ordinaires et rationnels sur $\overline{F}$. $X = G\backslash\Xi$ est une courbe projective définies sur F, c'est une courbe de Mumford et elles peuvent toutes être décrites ainsi. On dit que Ξ est le revêtement de Schottky de X et G s'appelle un groupe de Schottky (ultramétrique).

Par exemple, soit $\eta \in F$, $0 < |\eta| < 1$, soit $G = < \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$, c'est un groupe de Schottky, son action sur $\mathbb{P}^1_F$ consiste en la multiplication par les puissances de η, on a $\mathcal{L} = \{0, \infty\}$ et $X = G\backslash\Xi$ est une courbe elliptique, appelée *courbe de Tate*.

Dans [42] on complète les courbes modulaires en définissant leurs revêtements de Schottky et les groupes de Shottky dont ces complétés sont les quotients. Ce procédé est beaucoup moins explicite que la manière de faire précédente, mais il précise le revêtement Ξ et le groupe Shottky. Nous rappelons brièvement les résultats. Soit Γ un groupe arithmétique, on a vu que les points manquants de M_Γ pour que ce dernier soit complet sont les points paraboliques modulo Γ, c'est à dire $\mathbb{P}^1_C(K)$ modulo Γ ; on peut aussi montrer que, si Γ_{tors} désigne le sous-groupe de Γ engendré par ses éléments de torsion, alors Γ/Γ_{tors} est libre de type fini (Γ n'est pas de type fini, [45], ch. 2, th. 10, coroll.) ; on a les formules attendues

$$\Xi = \Gamma_{tors}\backslash \left(\Omega \cup \mathbb{P}^1_C(K)\right) \ , \ G = \Gamma/\Gamma_{tors} \ ,$$

Γ_{tors} opère sur le recouvrement formel $(D_i)_{i\in I}$ de Ω, $\Gamma_{tors}\backslash(D_i)_{i\in I}$ est un recouvrement formel de Ξ, ainsi le graphe d'intersection T de la réduction analytique de Ξ est $T = \Gamma_{tors}\backslash\tau$ (une des difficultés est de préciser les structures analytique et formelle de Ξ, une autre, plus délicate, de trouver dans Γ un sous-groupe G' isomorphe à G via la surjection canonique $\Gamma \to G$, on renvoie pour ceci à l'article précité).

Quatrième partie 4. La correspondance.

Les définitions et notations relatives aux adèles ont été données lors du paragraphe 6. On a toujours $G = \mathrm{GL}_2$ et Z désigne son centre ; $K = \mathbb{F}_q(T)$, si K_v est le complété de K en une place v de K, $\mathcal{O}_v$, ϖ_v et $\mathbb{F}_q(v) = \mathbb{F}_{q_v}$ désignent son anneau de valuation, une uniformisante et le corps des restes. L'anneau de adèles de K est noté $\mathbb{A}$ et $\mathcal{O} = \prod_v \mathcal{O}_v$, $G(\mathbb{A})$ est le groupe des adèles de $G(K)$ et $G(\mathcal{O}) = \prod_v G(\mathcal{O}_v)$ son sous-groupe compact maximal. La place $1/T$ de K est notée ∞, elle est dite infinie, les autres places sont dites finies, on pose $\mathcal{O}_f = \prod_{v\neq\infty} \mathcal{O}_v$, on désigne par $\mathbb{A}_f$ l'anneau des adèles finis de K, c'est à dire le produit infini restreint analogue à $\mathbb{A}$ mais sans la composante à l'∞, de même $G(\mathbb{A}_f)$ et $G(\mathcal{O}_f)$ sont le groupe des adèles finis de $G(K)$ et son sous-groupe compact maximal. On a $\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times K_\infty$, $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A}_f)\times G(K_\infty)$, etc.

16. Les formes automorphes.

16.1. Les formes automorphes et paraboliques.

Définition 16.1. *Une forme automorphe relativement à un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}$ de $G(\mathcal{O})$ est une fonction (à valeurs complexes)*

$$f : G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\mathcal{K}Z(K_\infty) \to \mathbb{C} \ ;$$

ou encore, de manière équivalente, c'est une fonction $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ telle que pour tous $\gamma \in G(K)$, $\underline{g} \in G(\mathbb{A})$ et $\underline{k} \in \mathcal{K}Z(K_\infty)$ l'on ait $f(\gamma \underline{g}\underline{k}) = f(\underline{g})$.

16.1.1. Rappelons des résultats du paragraphe 6.1 sur les doubles classes, toujours avec les notations de la définition, mais en supposant que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_f \times \mathcal{K}_\infty$, où $\mathcal{K}_f$ et $\mathcal{K}_\infty$ sont des sous-groupes ouverts compacts de respectivement $G(\mathcal{O}_f)$ et $G(\mathcal{O}_\infty)$. Soit $X \subset G(\mathbb{A}_f)$ un système de représentants de $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$, on a vu que c'est un ensemble fini, que pour tout $\underline{x} \in X$, $\Gamma_{\underline{x}} = \underline{x}\mathcal{K}_f\underline{x}^{-1} \cap G(K)$ est un groupe arithmétique, et que l'on a une bijection

$$G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\left(\mathcal{K}_f \times (\mathcal{K}_\infty Z(K_\infty))\right) \leftrightarrows \coprod_{\underline{x}\in X} \Gamma_{\underline{x}}\backslash G(K_\infty)/(\mathcal{K}_\infty Z(K_\infty)) \ ,$$

en particulier, si $\mathcal{K}_\infty = I_\infty$ (le sous-groupe d'Iwahori), on voit que les formes automorphes sont des fonctions définies sur une réunion finies d'ensembles $Art^+(\Gamma\backslash\tau)$ des arêtes orientées de graphes de la forme $\Gamma\backslash\tau$.

Définition 16.2. *Un forme parabolique relativement au sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}$ de $G(\mathcal{O})$ est une forme automorphe f relativement à $\mathcal{K}$, telle que, pour tout $\underline{g} \in G(\mathbb{A})$*

$$\int_{K\backslash\mathbb{A}} f\left(\begin{pmatrix} 1 & \underline{y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}\right) d\underline{y} = 0$$

($d\underline{y}$ est la mesure de Haar de masse totale 1 sur le groupe compact $K\backslash\mathbb{A}$).

L'image de $K\backslash\mathbb{A}$ dans $G(\mathbb{A})/\mathcal{K}Z(K_\infty)$ est un ensemble fini, donc l'intégrale de la définition précédente est en fait une somme finie, ainsi le corps des nombres complexes n'est pas indispensables ici et l'on peut le remplacer par tout anneau L commutatif, de caractéristique zéro, contenant $\mathbb{Q}$ en tant que sous-anneau unitaire, les formes automorphes paraboliques étant des formes automorphes à valeurs dans L, localement constantes sur les espaces $\begin{pmatrix} 1 & K\backslash\mathbb{A} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{g}$, pour tout $\underline{g} \in G(\mathbb{A})$, avec une propriété traduisant la nullité de l'intégrale de la définition. *Dans toute la suite L est un anneau commutatif et unitaire, de caractéristique zéro, extension de $\mathbb{Q}$.*

Il y a plusieurs variantes de la définition des formes automorphes paraboliques ([29], [25], [17]), on a donné ici la mieux adaptée à notre propos.

Définition 16.3. *Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathcal{O})$, on désigne par $W(\mathcal{K}, L)$, resp. $W_0(\mathcal{K}, L)$, l'espace des formes automorphes, resp. des formes automorphes paraboliques, relativement à $\mathcal{K}$ et à valeurs dans L. Soit $\mathcal{K}_f$ un sous groupe ouvert compact de $G(\mathcal{O}_f)$, on pose*

$$W^{\mathcal{K}_f}(L) = \bigcup_{\mathcal{K}_\infty} W(\mathcal{K}_f \times \mathcal{K}_\infty, L)\ ,\ W_0^{\mathcal{K}_f}(L) = \bigcup_{\mathcal{K}_\infty} W_0(\mathcal{K}_f \times \mathcal{K}_\infty, L)\ ,$$

où $\mathcal{K}_\infty$ parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathcal{O}_\infty)$,

$$W(L) = \bigcup_{\mathcal{K}_f} W^{\mathcal{K}_f}(L)\ ,\ W_0(L) = \bigcup_{\mathcal{K}_f} W_0^{\mathcal{K}_f}(L)\ ,$$

où $\mathcal{K}_f$ parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathcal{O}_f)$.

Ces espaces $W^{\mathcal{K}_f}(L)$ et $W_0^{\mathcal{K}_f}(L)$ possèdent différentes structures. Ils sont munis d'une action des opérateurs de Hecke, qu'il n'est pas nécessaire de détailler ici (cf [17] ou [16] pour un résumé). Ils sont aussi munis d'une action de $G(K_\infty)$, que nous précisons. Soit $f \in W^{\mathcal{K}_f}(L)$, c'est une fonction définie sur la réunion disjointe $\coprod_{\underline{x}\in X} \Gamma_{\underline{x}}\backslash G(K_\infty)$, telle qu'il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}_\infty$ de $G(\mathcal{O}_\infty)$ vérifiant

$f(ukz) = f(u)$ pour tous $u \in \Gamma_{\underline{x}}\backslash G(K_\infty)$, $k \in \mathcal{K}_\infty$ et $z \in Z(K_\infty)$. Soit $g \in G(K_\infty)$, alors la fonction $u \mapsto f(ug)$ est dans $W^{\mathcal{K}_f^g}(L)$ avec $\mathcal{K}_f^g = g\mathcal{K}_f g^{-1} \cap G(\mathcal{O}_\infty)$; on vérifie aisément qu'il en est de même pour $W_0^{\mathcal{K}_f}(L)$.

Les espaces $W(L)$ et $W_0(L)$ possèdent une action de $G(\mathbb{A})$, on le voit de la même manière qu'au dessus.

Dans [25] Harder montre que les éléments de $W_0(\mathcal{K}, L)$ ont leurs supports dans une même partie finie de $G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\mathcal{K}Z(K_\infty)$; Harder montre ceci pour les groupes réductifs, donc dans une situation beaucoup plus générale que celle de $\mathrm{GL}(2)$; pour ce dernier groupe et lorsque $K = \mathbb{F}_q(T)$ il est possible d'en donner une démonstration directe, mais très longue, en suivant les arguments de [22].

Théorème 16.4. *(Harder* [25]*) Soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathcal{O})$, alors $W_0(\mathcal{K}, L)$ est un L-espace vectoriel de dimension finie.*

Les éléments de $W_0(L)$ sont donc des fonctions à supports compacts dans $G(K)\backslash G(\mathbb{A})/Z(K_\infty)$, par suite

Corollaire 16.5. *Les applications naturelles*

$$W_0(\mathcal{K}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} L \to W_0(\mathcal{K}, L) \quad et \quad W_0(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} L \to W_0(L)$$

sont des isomorphismes, respectivement de $G(K_\infty)$-modules et de $G(\mathbb{A})$-modules.

16.2. **Les cocycles harmoniques.** Un cocyle harmonique, à valeurs dans un groupe additif (commutatif) B est une application $\varphi : Ar^+(\tau) \to B$ définie sur l'ensemble des arêtes orientées de l'arbre de Bruhat-Tits τ, telle que

(1) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ pour toute arête orientée a de τ,

(2) pour tout somment s de τ, $\sum_{\circ(a)=s} \varphi(a) = 0$, où la somme est prise sur toutes les arêtes d'origine s.

On notera $\underline{H}(\tau, B)$ leur ensemble, c'est un groupe additif, sur lequel agit $G(K_\infty)$: si $g \in G(K_\infty)$, a est une arête de τ et φ un cocycle harmonique, on a $g\varphi(a) = \varphi(g^{-1}a)$; si G est un sous-groupe de $G(K_\infty)$ on notera $\underline{H}(\tau, B)^G$ l'ensemble des cocycles harmoniques invariants sous l'action de G, on dira quelquefois que c'est l'ensemble des cocycles définis sur les arêtes (orientées) du graphe $G\backslash\tau$.

Soit Γ un groupe arithmétique, on dira que $\varphi \in \underline{H}(\tau, B)^\Gamma$ est parabolique si son support est fini modulo Γ, c'est à dire si φ, vu comme étant défini sur les arêtes de $\Gamma\backslash\tau$, est non nul sur un nombre fini d'arêtes des pointes de $(\Gamma\backslash\tau)$. On note $\underline{H}_!(\tau, B)^\Gamma$ l'ensemble des ces cocycles harmoniques.

Les bouts de τ sont en bijection avec $\mathbb{P}^1(K_\infty)$, si s est un sommet de τ cette bijection consiste à associer à toute demi-droite (sans aller et retour) de τ d'origine s le sous-espace vectoriel de K_∞^2 de dimension 1 qui lui correspond. Si a est une arête (orientée) de τ on désigne par $U(a)$ l'ensemble des bouts de τ qui commencent par l'arête orientée a ; dit comme cela c'est un ensemble de demi-droites de τ, commençant par a, nous le considérerons plutôt comme une partie de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$.

