Calcul diferenţial pentru funcţii de o variabilă reală

Definiţii şi rezultate

Definiţie. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *uniform continuă* pe D dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in D$ cu $|x' - x''| < \delta$, avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Teorema lui Fermat. Dacă x_0 este punct de extrem (local) pentru funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval, dacă x_0 este punct interior pentru I şi dacă funcţia f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Teoremă. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe intervalul I. Atunci funcţia $f' : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea Darboux.

Teorema lui Rolle. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema lui Cauchy. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii care îndeplinesc condiţiile: f, g sunt continue pe $[a, b]$, f, g sunt derivabile pe $(a, b), g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Formula lui Taylor cu rest Peano. Fie I un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în $x_0 \in I$. Atunci există o funcţie $\omega : I \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \omega(x)(x - x_0)^n, \ \ \forall x \in I.$$

şi

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$$

Notaţie. În cele ce urmează vom folosi notaţia $o(f)$ pentru a desemna o funcţie g (definită într–o vecinătate a lui 0), care are proprietatea că $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

În cazul particular $x_0 = 0$ se obţine formula lui MacLaurin:

$$(*) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o(x^n)$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange. Fie I interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ de $n+1$ ori derivabilă pe I. Atunci pentru x_0 şi $x \in I$ există c între x şi x_0 astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

În cazul particular $x_0 = 0$, se obţine **formula lui MacLaurin** :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$