Lemme 16.6. *Pour toute arête orientée a de τ, $U(a)$ est une partie ouverte compacte de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$. Pour toute partie ouverte et compacte U de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ il existe un ensemble fini F d'arêtes orientées de τ tel que $U = \cup_{a\in F} U(a)$.*

Démonstration. Écrivons $K_\infty^2 = K_\infty e_1 \oplus K_\infty e_2$ et $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ dans ces coordonnées, soit l'arête orientée

$$a = [\mathcal{O}_\infty e_1 \oplus \mathcal{O}_\infty e_2] \to [\mathcal{O}_\infty e_1 \oplus \mathcal{O}_\infty \varpi e_2] ,$$

considérons l'application $R : \mathbb{P}^1(K_\infty) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ qui à $(\lambda : \mu)$ avec $\max(|\lambda|, |\mu|) = 1$ associe $(\overline{\lambda} : \overline{\mu})$, alors

$$U(a) = R^{-1}(\{(0 : \overline{1})\}) = (\varpi\mathcal{O}_\infty : 1) = \varpi\mathcal{O}_\infty \subset K_\infty \cup \{\infty\} .$$

Inversement, une partie ouverte et compacte de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ est une réunion finie de boules, chacune de ces boules est, à l'action de $G(K_\infty)$ près, égale à $\varpi\mathcal{O}_\infty$. ☐

Les cocycles harmoniques peuvent être vus comme des mesures sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ de masse totale 0. soit B un groupe additif, une mesure m définie sur l'ensemble des parties ouvertes et compactes de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ et de masse totale 0 est définie par

(1) $m(U) \in B$ pour tout ouvert compact U et $m(\mathbb{P}^1(K_\infty)) = 0$,

(2) $m(U_1 \cup U_2) = m(U_1) + m(U_2)$ si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Soit $Mes(B)$ l'ensemble des mesures sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ de masse totale 0, c'est un groupe additif.

Lemme 16.7. *Il existe un isomorphisme (de groupes) entre $Mes(B)$ et $\underline{H}(\tau, B)$, ainsi défini :*
– à $m \in Mes(B)$ on associe $\varphi_m : a \mapsto m(U(a))$,
– à $\varphi \in \underline{H}(\tau, B)$ on associe $m_\varphi : U(a) \mapsto \varphi(a)$.

Démonstration. Soit s un somet de τ, alors $\bigcup_{\circ(a)=s} U(a) = \mathbb{P}^1(K_\infty)$. ☐

16.3. **La représentation spéciale.** Soient L un anneau commutatif et unitaire, admettant $\mathbb{Q}$ en tant que sous-anneau unitaire, et B un L-module. Soit $V(L)$ le groupe des fonctions définies sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$, localement constantes et à valeurs dans L ; on pose $V_{sp}(L) = V(L)/(L \cdot 1)$. L'espace $V_{sp}(L)$ est muni d'une action de $G(K_\infty)$, provenant de l'action à droite sur les fonctions et notée sp : si $g \in G(K_\infty)$ et $f \in V_{sp}(L)$ alors $gf : x \mapsto f(xg)$; cette représentation est appelée *la représentation spéciale de $G(K_\infty)$, à valeurs dans L* ; il en résulte une représentation de $G(K_\infty)$ dans $\mathrm{Hom}_L(V_{sp}(L), B)$.

Lemme 16.8. *Il existe un isomorphisme de $G(K_\infty)$-modules $\underline{H}(\tau, B) \to \mathrm{Hom}_L(V_{sp}(L), B)$, qui*
- *à $\varphi \in \underline{H}(\tau, B)$ associe l'intégration par rapport à la mesure m_φ(qui se définit simplement car il s'agit toujours de sommes finies),*
- *à $u \in \mathrm{Hom}_L(V_{sp}(L), B)$ associe $a \mapsto u(1_{U(a)})$.*

16.4. **Formes automorphes et cocycles harmoniques.**

Proposition 16.9. *Soit L un anneau commutatif admettant $\mathbb{Q}$ en tant que sous-anneau unitaire, soient $\mathcal{K}_f$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathcal{O}_f)$ et X, $\Gamma_{\underline{x}}$ comme dans le paragraphe de rappels 16.1.1. On a des isomorphismes L-linéaires*

(1) $\oplus_{\underline{x}\in X}\underline{H}(\tau, L)^{\Gamma_{\underline{x}}} \simeq \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), W^{\mathcal{K}_f}(L)\right)$,

(2) $\oplus_{\underline{x}\in X}\underline{H}_!(\tau, L)^{\Gamma_{\underline{x}}} \simeq \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), W_0^{\mathcal{K}_f}(L)\right)$.

Démonstration. (1) Il suit des formules rappelées en 16.1.1 que

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), W^{\mathcal{K}_f}(L)\right) = \oplus_{\underline{x}\in X} Q_{\underline{x}}$$

où $Q_{\underline{x}}$ est l'espace des fonctions $f : G(K_\infty) \to L$ possédant la propriété suivante : il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}_\infty$ de $G(K_\infty)$ tels que $f(\gamma g k z) = f(g)$ pour tous $\gamma \in \Gamma_{\underline{x}}$, $g \in G(K_\infty)$, $k \in \mathcal{K}_\infty$ et $z \in Z(K_\infty)$. On fixe l'un des $\underline{x}$ et soient $\Gamma = \Gamma_{\underline{x}}$, $Q = Q_{\underline{x}}$. Il faut montrer l'existence d'un isomorphisme L-linéaire

$$s : \underline{H}(\tau, L)^\Gamma \simeq \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), Q\right) \ .$$

Un élément φ de $\underline{H}(\tau, L)^\Gamma$ peut être vu comme une mesure m_φ sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ de masse totale 0 et invariante sous l'action de Γ ; à m_φ on associe $s(\varphi)$ ainsi défini : pour tout $f \in V_{sp}(L)$, $s(\varphi)$ est la fonction qui envoie $g \in G(K_\infty)$ sur l'intégrale de $sp(g)f$ suivant m_φ, que l'on note $g \mapsto m_\varphi(sp(g)f)$. Il faut prouver que l'on a ainsi construit un élément de Q.

L'invariance suivant Γ vient de celle de m_φ, celle par $Z(K_\infty)$ est due à l'action triviale de ce groupe sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$, enfin la fonction f est localement constante, donc invariante par les $sp(k)$ pour k décrivant un sous-groupe compact ouvert de $G(K_\infty)$.

Construisons l'application inverse de s. Soit $\psi \in \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), Q\right)$, on définit la mesure m^ψ sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ par la formule $m^\psi(1_{U(a)}) = \psi(1_{U(a)})(1)$ ($1_{U(a)}$ est la fonction indicatrice de $U(a)$, 1 est la matrice identité de $G(K_\infty)$) pour toute arête a de τ.

(2) Il suit de [25], corollaire 1.2.3 (voir aussi le corollaire 2.8) que $W_0^{\mathcal{K}_f}(L)$ est l'ensemble des fonctions sur $G(K)\backslash G(\mathbb{A})/\left(\mathcal{K}_f \times Z(K_\infty)\right)$ à supports compacts ; soit donc Q_0 l'ensemble des éléments de Q à supports compacts dans $\Gamma\backslash G(K_\infty)/Z(K_\infty)$; il faut montrer que l'application s induit un isomorphisme

$$s : \underline{H}_!(\tau, L)^\Gamma \simeq \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), Q_0\right) \ .$$

Soit $\varphi \in \underline{H}_!(\tau, L)^\Gamma$,il existe un nombre fini d'arêtes, $a_1, \cdots, a_r$ telles que le support de φ soit dans $\cup_{1\leq i\leq r}\Gamma a_i$. Soit a une arête de τ, on a, pour tout $g \in G(K_\infty)$, $s(\varphi)(1_{U(a)})(g) = m_\varphi(1_{U(g^{-1}a)}) \neq 0$ si et seulement si $g^{-1}a \in \cup_{1\leq i\leq r}\Gamma a_i$, or , pour tout arête a' de τ, l'ensemble des $g \in G(K_\infty)$ tels que $ga = a'$ est compact modulo $Z(K_\infty)$; ceci permet de conclure. Le même type de raisonnement opère pour l'application réciproque. ☐

Comme $G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$ est discret, $\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)$ peut être vu comme une réunion disjointe de copies de τ, ce qui permet de définir $\underline{H}(\tau, L)$ et $\underline{H}_!(\tau, L)$. Le groupe $G(K)$ agit sur $\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)$ par son action sur τ et par la multiplication à gauche sur $G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$; avec les techniques qui ont permis d'établir les formules rappelées dans le paragraphe 16.1.1, on montre que

$$\underline{H}(\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)\,, L)^{G(K)} \simeq \oplus_{\underline{x}\in X}\underline{H}(\tau, L)^{\Gamma_{\underline{x}}} \ ,$$
$$\underline{H}_!(\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)\,, L)^{G(K)} \simeq \oplus_{\underline{x}\in X}\underline{H}_!(\tau, L)^{\Gamma_{\underline{x}}} \ ,$$

finalement

Corollaire 16.10. *Il exige un L-isomorphisme, fonctoriel en les sous-groupes ouverts compacts $\mathcal{K}_f$ de $G(\mathbb{O}_f)$,*

$$\underline{H}_!(\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)\,, L)^{G(K)} \simeq \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), W_0^{\mathcal{K}_f}(L)\right) \ .$$

On aura besoin en fait de prendre la limite suivant les groupes $\mathcal{K}_f$, on a $\tau \times G(\mathbb{A}_f)$ qui s'interprète comme le limite projective suivant les $\mathcal{K}_f$ des $\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)$; il faut remarquer que $\tau \times G(\mathbb{A}_f)$ n'est pas un graphe ; on définit $\underline{H}(\tau \times G(\mathbb{A}_f), L)$ comme étant la limite inductive des $\underline{H}(\tau \times (G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f)\,, L)$, de même pour $\underline{H}_!(\tau \times G(\mathbb{A}_f), L)$, auquel on s'intéressera surtout, et dont on peut remarquer tout de suite que c'est un $G(\mathbb{A}_f)$-module (par l'action à gauche sur la composante $G(\mathbb{A}_f)$

de $\tau \times G(\mathbb{A}_f)$). Rappelons qu'il y a sur $W_0(L)$ une action naturelle de $G(\mathbb{A}_f)$.

Théorème 16.11. *Il existe un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f)$-équivariant et L-linéaire*

$$\underline{H}_!(\tau \times G(\mathbb{A}_f), L)^{G(K)} \simeq \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(L), W_0(L)\right) .$$

Ce résultat nous servira plus loin.

17. Représentations galoisiennes, formes automorphes et cocycles harmoniques.

17.1. **Des représentations galoisiennes.** Soient $L \subset L^{nr} \subset L^{sep}$ des extensions de corps, L étant un corps local ce caractéristique p de corps des restes $\mathbb{F}_q$, L^{sep} en étant une clôture séparable et L^{nr} la sous-extension maximale non-ramifiée. Toutes les extensions algébriques séparables de L considérées dans ce paragraphe seront des sous-extensions de L^{sep}/L. Soit C le complété d'une clôture algébrique de L^{sep} et $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}_{L,cont}(C)$ le groupe des L-automorphismes continus de C ; on a $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$. Une clôture algébrique $\mathbb{F}_q^{alg}$ de $\mathbb{F}_q$ est le corps des restes de L^{nr}, on a

$$\mathrm{Gal}(L^{nr}/L) \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q^{alg}/\mathbb{F}_q) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$$

où $\widehat{\mathbb{Z}}$ est le complété profini de $\mathbb{Z}$. Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$ admet 1 pour générateur topologique, qui correspond à l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\mathbb{F}_q^{alg}$, notons F son image dans $\mathrm{Gal}(L^{nr}/L)$, donc F relève l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_q^{alg}/\mathbb{F}_q$ et F est un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(L^{nr}/L)$ (pour la topologie profinie).

On note ϖ une uniformisante de L, soient $n > 1$ un entier premier avec p et $\varpi^{1/n}$ une racine n-ème de ϖ. L'extension $L^{nr}(\varpi^{1/n})/L$ est galoisienne de groupe de Galois engendré topologiquement par F et u, où $F|L^{nr}$ est l'automorphisme précédant et u est défini par l'existence d'une racine ζ_n primitive n-ème de l'unité telle que $u(\varpi^{1/n}) = \zeta_n \varpi^{1/n}$ et est trivial sur L^{nr}, les seules relations étant $FuF = u^q$ et $u^n = \mathrm{Id}$. Il vient donc une représentation galoisienne

$$\rho^{(n)} : \mathcal{G} \xrightarrow{rest} \mathrm{Gal}(L^{nr}(\varpi^{1/n})/L) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

la flèche de gauche étant la restriction, l'autre étant définie par

$$F \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ équipé de cette action galoisienne de $\mathcal{G}$ est noté $U^{(n)}$.

Soit ℓ un nombre premier, $\ell \neq p$. Soit U^{ℓ^∞} la limite projective des représentations U^{ℓ^n}, c'est une représentation de $\mathcal{G}$ qui peut être ainsi définie : pour tout entier $n > 0$ soit ϖ^{1/ℓ^n} une racine ℓ^n-ème de ϖ, avec la condition que $(\varpi^{1/\ell^{n+1}})^\ell = \varpi^{1/\ell^n}$ et de même ζ_{ℓ^n} est une racine primitive ℓ^n-ème de l'unité vérifiant $(\zeta_{\ell^{n+1}})^\ell = \zeta_{\ell^n}$; soit $E_\ell = L^{nr}(\varpi^{1/\ell^n}, n > 1)$. Alors E_ℓ est une extension galoisienne de L et $\mathrm{Gal}(E_\ell/L) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \propto \mathbb{Z}$ come le montre la suite exacte de groupes topologiques

$$1 \to \mathrm{Gal}(E_\ell/L^{nr}) \to \mathrm{Gal}(E_\ell/L) \to \mathrm{Gal}(L^{nr}/L) \to 1 ,$$

$\mathrm{Gal}(E_\ell/L)$ est topologiquement engendré par F et u, où $F|L^{nr}$ est l'application précédemment définie, où u est caractérisée par $u|L^{nr} = \mathrm{Id}$ et $u(\varpi^{1/\ell^n}) = \zeta_{\ell^n}\varpi^{1/\ell^n}$ pour tout n, la seule relation vérifiée par ces générateurs étant $FuF = u^q$.

La représentation suivante est appelée *la représentation galoisienne spéciale de $\mathcal{G}$*

$$\rho_\ell : \mathcal{G} \xrightarrow{rest} \mathrm{Gal}(E_\ell/L) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell)$$

la flèche de gauche étant la restriction, la suivante étant définie par

$$F \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ;$$

le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $\mathbb{Q}_\ell^2$ muni de cette action galoisienne est noté U_ℓ.

17.1.1. Quelques notations. Soit $n > 1$ un entier premier avec p, la caractéristique de L, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un $\mathcal{G}$-module trivial,

(1) $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(1)$ désigne le $\mathcal{G}$-module $\mu(n) = \mu(n)(L^{sep})$,

(2) $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(-1) = \mathrm{Hom}(\mu(n), \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})$ (homomorphismes de groupes),

(3) $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(r) = \mu(n)^{\otimes r}$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$, et l'on peut remarquer que

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(0) = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(1) \otimes_{\mathcal{G}} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(-1) \simeq_{\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}[\mathcal{G}]} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \ ,$$

(4) si Q est un $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}[\mathcal{G}]$-module, pour tout entier r on pose $Q(r) = Q \otimes_{\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}[\mathcal{G}]} \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}(r)$,

(5) soit ℓ un nombre premier différent de p, pour tout entier r on désigne par $\mathbb{Z}_\ell(r)$ la limite projective suivant l'entier m des $\frac{\mathbb{Z}}{\ell^m\mathbb{Z}}(r)$,

(6) on pose $\mathbb{Q}_\ell(r) = \mathbb{Z}_\ell(r) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$.

Lemme 17.1. *On a la suite exacte de $\mathbb{Q}_\ell[\mathcal{G}]$-modules*

$$0 \to \mathbb{Q}_\ell \to U_\ell \to \mathbb{Q}_\ell(-1) \to 0 \ .$$

et cette extension du $\mathbb{Q}_\ell[\mathcal{G}]$-module trivial $\mathbb{Q}_\ell$ par $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ est la seule non triviale, à isomorphisme près.

Démonstration. Le groupe $\mathcal{G}$ est topologiquement engendré par u et F tels que, pour un bon choix $\{e_1, e_2\}$ de la $\mathbb{Q}_\ell$-base de U_ℓ, $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$, $F(e_1) = e_1$ et $F(e_2) = q^{-1}e_2$; il reste à vérifier que l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ est la même que celle venant de la projection $U_\ell \to \mathbb{Q}_\ell e_2$. On a

$$\mathbb{Q}_\ell(-1) = \left(\varprojlim_m \operatorname{Hom}\left(\mu(\ell^m), \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}\right)\right) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \ ,$$

si $f \in \operatorname{Hom}(\mu(\ell^m), \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$, pour tout $\zeta \in \mu(\ell^m)$

$$Ff(\zeta) = f(F^{-1}\zeta) = f(\zeta^{1/q}) = (1/q)f(\zeta) \ .$$

L'unicité se monte directement par le calcul. $\square$

17.2. **Un problème sur les courbes de Mumford.** Il suit de la formule (2) de la proposition 16.9 que

$$\text{(9)} \quad \oplus_{\underline{x}\in X}\underline{H}_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^{\Gamma_{\underline{x}}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell \simeq \operatorname{Hom}_{G(K_\infty)}\left(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell), W_0^{\mathcal{K}_f}(\mathbb{Q}_\ell)\right) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell \ ,$$

nous allons interpréter le membre de gauche de cette formule comme un somme directe de groupes de cohomologie étale de courbes modulaires. Étant donné un groupe arithmétique Γ, nous nous intéressons donc à $\underline{H}_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^\Gamma \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell$ dont nous voulons montrer qu'il est $\mathcal{G}$-isomorphe à $H^1_{\text{ét-rig}}(\widetilde{M}_\Gamma \widehat{\otimes} C, \mathbb{Q}_\ell)$, le premier groupe de cohomologie étale-rigide de $\widetilde{M}_\Gamma$, que bien entendu il va falloir définir.

Nous commençons par nous ramener à un problème sur les courbes de Mumford, cf paragraphe 15.2. Soit Γ un groupe arithmétique, dans le paragraphe précité on a rappelé que si

$$G = \Gamma/\Gamma_{tors} \ \text{ et } \ \Xi = \Gamma_{tors}\backslash\left(\Omega \cup \mathbb{P}^1(K_\infty)\right)$$

on a canoniquement un isomorphisme d'espaces analytiques formels $\widetilde{M}_\Gamma \simeq G\backslash\Xi$, qui est la description de $\widetilde{M}_\Gamma$ en tant que courbe de Mumford, avec de plus une structure d'espace analytique formel sur Ξ qui donne celle de $\widetilde{M}_\Gamma$, et qui donne une réduction analytique ayant pour graphe d'intersection $T := \Gamma_{tors}\backslash\tau$. La formule suivante est immédiate.

$$\text{(10)} \qquad \underline{H}_!(\tau, \mathbb{Q}_\ell)^\Gamma \simeq \underline{H}_!(T, \mathbb{Q}_\ell)^G \ .$$

On est donc ramené à prouver

$$\text{(11)} \qquad \underline{H}_!(T, \mathbb{Q}_\ell)^G \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell \simeq_{\mathcal{G}} H^1_{\text{ét-rig}}(G\backslash\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \ .$$

Nous précisons le membre de droite de cette relation.

17.3. **Cohomologie étale-rigide, résumé.** Drinfeld a utilisé la chohomologie étale des espaces analytiques rigides avant même que celle-ci existe et même avant que la notion d'espace analytique rigide soit clarifiée. Il a défini de manière ad-hoc la structure analytique d'une courbe X sur C et son $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mu_n)$ (avec n premier à p), ce dernier étant l'ensemble des couples (L, φ), où L est un fibré en droite sur X et $\varphi : \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} L^{\otimes n}$. Berkovich donna une première construction du site étale-rigide, mais pour une nouvelle notion d'espaces analytiques non-archimédiens, différente de celle considérée ici, mais cependant proche ; très schématiquement résumé elle consiste à définir un point d'un espaces analytique comme étant une semi-norme, ce qui évite "les trous" comme ceux mis en évidence déjà dans C au début de ces notes, ce qui donne donc à cette géométrie analytique non-archimédienne une apparence proche de la situation classique, moyennant pour l'établir des difficultés techniques parfois conséquentes ([2]). de Jong et van der Put donnèrent un peu après ([30], exposé au "colloque de Toulouse" en juin 1994) la version pour la géométrie rigide considérée ici. Le lien entre ces deux points de vue est fait dans [28].

Soient L un corps valué complet, L^{alg} l'une de ses clôture algébrique et C le complété de L^{alg} ; toutes les extensions algébriques de L sont supposées contenues dans L^{alg}, en particulier la fermeture séparable L^{sep} et l'extension maximale non-ramifiée L^{nr}. Le groupe de Galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L^{sep}/L)$ peut être identifié avec le groupe $\mathrm{Aut}_{L,cont}C$ des L-automorphismes continus de C.

Définition 17.2. *Un morphisme $f : X \to Y$ entre deux L-espaces analytiques rigides est dit étale si, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme induit $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est plat et non ramifié ; non ramifié signifie que si $\mathfrak{m}_{f(x)}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$, alors le morphisme naturel $\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x}$ fait de $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x}$ un corps extension séparable finie de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}$.*

Soit X un L-espace analytique, le site $X_{\text{ét}-\text{rig}}$ étale-rigide de X a pour objet les couples (Y, g), où Y est un L-espace analytique et $g : Y \to X$ un morphisme étale. Un morphisme $f : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$ est un morphisme d'espaces L-analytiques tel que $g_2 \circ f = g_1$ (donc f est étale). Un recouvrement étale-rigide de l'objet (Y, g) est la donnée d'une famille de morphismes $f_i : (Y_i, g_i) \to (Y, g)$ de $X_{\text{ét}-\text{rig}}$ telle que pour tout i il existe un recouvrement admissible affinoïde $(Y_{i,j})_{j \in J_i}$ de Y_i vérifiant : $(g_i(Y_{i,j}))_{i \in I, j \in J_i}$ est un recouvrement admissible de Y (et ceci vaut alors pour tous les recouvrements admissibles affinoïdes des Y_i).

Les groupes de cohomologie des faisceaux abéliens $\mathcal{A}$ sur $X_{\text{ét}-\text{rig}}$ sont notés $H^*(X_{\text{ét}-\text{rig}}, \mathcal{A})$ ou bien $H^*_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathcal{A})$.

17.3.1. Soit X un espace L-analytique, on s'intéressera aux groupes $H^*_{\text{ét}-\text{rig}}(X\widehat{\otimes}_L C, \ \cdot\ )$, le fait d'appliquer $\widehat{\otimes}_L C$ à X élimine les informations venant de la cohomologie du groupe $\mathcal{G}$. Si $(X_i)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible affinoïde de X, alors $(X_i\widehat{\otimes}_L C)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible affinoïde de $X\widehat{\otimes}_L C$, $X_i\widehat{\otimes}_L C$ est l'espace affinoïde $\mathrm{Spm}(\mathcal{O}_{X_i}(X_i)\widehat{\otimes}_L C)$. Tout élément $\sigma \in \mathcal{G}$ opère sur $\mathcal{O}_{X_i}(X_i)\widehat{\otimes}_L C$ et donne un endomorphisme analytique φ_σ de $X\widehat{\otimes}_L C$, qui n'est pas en général C-analytique, mais qui est un automorphisme du site $X_{\text{ét}-\text{rig}}$. Soit $\alpha : X\widehat{\otimes}_L C \to C$ le morphisme obtenu par recollement des $\mathcal{O}_{X_i}(X_i) \to \mathcal{O}_{X_i}(X_i)\widehat{\otimes}_L C$, α donne un morphisme de site $\alpha^* : X_{\text{ét}-\text{rig}} \to (X\widehat{\otimes}_L C)_{\text{ét}-\text{rig}}$, si $\mathcal{A}$ est un faiseaux sur $X_{\text{ét}-\text{rig}}$, la relation $\alpha = \alpha \circ \varphi_\sigma$ montre que $\alpha^*(\mathcal{A}) \simeq (\alpha \circ \varphi_\sigma)^*(\mathcal{A}) \simeq \varphi_\sigma^* \circ \alpha^*(\mathcal{A})$, d'où un automorphisme φ_σ^* : $H^*_{\text{ét}-\text{rig}}(X\otimes_L C, \alpha^*(\mathcal{A}))$ et comme il est d'usage dans la suite on écrira $\mathcal{A}$ à la place de $\alpha^*(\mathcal{A})$. Ainsi, *pour tout faisceau abélien* $\mathcal{A}$ *sur* $X_{\text{ét}-\text{rig}}$ *le groupe* $\mathcal{G}$ *opère sur* $H^*_{\text{ét}-\text{rig}}(X\otimes_L C, \mathcal{A})$.

17.3.2. L'inclusion de la topologie rigide de X dans sa topologie étale-rigide donne par restriction un morphisme de site $r : X_{\text{ét}-\text{rig}} \to X_{\text{rig}}$, qui est exact à gauche et qui possède des dérivés droits, d'où pour tout faisceau $\mathcal{A}$ sur $X_{\text{ét}-\text{rig}}$ la suite spectrale de Leray

$$E_2^{a,b} = H^a_{\text{rig}}(X, R^b r(\mathcal{A})) \Longrightarrow H^{a+b}_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathcal{A})$$

et la suite exacte des petits degrés (ou des cinq) qui l'accompagne ([24], ou le cours [47])

$$0 \to H^1_{\text{rig}}(X, R^0 r(\mathcal{A})) \to H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathcal{A}) \to H^0_{\text{rig}}(x, R^1 r(\mathcal{A}))$$

$$\to H^2_{\text{rig}}(X, R^0 r(\mathcal{A})) \to H^2_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathcal{A})$$

17.3.3. On suppose maintenant que X est un espace analytique sur C de dimension 1. Puisque $R^1 r\mathbb{G}_m$ est le faisceau $U \mapsto H^1_{\text{rig}}(U, \mathbb{G}_m)$, qui est nul sur tous les ouverts admissibles affinoides U de X, la suite exacte des petits degrés donne

$$H^1_{\text{rig}}(X, \mathbb{G}_m) \simeq H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{G}_m) \ . \tag{12}$$

Soit $n > 1$ un entier premier avec la caractéristique p de C, la suite exacte des petits degrés donne pour le faisceaux constant étale $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(ou bien μ_n, car ces deux faisceaux sont isomorphes, C étant algébriquement clos)
(13)
$$0 \to H^1_{\text{rig}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^0_{\text{rig}}(x, R^1 r(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \to 0$$
puisque $H^2_{\text{rig}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ (X est de dimension 1).

17.3.4. On suppose que X est l'analytifié d'une courbe algébrique sur C, projective, connexe et non singulière et soit toujours $n > 1$ un entier premier avec p, alors la suite axacte sur $X_{\text{ét}-\text{rig}}$
$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \overset{\times n}{\to} \mathbb{G}_m \to 0$$
donne la suite exacte
$$(14) \qquad 0 \to H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mu_n) \to H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{G}_m) \overset{\times n}{\to} H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{G}_m) \ ,$$
qui avec (12) montre que $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mu_n)$ est isomorphe à $Jac(X)[n]$, le groupe des points de n-torsion de la jacobienne de X ; on retrouve ici la définition donnée par Drinfeld.

17.3.5. On dit quelques mots de la cohomologie des sous-espaces de $\mathbb{P}^1_C$ de la forme $\Xi = \mathbb{P}^1_C - \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est une partie compacte de $\mathbb{P}^1_C$ à intérieur vide. Un tel espace possède des recouvrements formels analogues à celui du demi-plan algébrique Ω : supposons que $\infty \notin \mathcal{L}$, soit $(B_i)_{1 \leq i \leq r}$ un recouvrement de $\mathcal{L}$ par des boules disjointes non circonférenciées de $\mathbb{P}^1_C$, de rayon ε (avec $\varepsilon \in |C^*|$) et soit U_ε le complémentaite dans $\mathbb{P}^1_C$ de la réunion des B_i, U_ε peut être décomposé en une réunion finie de couronnes, on a $U_\varepsilon \subset U_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon > \varepsilon'$ et l'on peut faire en sorte que le recouvrement de U_ε en couronnes soit contenu dans celui de U'_ε, etc. Il suit d'un tel recouvrement formel une réduction analytique $\overline{\Xi}$ formée de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q^{alg}}$ se coupant en des points doubles ordinaires, dont le graphe d'intersection est un arbre T_Ξ.

Les espaces analytiques Ξ de cette forme jouent le rôle d'espaces de Stein (connexes) en géométrie rigide ([6]), les faisceaux constants sont acycliques, les fibrés en droite sont triviaux, c'est à dire que $H^1_{\text{rig}}(\Xi, \mathcal{O}^\times_\Xi) = \{1\}$. On a une suite exacte
$$(15) \qquad 1 \to C^\times \to \mathcal{O}^\times_\Xi(\Xi) \overset{\mathfrak{r}}{\to} \underline{H}(T_\Xi, \mathbb{Z}) \to 0 \ ,$$
elle est établie dans [39] (et a d'abord été exposée au Groupe d'étude d'analyse ultramétrique de Paris en 1982), nous décrivons seulement l'application $\mathfrak{r}$. Soient a une arête orientée de T_Ξ, s_o et s_t ses origine

6. avec cette nuance importante par rapport à la situation classique, qu'ils possèdent des revêtements étales non triviaux, au moins quand ils sont définis sur $\mathbb{Q}_p$, [11], [4].

et sommet terminal ; les sommets s_o et s_t correspondent à des composantes irréductibles de $\overline{\Xi}$, P_o et P_t, se coupant en un point double ordinaire correspondant à e ; soit $(P_o \cup P_t)^*$ la réunion P_o et P_t à laquelle on retire les points d'intersections avec les autres composantes irréductibles (donc on retire de P_o et P_t tous les points d'intersections, sauf $P_o \cap P_t$) ; notons $R : \Xi \to \overline{\Xi}$ la réduction, alors $R^{-1}((P_o \cup P_t)^*)$ peut s'écrire (en supposant que $\infty \notin (P_o \cup P_t)^*$) de la manière suivante : il existe $x \in \mathcal{L}$, $\lambda, \mu \in C^\times$ avec $|\lambda| < |\mu|$, il existe $y_i \in C$, $1 \le i \le m$ avec $|y_i| = |\lambda|$ et il existe $y'_i \in C$, $1 \le i \le m'$ avec $|y'_i| = |\mu|$, tels que

$$R^{-1}((P_o \cup P_t)^*) = \{z \in \Xi \,/\, |\lambda| \le |z - x| \le |\mu|, |z - y_i| \ge |\lambda|, |z - y'_i| \ge |\mu|\} \ ;$$

soit $f \in \mathcal{O}_\Xi^\times(\Xi)$, alors il existe un entier h et $g \in \mathcal{O}_\Xi^\times(\Xi)$ tels que $f(z) = (z - x)^h g(z)$ avec $|g(z)|$ constant sur $R^{-1}((P_o \cup P_t)^*)$ (l'algèbre affinoïde de $R^{-1}((P_o \cup P_t)^*)$ a une structure analogue à celle des couronnes D_i du recouvrement formel de Ω) ; on a $\mathfrak{r}(f)(a) = h$ si par la réduction R la circonférence $|z - x| = |\lambda|$ de $R^{-1}((P_o \cup P_t)^*)$ s'envoie dans P_o, et $\mathfrak{r}(f)(a) = -h$ si au contraire cette circonférence va dans P_t ; on voit que l'on a ainsi défini un cocycle harmonique $\mathfrak{r}(f)$ en considérant la réduction de f sur chaque circonférence (après division par une constante convenable de manière à se ramener à f de norme 1) et en utilisant le fait que, sur chaque composante irréductible $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q^{alg}}$, le diviseur de la fonction ainsi obtenue est de degré 0.

Il résulte de la suite exacte sur $\Xi_{\text{ét}-\text{rig}}$

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \stackrel{\times n}{\to} \mathbb{G}_m \to 0$$

que l'on a sur Ξ_{rig} une suite exacte

$$\mathcal{O}_\Xi^\times \xrightarrow{\times n} \mathcal{O}_\Xi^\times \longrightarrow R^1 r \mu_n \longrightarrow 0 \ ,$$

qui avec (15) donne

$$H^0_{\text{rig}}(\Xi, R^1 r \mu_n) \simeq \mathcal{O}_\Xi^\times(\Xi)/(\mathcal{O}_\Xi^\times(\Xi))^n \simeq \underline{H}(T_\Xi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \ ,$$

qui avec (13) (et le fait que les faisceaux constants sont rigide-acycliques) implique l'isomorphisme canonique

$$H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(\Xi, \mu_n) \simeq \underline{H}(T_\Xi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \ .$$

17.3.6. On examine la cohomologie des courbes de Mumford, c'est à dire, des courbes projectives X de genre g, qui avec les notations précédentes s'écrivent en tant qu'espaces analytiques rigides $X = G\backslash\Xi$, où G est un sous-groupe de $G(C)$ libre de rang g et avec une réduction analytique $\overline{X} = G\backslash\overline{\Xi}$, dont le graphe d'intersection est $G\backslash T_\Xi$. On note $s : \Xi \to X$ le morphisme canonique (qui s'appelle l'uniformisation analytique de X).

Les groupes de cohomologie $H^i(G,\cdot)$ sont nuls pour $i \geq 2$ puisque G est libre, les groupes $H^i(\Xi,\cdot)$ sont aussi nuls pour $i \geq 2$. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau sur X_{rig}, on a une suite spectrale

$$E_2^{a,b} = H^a(G, H^b_{\mathrm{rig}}(\Xi, s^*\mathcal{A})) \Longrightarrow H^{a+b}_{\mathrm{rig}}(X,\mathcal{A}) \ ,$$

dont la suite des bas degrés donne la suite exacte

$$(16) \quad 0 \to H^1(G, H^0_{\mathrm{rig}}(\Xi, s^*\mathcal{A})) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X,\mathcal{A}) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\Xi, s^*\mathcal{A})^G \to 0 \ .$$

Examinons la suite exacte (13). En appliquant la relation (16) au faisceau $\mathcal{A} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ il vient $H^1_{\mathrm{rig}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^1(G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, de plus, puisque G agit rivialement sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ on a donc

$$H^1_{\mathrm{rig}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq H^1(G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g \ .$$

Remarquons de plus que l'application canonique $\tilde{s} : T_\Xi \to G\backslash T_\Xi$ est un revêtement universel, donc $H^1(G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et $H^1(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont canoniquement isomorphes.

Examinons maintenant le terme $H^0_{\mathrm{rig}}(X, R^1r(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ de (13). On choisit un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n$, qui donne donc des isomorphismes de faisceaux constants sur $X_{\text{ét}-\mathrm{rig}}$ et X_{rig}, se relevant sur $\Xi_{\text{ét}-\mathrm{rig}}$ et Ξ_{rig}. De la suite exacte (15) il suit un isomorphisme $\mathcal{O}^\times_\Xi(\Xi)/(\mathcal{O}^\times_\Xi(\Xi))^n \simeq \underline{H}(T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, d'autre part, cf la première suite exacte de (17.3.4), on a sur X_{rig} $R^1r\mu_n \simeq \mathcal{O}^\times_X/(\mathcal{O}^\times_X)^n$, finalement

$$H^0_{\mathrm{rig}}(X, R^1r(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \simeq H^0_{\mathrm{rig}}(x, R^1r\mu_n)) \simeq \underline{H}(T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^G = \underline{H}(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \ ,$$

donc, finalement la suite exacte (13) s'écrit

$$H^1(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1_{\text{ét}-\mathrm{rig}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \underline{H}(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to 0 \ ,$$

sur la quelle on examine maintenant la structure galoisienne.

Le groupe de Galois $\mathcal{G}$ opère trivialement sur $H^1(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et sur $\underline{H}(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, avec les définitions du paragraphe 17.1.1 et de l'action de Galois sur la cohomologie étale il vient la suite axacte de $\mathcal{G}$-modules

$$(17) \qquad 0 \to H^1(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H^1_{\text{ét}-\mathrm{rig}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to$$
$$\to \underline{H}(G\backslash T_\Xi,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(-1) \to 0 \ ,$$

mais contrairement à la situation du lemme du paragraphe précité, ceci ne suffit pas à caractériser l'action de Galois sur $H^1_{\text{ét}-\mathrm{rig}}(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

17.3.7. Dans le prochain paragraphe nous précisons cette action de Galois, en particulier sur les espaces suivants. Rappelons que L est un corps valué complet de caractéristique $p > 0$, que C est le complété d'une clôture algébrique L^{alg} de L, que $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{alg}}/L) =$

$\mathrm{Aut}_{L,cont}(C)$, de plus ℓ désigne un nombre premier différent de p. Soient Y un espace L-analytique et $X = Y\widehat{\otimes}_L C$, on pose

$$H^i_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Z}_\ell) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ n}} H^i_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

(à gauche il s'agit de l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ et à droite des faisceaux constants $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ sur $X_{\text{ét}-\text{rig}}$) et

$$H^i_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell) = H^i_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell\ ,$$

ce sont des $\mathbb{Q}_\ell$ espaces vectoriels équipés d'une action de $\mathcal{G}$, cf le paragraphe 17.3.1 ; ce sont les groupes de cohomologie ℓ-adique analytique de X (ou de Y).

17.4. **La cohomologie étale des courbes de Mumford.** Soient toujours L un corps local de caractéristique $p > 0$, ses extensions L^{nr}, L^{sep}, C et pour un nombre premier $\ell \neq p$ le corps E_ℓ, cf § 17.1. Soient $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L^{sep}/L) = \mathrm{Aut}_{L,cont}(C)$ et U_ℓ la représentation de $\mathcal{G}$ (op. cit.).

Théorème 17.3. *Soit Y une courbe de Mumford définie sur L , $\Xi \to Y$ son revêtement L-analytique et G le sous-groupe de Schottky de $G(L)$ tel que $Y \simeq G\backslash\Xi$ (isomorphisme L-analytique), soit T_Ξ le graphe d'intersection de la réduction analytique de Ξ. Alors on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{G}$-modules*

$$H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(Y\widehat{\otimes}C, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \underline{H}(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell\ ,$$

qui de plus est fonctoriel en Y.

La fonctorialité est claire, une fois établie la démonstration, qui demande plusieurs préliminaires, d'abord de rappeler la construction analytique de la jacobienne de Y.

17.4.1. *Les jacobiennes des courbes de Mumford.* La construction de ces jacobiennes a été donnée d'abord par Mumford lui-même ([36]), la version analytique rigide que nous rappelons ici se trouve dans [20] et dans [13].

Soient $Y \simeq G\backslash\Xi_L$ une courbe de Mumford définie sur L, $X = Y\widehat{\otimes}C$, $\Xi = \Xi_L\widehat{\otimes}C$ et $s : \Xi \to X \simeq G\backslash\Xi$ le revêtement analytique de$X$. Soit D un diviseur de degré 0 sur X, il existe une fonction méromorphe sur Ξ de diviseur s^*D, par exemple, si $D = \sum_{1\leq i\leq r}(a_i - b_i)$ mod. G, où les a_i et b_i sont distincts modulo G, cette fonction est

$$\theta(z) = \theta(D, z) = \prod_{1\leq i\leq r, \gamma\in G} \left(\frac{z - \gamma(a_i)}{z - \gamma(b_i)}\right)$$

et elle s'appelle une fonction thêta. Il existe un homorphisme de groupes $c_\theta : G \to C^\times = \mathbb{G}_m(C)$ tel que $\theta(\gamma(z)) = c_\theta(\gamma)\theta(z)$ pour tout $\gamma \in G$, appelé facteur de la fonction θ. Ces facteurs des fonctions thêta forment un groupe multiplicatif, puisque le produit de deux fonctions thêta est encore l'une d'entre elles. Soit g le genre de Y, donc G est un groupe libre à g générateurs, écrivons $G =< \gamma_1, \cdots, \gamma_g >$; soit $a \in \Xi$, les fonctions thêta correspondant au diviseur trivial sur X sont des produits des fonctions holomorphes sur Ξ

$$u_i(z) = \prod_{\gamma \in G} \left(\frac{z - \gamma(a)}{z - \gamma(\gamma_i(a))} \right) ,$$

dont on montre qu'elles ne dépendent pas du choix de $a \in \Xi$; soit c_i le facteur de la fonction thêta u_i. On voit donc que l'on a des isomorphismes analytiques

$$Jac(X)(C) \simeq \frac{\{c_\theta \ \forall \theta\}}{< u_i >_{1 \leq i \leq g}} \simeq \frac{(C^*)^g}{\Lambda} \simeq \frac{\mathbb{G}_m(C)^g}{\Lambda}$$

où $< u_i >_{1 \leq i \leq g} \rightleftarrows \Lambda$, resp. $\{c_\theta \ \forall \theta\} \rightleftarrows (C^*)^g$, par $c \mapsto (c(\gamma_1), \cdots, c(\gamma_g))$ et Λ est un réseau (multiplicatif) de $(C^*)^g = \mathbb{G}_m(C)^g$. La courbe Y étant définie sur L on montre que cette construction est définie sur L, c'est à dire que $\Lambda \subset (L^*)^g$; soit $\mathbb{T}_L = \mathbb{G}^g_{m/L}$ le tore algébrique de dimension g, déployé sur L et analytifié, on a donc pour tout corps E intermédiaire entre L et L^{sep} une suite exacte

$$0 \to \Lambda \to \mathbb{T}_L(E) \to Jac(Y)(E) \to 0 . \tag{18}$$

Le fait que $Jac(Y)$ soit une variété abélienne principlement poralisée se traduit sur le tore $\mathbb{T}_L$ et sur Λ de la manière suivante. Soit $\mathbb{T}^*_L$le groupe des caractères de $\mathbb{T}_L$, c'est à dire des morphismes de groupes algébriques $\chi : \mathbb{T}_L \to \mathbb{G}_{m/L}$, le fait que $Jac(Y)$ soit l'analytifié sur L d'une variété abélienne principalement polarisée est équivalent à l'existence d'un homorphisme bijectif $\sigma : \Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^*_L$ tel que

(1) (symétrie) $\sigma(\lambda_1)(\lambda_2) = \sigma(\lambda_2)(\lambda_1)$ pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$,
(2) la forme bilinéaire
$$\Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R} \ , \ (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto -\log |\sigma(\lambda_1)(\lambda_2)|$$
est définie et positive.

17.4.2. *Démonstration du théorème 17.3.* On a vu dans le paragraphe 17.3.4 que $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mu_{\ell^n}) \simeq Jac(Y)[\ell^n]$ donc, après avoir fixé un isomorphisme entre les systèms projectifs $(\mu_{\ell^n})_n$ et $(\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})_n$, pris la limite, puis appliqué $\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ et examiné les structures galoisiennes, il vient, où $\mathcal{T}_\ell(\cdot)$ désigne le module de Tate ℓ-adique,

$$H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq_{\mathcal{G}} \mathcal{T}_\ell(Jac(Y)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(-1) . \tag{19}$$

Soient E un corps intermédiaire entre L et L^{sep} et $x \in \mathbb{T}_L(E)$ relevant un point de $Jac(Y)(E)[\ell^n]$, cf la suite exacte (18), alors $x^{\ell^n} \in \Lambda$, donc x est à coordonnées dans E_ℓ. On vient donc de montrer que l'action de $\mathcal{G}$ sur$\mathcal{T}_\ell(Jac(X))$ se factorise par $\mathrm{Gal}(E_\ell/L)$, qui est topologiquement engendré par u et F,

Lemme 17.4. *L'action de $\mathcal{G}$ sur $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ se factorise par $\mathrm{Gal}(E_\ell/L)$, donc est déterminée par celles de u et F.*

Cela résulte des commentaires précédents et de la formule (19).

Lemme 17.5. *Le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel des éléments de $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ invariants sous u est de dimension g.*

Démonstration. Grâce à la formule (19) le lemme est une conséquence de l'isomorphisme de l'espace des éléments de $\mathcal{T}_\ell(Jac(X)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(-1)$ invariants sous u avec $\mathcal{T}_\ell(\mathbb{T}_L) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$ (on désigne par $\mathcal{T}_\ell(\mathbb{T}_L)$ le module de Tate du tore algébrique $\mathbb{T}_L$), isomorphisme que nous montrons maintenant.

De la suite exacte (18) il résulte un homorphisme injectif entre les groupes de torsion

$$\mathbb{T}_L(L^{nr})_{tors} \hookrightarrow Jac(Y)(L^{nr})_{tors} \ , \tag{20}$$

faisons l'hypothèse que le *conoyau de cet homomorphisme est fini.* Alors le morphisme de systèmes projectifs

$$(\mathbb{T}_L[\ell^n])_n \to (Jac(Y)[\ell^n](L^{nr}))_n$$

a un conoyau fini ; il en résulte

$$\mathcal{T}_\ell(\mathbb{T}_L) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \simeq (\mathcal{T}_\ell(Jac(X)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell(-1))^{<u>} \ .$$

Montrons que (20) est à conoyau fini. On a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_L(L^{nr}) & \simeq & \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, (L^{nr})^\times) \\ \lambda & \mapsto & (\chi \mapsto \chi(\lambda) \end{array}$$

soit $v : (L^{nr})^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation de L^{nr} (normalisée par $v(\varpi) = 1$) et soit v_1 l'application obtenue à partir de la précedente en composant les éléments de $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, (L^{nr})^\times)$ avec v, c'est à dire

$$v_1 : \mathbb{T}_L(L^{nr}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, (L^{nr})^\times) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, \mathbb{Z}),$$

il suit de la propiété (2) de $Jac(Y)$, cf la fin du paragraphe (17.4.1), que v_1 est injectif, donc, comparant les dimensions on voit que $v_1(\Lambda)$ est d'indice fini dans $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, \mathbb{Z})$. Considérons l'application v_2 ainsi définie

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{T}_L(L^{nr}) & \xrightarrow{v_1} & \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, \mathbb{Z}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ Jac(Y)(L^{nr}) & \simeq & \mathbb{T}_L(L^{nr})/\Lambda & \xrightarrow{v_2} & \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_L^*, \mathbb{Z})/v_1(\Lambda) \end{array}$$

et montrons

$$(\mathrm{Ker}(v_2))_{tors} = \mathbb{T}_L(L^{nr})_{tors}/\left(\Lambda \cap \mathbb{T}_L(L^{nr})_{tors}\right) = \mathbb{T}_L(L^{nr})_{tors} \tag{21}$$

(la seconde égalité est évidente). Soit $x \in (\mathrm{Ker}(v_2))_{tors}$ et soit $y \in \mathbb{T}_L(L^{nr})$ qui relève x, donc il existe un entier $m > 0$ tel que $y^m \in \Lambda$, et l'on aussi $v_1(y) \in v_1(\Lambda)$, par suite il existe $\lambda \in \Lambda$ et $z \in \mathrm{Ker}(v_1)$ tel que $y = \lambda z$; de $y^m = \lambda^m z^m = 1$ on déduit $z^m \in \Lambda \cap \mathrm{Ker}(v_1)$, donc $z^m = 1$. On peut donc choisir $y\lambda^{-1}$ comme antécédant de x, c'est à dire supposer que $y^m = 1$, donc $y \in \mathbb{T}_L(L^{nr})_{tors}$; la relation (21) est prouvée.

Comme v_2 est à image dns un groupe de torsion, le conoyau de (20) est fini. $\square$

Maintenant nous pouvons terminer la démonstration du théorème 17.3. Il résulte (17) la suite exacte de $\mathcal{G}$-modules

$$0 \to H^1(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \to H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell) \to$$

$$\to \underline{H}(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)(-1) \to 0 \ ,$$

l'action de $\mathcal{G}$ se fait par u et F, cf le lemme 17.3.1, elle est triviale sur $H^1(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ et sur $\underline{H}(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$, u agit trivialement et F est la multiplication par q^{-1} sur $\underline{H}(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)(-1)$. Ainsi il exite une base $\{e_1, \cdots, e_g, f_1, \cdots, f_g\}$ de $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ telle que $\{e_1, \cdots, e_g\}$ soit une base de $H^1(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ et que les images des f_i foment une base de $\underline{H}(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$. Les matrices de F et u agissant sur $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$, écrites par blocs $g \times g$, ont respectivement dans cette base la forme

$$Mat(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat(u) = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

où $A : \underline{H}(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell) \to H^1(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ est une application $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire. L'ensemble des éléments de $H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ invariants sous u forme un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension g, cf le lemme 17.5, donc cet espace des invariants sous u est $H^1(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$, il suit que pour tout i on a $u(f_i) = f_i + h_i$ avec les h_i dans $H^1(G\backslash T_\Xi, \mathbb{Q}_\ell)$ et linéairement indépendants (de $\sum \alpha_i h_i = 0$, avec $\alpha_i \in \mathbb{Q}_\ell$, on déduit $u(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i f_i$). Par conséquent, quitte à remplacer les e_i par les f_i on peut supposer que A est la matrice identité. Ceci termine la démonstration.

17.5. **Formes automorphes et cohomologie étale des courbes modulaires.** Soient de nouveau $K = \mathbb{F}_q(T)$, $A = \mathbb{F}_q[T]$, etc (cf le § 6.1). Soient $\mathcal{K}_f$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathcal{O}_f)$ et $X \subset G(\mathcal{O}_f)$ un système de représentants de $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$, et pour tout $\underline{x} \in X$ les groupes arithmétiques $\Gamma_{\underline{x}} = \underline{x}\mathcal{K}_f\underline{x}^{-1} \cap G(K)$ ainsi que les courbes modulaires $\widetilde{M}_{\Gamma_{\underline{x}}}$, complétées des $\Gamma_{\underline{x}}\backslash\Omega$. Il suit de la proposition (16.9), de la formule (10) et du théorème 17.3

Théorème 17.6. *On a un isomorphisme de $\mathcal{G}$-modules*

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty}\left(V(\mathbb{Q}_\ell), W_0^{\mathcal{K}_f}\right) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell \simeq \oplus_{\underline{x}\in X} H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(\widetilde{M}_{\Gamma_{\underline{x}}}\widehat{\otimes} C, \mathbb{Q}_\ell)$$

On écrit aussi

$$M_{\mathcal{K}_f} = \oplus_{\underline{x}\in X} M_{\Gamma_{\underline{x}}} = G(K)\backslash\left(G(\mathbb{A}_f)\times\Omega\right)/\left(\mathcal{K}_f \times \{\mathrm{Id}\}\right)$$

et $\widetilde{M}_{\mathcal{K}_f} = \oplus_{\underline{x}\in X}\widetilde{M}_{\Gamma_{\underline{x}}}$, l'isomorphisme de $\mathcal{G}$-modules du théorème devient alors

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty}\left(V(\mathbb{Q}_\ell), W_0^{\mathcal{K}_f}\right) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} U_\ell \simeq H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(\widetilde{M}_{\mathcal{K}_f}\widehat{\otimes} C, \mathbb{Q}_\ell)\ .$$

Les courbes $\widetilde{M}_{\mathcal{K}_f}$, vues comme des courbes sur K_∞, forment un système projectif, où $\mathcal{K}_f$ décrit les sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathbb{A}_f)$, sur lequel $G(\mathbb{A}_f)$ opère de la manière suivante : $G(\mathbb{A}_f)$ agit sur lui même par multiplication à droite, si $\underline{g} \in G(\mathbb{A}_f)$ il vient une bijection $G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f \simeq G(\mathbb{A}_f)/(g^{-1}\mathcal{K}_f g)$, donc un isomorphisme $\Omega\times G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f \simeq \Omega\times G(\mathbb{A}_f)/(g^{-1}\mathcal{K}_f g)$ compatible avec l'action à gauche de $G(K)$, d'où un isomorphisme des courbes affines $M_{\mathcal{K}_f} \simeq M_{g^{-1}\mathcal{K}_f g}$, par suite entre leurs compactifications. Il vient donc une action à droite de $G(\mathbb{A}_f)$ sur la limite projective des courbes $\widetilde{M}_{\mathcal{K}_f}$, qui est un schéma sur K_∞, que l'on note $\widetilde{M}_{/K_\infty}$. Il en résulte une action à gauche sur

$$H^1_{\text{ét}}(\widetilde{M}_{K_\infty}\otimes_{K_\infty} C, \mathbb{Q}_\ell) \overset{\text{déf.}}{=} \varinjlim_{\mathcal{K}_f} H^1_{\text{ét}-\text{rig}}(\widetilde{M}_{\mathcal{K}_f}\otimes_{K_\infty} C, \mathbb{Q}_\ell)\ ,$$

il vient (rappelons que $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(K_\infty^{\text{sép}}/K_\infty) = \mathrm{Aut}_{K_\infty, cont}(C)$)

Corollaire 17.7. *Il existe un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f)\times\mathcal{G}$-équivariant*

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell), W_0(\mathbb{Q}_\ell)) \otimes U_\ell \to H^1_{\text{ét}}(\widetilde{M}_{K_\infty}\otimes_{K_\infty} C, \mathbb{Q}_\ell)\ .$$

Pour tout élément non nul et non inversible N de A (on pourrait dire pour tout idéal non trivial, mais A est ici principal) on note $\mathcal{K}_N$ le noyau de l'application $G(\mathbb{A}_f) \to G(A/NA)$, la courbe modulaire correspondante est notée $\widetilde{M}_N$, on a vu qu'elle est définie sur K (et même sur $A[1/N]$), soient $\widetilde{M}_{N/K_\infty} = \widetilde{M}_N \otimes_K K_\infty$. Les groupes $\mathcal{K}_N$ forment une partie cofinale de l'ensemble des $\mathcal{K}_f$, donc

$$H^1_{\text{ét}}(\widetilde{M}_{/K_\infty} \otimes C, \mathbb{Q}_\ell) = \varinjlim_N H_{\text{ét}-\text{rig}}(\widetilde{M}_{N/K_\infty} \otimes_{K_\infty} C, \mathbb{Q}_\ell) \ .$$

Soit

$$H_{\text{ét}} = \varinjlim_N H_{\text{ét}-\text{rig}}(\widetilde{M}_{N/K_\infty} \otimes_{K_\infty} C, \mathbb{Q}_\ell^{\text{alg}}) \ , \tag{22}$$

$H_{\text{ét}}$ est muni d'une action de $G(\mathbb{A}_f) \times \mathcal{G}$,

Corollaire 17.8. *Il existe un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f) \times \mathcal{G}$-équivariant*

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\text{alg}}), W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\text{alg}})) \otimes U_\ell \to H_{\text{ét}} \ .$$

18. La correspondance de Langlands.

Dans ce dernier résultat 17.8, le membre de droite est construit à l'aide de groupes de cohomologies de courbes définies sur K, donc est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(K^{\text{alg}}/K)$, ce sont donc des représentations galoisiennes absolues de K qui sont décrites. Nous montrons maintenant comment ceci s'intègre dans le programme de Langlands.

18.1. **Les représentations admissibles.** Soit G un groupe topologique localement profini, c'est à dire tel qu'une base de voisinages ouverts de l'identité soit constituée de sous-groupes ouverts compacts. Les groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{GL}_2(K_v)$ sont ainsi, où K_v est le complété de K en une palce v.

Soit ρ une représentation de G dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, on dit que *la représentation ρ est lisse* si pour tout $x \in V$ le stabilisateur de x contient un sous-groupe ouvert compact. On dit que *la représentation ρ est admissible* si de plus, pour tout sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}$ le sous-espace $V^{\mathcal{K}}$ est de dimension finie.

On suppose de plus que G possède un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}$ tel que $G/\mathcal{K}$ soit dénombrable, ceci est alors vrai pour tout sous-groupe ouvert compact et les exemples donnés au dessus vérifient cette hypothèse. Un groupe localement profini G vérifiant cette hypothèse possède la propriété suivante : soit (ρ, V) une représentation lisse et irréductible de G, alors V possède une base dénombrable. En effet, soit $x \in V$, $x \neq 0$, soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact qui stabilise x, alors $V = \sum_{g \in G/\mathcal{K}} \mathbb{C} g(x)$.

(Lemme de Schur) Soient (ρ, V) une représentation admissible irréductible de G et f l'un de ses endomorphismes, alors f est une homothétie. En effet, comme ρ est lisse il existe un sous- groupe ouvert compact $\mathcal{K}$ de G tel que $V^{\mathcal{K}} \neq \{0\}$, comme ρ est admissible la dimension de $V^{\mathcal{K}}$ est finie, donc $f|V^{\mathcal{K}}$ possède une valeur propre λ, puisque ρ est irréductible on a $\mathrm{Ker}(f-\lambda) = V$.

Soit (ρ, V) une représentation admissible irréductible de G, on vient de voir que le centre Z de G opère sur V par des homothéties, c'est à dire qu'il existe un caractère ψ_ρ de G tel que $\rho|Z = \psi_\rho \mathrm{Id}_V$, ce caractère est continu car son noyau est ouvert, en effet soit $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact de G tel que $V^{\mathcal{K}} \neq \{0\}$, alors ψ_ρ est trivial sur $Z \cap \mathcal{K}$ [dans toute la suite le terme "caractère" signifiera "caractère continu"].

Il suit de ceci que les représentations admissibles irréductibles abéliennes de G sont de dimension 1.

Il faut remarquer que la topologie du corps $\mathbb{C}$ ne joue aucun rôle ici, on peut le remplacer par n'importe quel corps de caractéristique 0 et algébriquement clos, nous le ferons en particulier par $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$.

Soit donc L un corps de caractristique 0 et algébriquement clos, on écrit encore $G = \mathrm{GL}_2$.

L'espace $W_0(L)$ est une représentation admissible de $G(\mathbb{A})$. La lissité est une conséquence directe de la définition, l'admissibilité provient du théorème de Harder (th. 16.4).

L'espace $\underline{H}_!(\tau \times G(\mathbb{A}_f), L)^{G(K)}$ est une représentation admissible de $G(\mathbb{A}_f)$. Cet espace est la limite inductive des $\underline{H}_!(\tau \times G(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f, L)^{G(K)}$, où $\mathcal{K}_f$ décrit les sous-groupes ouverts compacts de $G(\mathbb{A}_f)$, et chacun de ces termes est de dimension finie (corollaire 16.10 et avant).

L'espace $H_{\text{ét}}$ (cf (22)) est une représentation admissible de $G(\mathbb{A}_f)$, c'est une conséquence de l'exemple précédent.

L'espace $V_{sp}(L)$ est une représentation admissible et irréductible de $G(K_\infty)$ (la représentation spéciale). Rappelons que $V_{sp}(L) = X/L$ où X est l'espace des fonctions $\mathbb{P}^1(K_\infty) \to L$ localement constantes ; X est linéairement engendré par les fonctions caractéristiques des disques, donc $V_{sp}(L)$ est une représentation de $G(K_\infty)$ admissible (le quotient de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ par un sous-groupe ouvert compact de $G(K_\infty)$ est fini). Sur $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ on a une mesure, qui à un disque de rayon ϖ_∞^m associe la valeur $|\varpi_\infty|^m = q^{-m} \in \mathbb{Q} \subset L$; soit donc V le sous-espace de X engendré par les $1_D - \mathrm{mes}(D)$, où 1_D est l'indicatrice de D, ce dernier décrivant les disques de $\mathbb{P}^1(K_\infty)$ (fermés de rayons dans $|K_\infty^\times|$). On voit facilement que V ne contient aucune fonction constante (car ses éléments sont tous "d'intégrales nulles"), donc on a la somme directe de représentation $X = V \oplus L$ et V est une représentation isomorphe à $V_{sp}(L)$. On peut vérifier assez aisément que V est irréductible.

Soit la représentation $\mathrm{Ind}_{B(K_\infty)}^{G(K_\infty)} 1_{B(K_\infty)}$, induite à $G(K_\infty)$ de la repésentation triviale de $B(K_\infty)$; elle est ainsi définie : c'est l'ensemble Y des fonctions $f : G(K_\infty) \to L$ possédant la propriété suivante, il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}(f)$ (dépendant de f) de $G(K_\infty)$ tel que pour tous $k \in \mathcal{K}(f)$, pour tout $b \in B(K_\infty)$ l'on ait $f(bgk) = f(g)$ pour tout $g \in G(K_\infty)$; cet espace Y est muni de l'action à droite de $G(K_\infty)$. Les représentations X et Y sont isomorphes car $\mathbb{P}^1(K_\infty) \simeq B(K_\infty)\backslash G(K_\infty)$. Ainsi $V_{sp}(L)$ est une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_{B(K_\infty)}^{G(K_\infty)} 1_{B(K_\infty)}$, ce qui prouve que la représentaion spéciale $V_{sp}(L)$ de $G(K_\infty)$ est non cuspidale ([7]), on donne des détails sur cette notion dans la paragraphe suivant.

18.2. **Les représentations admissibles de $G(K_v)$.** Les représentations sont toutes supposées dans des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. , bien que l'on puisse s'affranchir de cette hypoyhèse, comme l'on a déjà remarqué et comme il sera précisé plus loin. Les résultats résumés ici se trouvent presque tous dans [5], mais aussi dans les écrits antérieurs [29] et [17]. La lettre v désigne une place de K et K_v le complété en cette place. On écrit toujours $G = \mathrm{GL}_2$, aussi

$$B_v = B(K_v) = \begin{pmatrix} K_v^\times & K_v \\ 0 & K_v^\times \end{pmatrix} \ , \ N_v = N(K_v) = \begin{pmatrix} 1 & K_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$T_v = T(K_v) = \begin{pmatrix} K_v^\times & 0 \\ 0 & K_v^\times \end{pmatrix} \ .$$

Soit (π, V) un représentation lisse de $G(K_v)$, soient

$$V(N_v) = \sum_{x \in V, \underline{n} \in N_v} \mathbb{C}(x - \pi(\underline{n})x) \quad \text{et } V_{N_v} = V/V(N_v) \ ,$$

l'espace V_{N_v} est muni d'une représentation lisse de $T_v \simeq B_v/N_v$ provenant de π et notée π_{N_v} ; *la représentation* (π_{N_v}, V_{N_v}) *de* T_v *s'appelle le module de Jacquet de* (π, V). Le foncteur

$$\mathrm{Rep}(G(K_v)) \to \mathrm{Rep}(T_v) \ , \ (\pi, V) \mapsto (\pi_{N_v}, V_{N_v})$$

s'appelle *le foncteur de Jacquet*, il est exact et additif ([5] part 3 § 9).

Les représentaions de $G(K_v)$ se séparent en deux groupes, celles dont le module de Jacquet est nul et appelées les représentations cuspidales,

7. le mot anglais "cuspidal" semble maintenant remplacer le terme plus ancien "parabolique", on peut le regretter, mais il ne s'agit que de remplacer un mot d'origine grecque par un autre d'origine latine.

celles au contraire dont le module de jacquet est non nul qui sont donc dites non cuspidales ou encore appelées des séries principales.

18.2.1. *Les représentations induites.* Commençons par examiner les séries principales. Soit (π, V) une représentation de $G(K_v)$ avec donc $V_{N_v} \neq \{0\}$, la représentation π_{N_v} de T_v peut être vue comme une représentation de B_v triviale sur N_v ; nous allons considérer la représentation induite au groupe $G(K_v)$.

Soit (σ, W) une représentation lisse d'un sous-groupe fermé H de $G(K_v)$, soit $\mathrm{Ind}_H^{G(K_v)}\sigma$ la représentaion de $G(K_v)$ ainsi définie : son espace est celui des fonctions $f : G(K_v) \to W$ telles que

– pour tous $h \in H$ et $g \in G(K_v)$ on a $f(hg) = \sigma(h)f(g)$,
– il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathcal{K}$, dépendant de f, tel que $f(gk) = f(g)$ pour tous $g \in G(K_v)$ et tout $k \in \mathcal{K}$,

et $G(K_v)$ agit à droite sur cet espace de fonctions ; cette représentaion $\mathrm{Ind}_H^{G(K_v)}\sigma$ de $G(K_v)$ est la représentation induite par σ à $G(K_v)$, elle est lisse ([5] part 1 § 2) Soient (π, V) un représentation lisse de $G(K_v)$ et $\sigma, W)$ une représentation lisse de H, alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels (Loi de réciprocité de Frobenius)

$$\mathrm{Hom}_{G(K_v)}(\pi, \mathrm{Ind}_H^{G(K_v)}\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$$

qui à $\varphi \in \mathrm{Hom}_{G(K_v)}(\pi, \mathrm{Ind}_H^{G(K_v)}\sigma)$ associe $x \mapsto \varphi(x)(1)$ pour tout $x \in V$. Le foncteur $\mathrm{Ind}_H^{G(K_v)}$ est additif et exact.

Soient (σ, W) et (π, V) deux représentations lisses de T_v et $G(K_v)$ respectivement, (σ, W) étant vue comme une représentation de B_v triviale sur N_v, alors il suit en particulier de la loi de réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Hom}_{G(K_v)}(\pi, \mathrm{Ind}_{B_v}^{G(K_v)}\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{B_v}(\pi, \sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{T_v}(\pi_{N_v}, \sigma) \ .$$

Proposition 18.1. *(*[5] *part 3 § 9) Soit* (π, V) *une représentation lisse et irréductible de* $G(K_v)$*, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *la représentation* π *n'est pas cuspidale, i.e.* $V_{N_v} \neq \{0\}$*,*

(2) *la représentation* π *est isomorphe à une sous-représentation d'une représentation de la forme* $\mathrm{Ind}_{B_v}^{G(K_v)}\chi$*, où* χ *est un caractère de* T_v*.*

On voit donc que la représentation spéciale $V_{sp}(\mathbb{C})$ (ou $V_{sp}(L)$) de $G(K_\infty)$ n'est pas cuspidale. Plus généralement on définit la *représentation de Steinberg* $St_{G(K_v)}$ *de* $G(K_v)$ par la suite exacte

$$0 \to 1_{G(K_v)} \to \mathrm{Ind}_{B_v}^{G(K_v)} 1_{G(K_v)} \to St_{G(K_v)} \to 0$$

le module de Jacquet de $St_{G(K_v)}$ est la représentation $(St_{G(K_v)})_{N_v}$ qui à $\begin{pmatrix} t_1 & n \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in B_v$ associe $|t_1/t_2|_v$ (donc $(St_{G(K_v)})_{N_v}$ est l'inverse du "module de B_v"). En utilisant la dualité lisse (qui n'a pas été introduite ici) on voit que la représentation de Steinberg n'est pas cuspidale.

Si ζ est un caractère de $K_v^\times$ on a de même une suite exacte de $G(K_v)$-modules définissant la représentation $\zeta \cdot St_{G(K_v)}$, appelée *représentation spéciale de* $G(K_v)$,

$$0 \to \zeta \circ \det \to \mathrm{Ind}_{B_v}^{G(K_v)} \zeta^{\otimes^2} \to \zeta \cdot St_{G(K_v)} \to 0 \ ,$$

où det désigne le déterminant sur $G(K_v)$, $\zeta^{\otimes^2}$ le caractère de T_v qui à $\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$ associe $\zeta(t_1)\zeta(t_2)$.

On touve dans [29] § 2, [17] § 4 et [5] part 3 § 9 les résultats suivants

Proposition 18.2. *Soient* χ_1 *et* χ_2 *deux caractères de* $K_v^\times$*, soit* ξ *le caractère de* T_v*,* $\xi : \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mapsto |t_1/t_2|_v^{1/2} \chi_1(t_1)\chi_2(t_2)$*. Soit* $\rho(\chi_1, \chi_2) = \mathrm{Ind}_{B_v}^{G(K_v)} \xi$*,*

(1) *la représentation* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *est irréductible si et seulement si* $\chi_1\chi_2^{-1}$ *n'est pas l'un des caractères* $x \mapsto |x|_v^{\pm 1}$ *;*

(2) *les représentations* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *et* $\rho(\chi_1', \chi_2')$ *sont isomorphes si et seulement si* $\{\chi_1, \chi_2\} = \{\chi_1', \chi_2'\}$ *;*

(3) *supposons* $\rho(\chi_1, \chi_2)$ *réductible, alors il existe une suite exacte de* $G(K_v)$*-modules*

$$0 \to X \to \rho(\chi_1, \chi_2) \to Y \to 0$$

où

(a) *soit* X *est de dimension* 1 *et* Y *de dimension infinie, ceci étant réalisé si* $\chi_1\chi_2^{-1} = x \mapsto |x|_v^{-1}$*,*

(b) *soit* Y *est de dimension* 1 *et* X *de dimension infinie, ceci étant réalisé si* $\chi_1\chi_2^{-1} = x \mapsto |x|_v$*.*

Dans le cas (a), par définition Y *est une représentation spéciale (associée au caratère* $x \mapsto |x|_v\chi_1(x)$*), c'est encore une représentaion spéciale dans la cas (b), cela se voit par la dualité lisse.*

Un résultat important qu'il faut citer est

Proposition 18.3. *(op. cit. part 3 § 9.4 et 10.2) Les représentations de* $G(K_v)$ *lisses et irréductibles sont admissibles.*

Beaucoup d'autres propriétés des représentations lisses de $G(K_v)$ se trouvent dans [29], [17] et dans [5], ce dernier ouvrage leur étant consacré et dans lequel se trouve détaillée la sructure des représentations cuspidales, dont nous avons très peu dit ici.

18.2.2. *Les représentations de classe* 1*, unitaires.* Une représentation (π, V) admissible irréductible de $G(K_v)$ est dite *de classe* 1*, ou shérique* (ou encore parfois non ramifiée), si $V^{G(\mathcal{O}_v)} \neq \{0\}$. La dimension de $V^{G(\mathcal{O}_v)}$ est le nombre de fois que la représentation identité est contenue dans π.

On dit qu'un *caractère* χ *de* $K_v^\times$ *est non ramifié si son noyau contient* $\mathcal{O}_v^\times$. Le résultat suivant de trouve dans [17], th. 4.23 (voir aussi [5], part 3 § 9.6-9.8).

Proposition 18.4. *Soit* (π, V) *une représentation admissible irréductible de* $G(K_v)$*, elle est de classe* 1 *si et seulement si elle est de la forme* $\rho(\chi_1, \chi_2)$*, où* χ_1 *et* χ_2 *sont des caractères non ramifiés de* $K_v^\times$*. S'il en est ainsi, la représentation identité est contenue une seule fois dans* π*.*

Soit (π, V) une représentation admissible et irréductible de $G(K_v)$, à valeur dans un L-espace vectoriel V, où L est un corps algébriquement clos de caractéristique 0. La dimension de V est dénombrable : soient $x \in V$, $x \neq 0$, et $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert compact qui stabilise x, alors V est engendré par les $\pi(g)x$, $g \in G(K_v)/\mathcal{K}$ et ce dernier est dénombrable. On déduit d'ailleurs mieux de cette remarque : la représentaion π est déterminée par les coefficients des $\pi(g)$, g décrivant un système de représentants de $G(K_v)/\mathcal{K}$, donc par un nombre dénombrable d'éléments de L, ainsi L peut être remplacé par un sous-corps L' engendré sur $\mathbb{Q}$ par un ensemble dénombrable et l'on peut écrire $V = L \otimes_{L'} V'$ où V' est un L' espace vectoriel et une représentation π' irréductible et admissible de $G(K_v)$. Le corps L' peut être plongé dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \otimes_{L'} V'$ est une représentation irréductible et admissible de $G(K_v)$.

Une représentation (π, V) admissible de $G(K_v)$, à valeurs dans un espace vectoriel complexe V, est dite pré-unitaire si elle laisse invariante une forme hermitienne sur V, elle est dite unitaire si cette forme hermitienne fait de V un espace complet (donc un espace de Hilbert). A partir d'une représentation pré-unitaire on obtient une représentation unitaire par complétion. Le commentaire précédent montre que les notions de représentations pré-unitaires ou unitaires s'étendent aux représentations admissibles et irréductibles (π, V) de $G(K_v)$, à valeur dans un L-espace vectoriel V, où L est un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

Les représentations $\rho(\chi_1, \chi_2)$ sont unitaires si et seulement si χ_1 et χ_2 sont des caractères unitaires de $K_v^\times$, c'est à dire à valeurs dans les nombres complexes de module 1.

18.3. **Produit tensoriel restreint de représentations.** Pour toute place v de K soit (π_v, V_v) une représentation admissible irréductible et unitaire de $G(K_v)$, à valeurs dans un espace complexe V_v. On suppose que pour presque toute place v ([8]) la représentation π_v est de classe 1. Soit S_0 l'ensemble des places v telles que π_v n'est pas de classe 1. Pour toute place v de classe 1 on note ξ_v un élément non nul de V_v stable sous $G(\mathcal{O}_v)$.

Soient S un ensemble fini de places de K, $S \supset S_0$, et $V_S = \otimes_{v \in S} V_v$, $\pi_S = \otimes_{v \in S} \pi_v$. Soit S' un ensemble fini de places de K, $S' \supset S$, on a une application naturelle

$$V_S \to V_{S'} \ , \ \xi \mapsto (\xi \otimes_{v \in S' - S} \xi_v)$$

(dans cette définition on utilise fortement la "commutativité du produit tensoriel"), ceci permet de définir la représentation suivante de $G(\mathbb{A})$

$$(\varinjlim \pi_S, \varinjlim V_S)$$

la limite inductive tant prise suivant les ensembles finis de places de K contenant S_0. Par complétion de l'espace de la représentation (par rapport à la forme hermitienne déduites de celles des V_v) on obtient une représentation unitaire (π, V) de $G(\mathbb{A})$, souvent notée $(\otimes'_v \pi_v, \widehat{\otimes}_v V_v)$, qui est donc unitaire, mais aussi irréductible et admissible (cf [17] p.76). *Une telle représentation π est dite décomposable, elle s'appelle le produit tensoriel restreint des π_v.*

Ce que l'on vient de faire peut être reproduit à l'identique pour $G(\mathbb{A}_f)$.

Théorème 18.5. *Les représentations admissibles irréductibles et unitaires π de $G(\mathbb{A})$, ou de $G(\mathbb{A}_f)$, sont des produits tensoriels restreints, leurs facteurs locaux π_v de $G(K_v)$ sont uniques ($\pi_v = \pi | G(K_v)$), admissibles irréductibles et unitaires (op. cit. th. 4.30, p. 76).*

18.3.1. *Décomposition de $W_0(L)$.* La décomposition de la représentation $W_0(\mathbb{C})$ de $G(\mathbb{A})$ est étudiée dans [17], th.5.7 et [29] prop. 11.1.1 : la représentation $W_0(\mathbb{C})$ est la somme directe

$$W_0(\mathbb{C}) = \oplus_{\pi \in \Pi} V_\pi$$

d'une famille de représentation admissibles, irréductibles et unitaires de $G(\mathbb{A})$. Deux résultats importants sont les suivants.

8. c'est à dire pour toutes les places sauf un nombre fini, on écrira pp, abrévation de "presque partout", au lieu de "pour presque tout..."

– Propriété de la multiplicité 1 : si $\pi \neq \pi'$, alors V_π et $V_{\pi'}$ ne sont pas $G(\mathbb{A})$-isomorphes.
– Propriété forte de la multiplicité 1 : si les facteurs locaux de V_π et $V_{\pi'}$ sont pp $G(K_v)$-isomorphes, alors $\pi = \pi'$.

Nous voulons étendre ces considérations à $W_0(L)$, où L est un corps algébriquemment clos et de caractérisique 0, $L \supset \mathbb{Q}$. Soit un plongement $\iota : \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} \hookrightarrow \mathbb{C}$. On a $W_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}} W_0(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}})$, donc le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}}\mathbb{C}$ agit sur $W_0(\mathbb{C})$ par permutation des V_π (cf la multiplicité 1) ; montons que les V_π sont invariants sous cette action. Soient V_π et $V_{\pi,v} = \rho(\chi_1, \chi_2)$ l'un de ses facteurs locaux de classe 1, où donc χ_1 et χ_2 sont des caractères non ramifiés de $K_v^\times$, alors la relation $\{\chi_1(\varpi_v), \chi_2(\varpi_v)\} \not\subset \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ implique que l'orbite de $V_{\pi,v}$ sous $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}}\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable, donc aussi celui de V_π, ce qui est faux. Donc $\{\chi_1(\varpi_v), \chi_2(\varpi_v)\} \subset \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, c'est à dire que χ_1 et χ_2 ont tous deux leurs images dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$. Il suit qu'il existe $W_0(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) = \oplus W_\pi$ avec $V_\pi = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}} W_\pi$ pour tout $\pi \in \Pi$. De plus on sait que si $V_{\pi,v}$ est de clase 1, $\chi_1(\varpi_v)$ et $\chi_2(\varpi_v)$ sont tous deux de valeur absolue 1 (dans $\mathbb{C}$). Cette dernière propriété ne dépend pas du choix du plongement ι de $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ dans $\mathbb{C}$, en effet, si $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}/\mathbb{Q})$, alors $\gamma(V_\pi) = V_\gamma \circ \pi$ et $V_{\gamma\circ\pi,v} = \rho(\gamma \circ \chi_1, \gamma \circ \chi_2)$.

Conclusion. Pour tout corps algébriquement clos et de caractéristique zéro $L \supset \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, on a

$$W_0(L) = L \otimes_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}} W_0(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}) = \oplus_{\pi\in\Pi} \left(L \otimes_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}} W_\pi\right) \ ,$$

les $W_\pi(L) := L \otimes_{\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}} W_\pi$ ayant leurs facteurs locaux $W_\pi(L)_v$ pp de classe 1, les caractères χ_1, χ_2 non ramifiés de K_v^* correspondant au facteur local $W_\pi(L)_v$ de type 1 vérifiant : $\chi_1(\varpi_v)$ et $\chi_2(\varpi_v)$ sont des nombres algébriques de valeur absolue 1 dans $\mathbb{C}$, quel que soit le plongement de $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ dans $\mathbb{C}$.

18.3.2. *Décomposition de* $\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})) \otimes U_\ell$. On fixe un plongement $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$. Nous commençons par décomposer $\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}))$. Rappelons que $V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ est un $G(K_\infty)$-module admissible et irréductible. Écrivons la décomposition de $W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ en somme directe de représentations irréductibles :

$$W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) = \oplus_{\pi\in\Pi} W_\pi(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \ ,$$

et chaque $W_\pi(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ est un produit tensoriel restreint

$$W_\pi(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) = \otimes'_v W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \ ,$$

on a

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})) = \oplus_\pi \mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_\pi(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})) \ ,$$

par suite $\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_\pi(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})) \neq \{0\}$ si et seulement si $\pi \in \Pi_\infty$, où Π_∞ est l'ensemble des $\pi \in \Pi$ tels que $V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \simeq W_{\pi,\infty}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ en tant que $G(K_\infty)$-modules. Plus précisément, si $\pi \in \Pi_\infty$

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_\pi(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})) \simeq \otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \ ,$$

donc, on a l'isomorphisme de $G(\mathbb{A}_f)$-modules

$$\mathrm{Hom}_{G(K_\infty)}(V_{sp}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}), W_0(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})) \simeq \oplus_{\pi\in\Pi_\infty} \otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$$

et il suit du corollaire 17.8 (voir aussi la formule (22)) l'isomorphisme de $G(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{alg}}/K_\infty)$-modules

$$\oplus_{\pi\in\Pi_\infty} \otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \otimes U_\ell \simeq H_{\text{ét}} \ .$$

Le module $H_{\text{ét}}$ est construit à l'aide de groupes de cohomologie étale d'une courbe défini sur K, donc il est muni d'un opération de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$, et l'on voit par exemple en examinant la démonstration du théorème 17.3 que restreinte à $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{alg}}/K_\infty)$ elle redonne l'action sur le membre de gauche de la formule précédente.

L'action de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ sur $H_{\text{ét}}$ commute avec celle de $G(\mathbb{A}_f)$, donc $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ opère sur chacun des $\otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \otimes U_\ell$, avec $\pi \in \Pi_\infty$, comme $\otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$ est une représentation admissible et irréductible de $G(\mathbb{A}_f)$, le lemme de Schur montre que tout endomorphisme de $\otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \otimes U_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$-linéaire et commutant avec l'action de $G(\mathbb{A}_f)$, est en fait de la forme $\lambda \otimes \sigma$, où $\lambda \in \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et σ est un endomorphisme $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$-linéaire de U_ℓ. Autrement dit, le groupe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ agit sur U_ℓ et cette action est irréductible, à cause de ce qu'il a été précisé plus haut sur les actions galoisiennes. On note $\gamma \mapsto \sigma(\pi)_\ell(\gamma)$ cette action de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ sur U_ℓ, elle dépend de $\pi \in \Pi_\infty$ et de ℓ.

Par conséquent, en tant que $G(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K$-module on a la décomposition suivante en somme directe de représentations irréductibles

$$H_{\text{ét}} \simeq \oplus_{\pi\in\Pi_\infty} \left(\otimes'_{v\neq\infty} W_{\pi,v}(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}) \otimes \sigma(\pi)_\ell\right) \tag{23}$$

On peut remarquer que les représentation $\sigma(\pi)_\ell$ sont continues, pour les topologies de $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$ et profinie de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$.

18.4. **La loi de réciprocité.** Nous sommes maintenant à même d'énoncer la Loi de réciprocité de Drinfeld et d'en comprendre les termes, mais la démontrer dans tous ses détails demanderait encore beaucoup, les idées sont dans l'article [10] de Drinfeld, beaucoup de détails sont donnés dans le survey de Deligne et Husemoller [9]. Nous ne faisons ici qu'énoncer les résultats.

Soit v une place de K, les représentation de $\mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{alg}}/K_v)$ triviales sur le sous-groupe d'inertie sont dites non ramifiées ; on dit aussi que les représentations de $G(K_v)$ de classe 1 sont non ramifiées. On va utiliser certaines définitions et notation du paragraphe précédent.

Théorème 18.6. *Soient $\pi \in \Pi_\infty$ et v, $v \neq \infty$, une place de K telle que $W_{\pi,v}$ soit non ramifiée et soit $\{\chi_1, \chi_2\}$ les carcatères de K_v^* qui lui correspondent. Alors v est une place non ramifiée pour la représentation $\sigma(\pi)_\ell$. Soit $Fr_v \in Gal(K_v^{\mathrm{alg}}/K_v)$ un automorphisme de Frobenius, alors les valeurs propres de $\sigma(\pi)_\ell(Fr_v)$ sont $\{q_v^{1/2}\chi_1(\varpi_v), q_v^{1/2}\chi_2(\varpi_v)\}$.*

Ce résultat est crucial, il en résulta par exemple que si $\sigma(\pi)_\ell \simeq \sigma(\pi')_\ell$ alors $\pi \simeq \pi'$, en effet pour toute place v non ramifiée pour W_π et $W_{\pi'}$ les facteurs locaux $W_{\pi,v}$ et $W_{\pi',v}$ sont isomorphes, donc $\pi \simeq \pi'$ d'aprés la propriété forte de la multiplicité 1.

Pour tout nombre premier $\ell \neq p$ on choisit un plongement $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} \hookrightarrow \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}}$. Soit Σ_∞ l'ensemble des familles $(\rho_\ell)_{\ell \neq p}$ telles que ρ_ℓ est une classe d'isomorphie de représentations $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}})$, continues, possédant les propriétés suivantes

(1) pour tout ℓ la retriction de ρ_ℓ à $\mathrm{Gal}((K_\infty^{\mathrm{alg}}/K_\infty)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{alg}} \otimes U_\ell$,

(2) il existe un ensemble fini S de places de K, $\infty \in S$, tel que toute place $v \notin S$ soit non ramifiée pour toutes les représentations ρ_ℓ,

(3) pout tout place $v \notin S$, le polynôme caarctéristique de $\rho_\ell(Fr_v)$ ne dépend pas de ℓ, il est à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$, on le note $T^2 - a_v T + b_v \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[T]$,

(4) les zéros de $T^2 - a_v T + b_v \in \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}[T]$ sont des nombres algébriques qui, quel que soit le plongement de $\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ dans $\mathbb{C}$, sont de valeur absolue $q_v^{1/2}$.

Théorème 18.7. *(Loi de réciprocité de Drinfeld) L'application $\Pi_\infty \to \Sigma_\infty$, qui à π associe $(\sigma(\pi)_\ell)_{\ell \neq p}$, est une bijection.*

C'est un cas particulier de la correspondance de Langlands pour GL_2, celui des représentations qui sont spéciales à l'infini. La preuve de ce dernier théorème passe par les fonction L, de mainière à utiliser les valeurs propres des Frobenius, la rationnalité de ces fonctions L et leurs équations fonctionnelles([8]).

Références

[1] Alden-Biesen. Drinfeld Modules, Modular Schemes end Applications, Gekeler E.U., van der Put M., Reversat M., Van Geel J. edts, , Poceedings of a Workshop in Alden-Biesen 9-14 sept. 1996, Belgium, World Scientific, 1997.

[2] Berkovich V.,Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces, Publ. Math. I.H.É.S. 78, 1993.

[3] Bosch S., Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme, Man. Math. 20, p. 1-27, 1977.

[4] Boutot J.-F., Carayol H., Uniformisation p-adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et Drinfeld, in Courbes modulaires et courbes de Shimura, Astérisque 196-197, Soc. Math. France, 1991.

[5] Bushnell C. J., Henniart G., The local lanflands conjecture for GL(2), Grund. der math. Wiss. 335, Springer Verlag, 2006.

[6] Carlitz L., A class of polynomial, Trans Amer. Soc. 43, p.167-182, 1938.

[7] Cassels J.W.S. Global Fields, in Algebraic Number Theory, ed. Cassels J.W.S.-Fröhlich A., Acad. Press 1969, 5th printing 1990.

[8] Deligne P., Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, LN in Math. 349, p.143-316, 1973.

[9] Deligne P., Husemöller, Survey of Drinfeld Modules, Contemporary Mathematics vol. 67, p.25-91, 1987.

[10] Drinfeld V. G., Elliptic Modules, russian Math. Sb. 94, p. 594-627, 1974 ; english trans. Math. USSR-Sb 23, p. 561-592, 1976.

[11] Drinfeld V. G., Coverings of p-Adic Symmetric Regions, Func. Analysis and Appli. 10-2, p. 107-115, 1976.

[12] Fresnel J., Gémétrie analytique rigide, manuscrit, cours à l'Université de Bordeaux 1, 1983-1984.

[13] Fresnel J., van der Put M., Géométrie analytique rigide et applications, PM 18, Birkhaüser, 1981.

[14] Gekeler E., Drinfeld modular curves, LN 1231, Springer 1986.

[15] Gekeler E., On finite Drinfeld modules, J. Algebra 141, p.187-203, 1991.

[16] Gekeler E., Reversat M., Jacobians of Drinfeld modular curves, J. r. u. angw Math.476, p. 27-93, 1996.

[17] Gelbart Stephen S., Automorphic Forms on Adèle Groups, Princeton Univ. Press n° 83, 1975.

[18] Gerrizen L., Die Norm der gleichmässigen Konvergenz auf reduzierten k-affinoiden Algebren, J. für die reine und angewwandte Math., Bd 231, p. 114-120, 1968.

[19] Gerrizen L., Grauert H., Die Azyklität der affinoïden Überdeckungen. Global analysis papers in honour of Kodaira, p.159-184, Univ. Tokyo Press, 1969.

[20] Gerritzen L., van der Put M., Schottky groups and Mumford curves, LN 817, Springer 1980.

[21] Godement R., Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques, Sém. Bourbaki 257, 1962/63.

[22] Godement R., Notes on Jacquet-langlands theory, Institute for Advanced Studies, Princeton NJ, 1970.

[23] Gos D., Basic Structures of Function Field Arithmetic, Sringer 1996.

[24] Grothendieck Alexandre, Sur quelques pointe d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., p. 119-221, 1957.

[25] Harder G., Chevalley groups over function fiels and automorphic forms, ANN ; of Math. 100, p. 249-306, 1974.

[26] Hayes D. R., Explicit class field theory for rational function fields, Trans. Amer. Soc. 189, p.77-91, 1974.

[27] Hayes D. R., Explicit class field theory for rational function fields, Studies in Algebra and Number Theory, Advances in Math.16, p.173-217, 1979.

[28] Huber R., Étale cohomologie of rigid analytic varieties and adic-spaces, Aspects of Math., Vieweg, 1996.

[29] Jacquet H., Langlands R. P., Automorphic forms on GL(2), LN 114, 1970,
http ://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/JL.html♯book

[30] de Jong J., van der Put M., Étale cohomologie of rigid analytic spaces, Documenta Mathematica, Journal der Deutschen Mathematiker Vereinigung, band 1, 1996.

[31] Kiehl R. Theorem A und B in nichtarchimedischen Funktionentheorie, Inv. Math. 2, p. 256-273, 1967.

[32] Köpf Ursula, Über eingentlische Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Raümen, Münster, 2 Heft 7, 1974.

[33] Milne J.S., Class Field Theory,
http ://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html

[34] Matignon M., Reversat M., Sur les automorphismes continus d'extensions transcendantes valuées, J. r. angw Math. 338, p. 195-215, 1983.

[35] Mumford David, An analytic construction of degenerating curves over complete local fields, Compositio Math. 24, p. 129-174, 1972.

[36] Mumford David, An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compositio Math. 24, p. 239-272, 1972.

[37] Ore O. On a special class of polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 35, p. 559-584, 1933.

[38] Prasad Gopal Strong Approximation for Semi-Simple Groups Over Function fields, Annals of Math., 2nd series, 105, n°3, p. 553-572, 1977.

[39] van der Put M., Discrete Groups, Mumford curves and Theta Functions, Ann. Fac. Sci. Toulouse, sér. 6 vol. 1, p. 399-435, 1992.

[40] Raynaud M., Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl..., Bull. Soc. Math. France, mémoire 39/40, p. 319-327, 1974.

[41] Reversat M., cours de DEA, Bordeaux, 1984-85.

[42] Reversat M., Sur les revêtements de Schottky des courbes modulaires de Drinfeld, Arch. Math. 66, p. 378-387, 1996.

[43] Saïdi M., Moduli schemes of Drinfeld modules, lecture 2 de la référence AB.

[44] Serre J.-P., Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier VI, p.1-42, 1956.

[45] Serre J.-P., Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.

[46] Schilling O.F.G., The Theory of Valuations, Math. Survey IV, A.M.S., 1950.

[47] Tamme G., Introduction to Étale Cohomology, Universitext, Springer-Verlag, 1994.

[48] Tate John, Rigid Analytic Spaces, Invent. Math. 12, p. 257-289, 1971.

[49] Weil André, Dirichlet series and automorphic forms, LN 189, Springer, 1971.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse-Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse 9, France

E-mail address: `marc.reversat@math.univ-toulouse.fr`