Şiruri şi serii numerice

Definiţii şi rezultate

Teorema Stolz-Cesaro 1. *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale cu proprietăţile următoare:*

1) $(b_n)_{n\geq 0}$ *este strict monoton şi nemărginit;*

2) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Teorema Stolz-Cesaro 2. *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale cu proprietăţile următoare:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

2) şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ *este strict monoton;*

3) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

Corolar. *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Teoremă. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Atunci, dacă* $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *iar dacă* $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie de numere reale. Şirul $(s_n)_{n\geq 1}$, unde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, se numeşte **şirul sumelor parţiale** ale seriei.

- Dacă există limita şirului $(s_n)_{n\geq 1}$, atunci ea se numeşte **suma seriei**.

- Dacă şirul sumelor parţiale este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, atunci se spune că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este **convergentă** şi se scrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

- Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă se spune că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este **absolut conver-**

gentă.

- O serie care este convergentă, dar nu este absolut convergentă se numeşte serie **semiconvergentă**.

Observaţii. a) Dintr-o serie dată $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se pot obţine alte serii, prin schimbarea ordinei termenilor ($\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijectivă) sau prin asocierea unor termeni ($\sum_{n=1}^{\infty}(a_{f(n)+1} + a_{f(n)+2} + \cdots + a_{f(n+1)})$, unde $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ este o funcţie strict crescătoare). În general, aceste transformări pot schimba suma seriei şi chiar natura seriilor.

În cazul seriilor absolut convergente avem:

Teoremă. *Dacă într-o serie absolut convergentă schimbăm ordinea termenilor sau asociem secvenţe de termeni, seria obţinută are aceeaşi sumă cu seria iniţială.*

În cazul seriilor semiconvergente situaţia este complet diferită după cum arată următoarea:

Teoremă (Riemann). *Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor în aşa fel încât seria să fie divergentă sau să fie convergentă cu suma un număr real arbitrar.*

b) Pentru fiecare număr natural $m \in \mathbb{N}^*$ definim seria rest de ordin m prin $R_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are aceeaşi natură cu orice serie rest a ei.

c) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci şirul $(a_n)_n$ este convergent la zero.

Un criteriu de divergenţă este următorul:

C0. Dacă şirul $(a_n)_n$ nu converge la zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Seria geometrică

Dacă q este un număr real, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ se numeşte seria geometrică de raţie q.

Pentru $q \in (-1, 1)$ seria geometrică este convergentă şi suma ei este $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Pentru $q \geq 1$ seria este divergentă şi are suma ∞.

Pentru $q \leq -1$ seria este divergentă şi nu are sumă.

Seria armonică generalizată

Dacă α este un număr real, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ se numeşte serie armonică generalizată de exponent α.

Pentru $\alpha > 1$ seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ este convergentă şi suma ei se notează $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)$. Funcţia $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţia "zeta" a lui Riemann. Pentru $\alpha \leq 1$ seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este divergentă şi are suma ∞.

Criterii generale de convergenţă

C1. (Criteriul general al lui Cauchy) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ şi orice $p \geq 1$ să avem:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

C2. (Criteriul lui Abel-Dirichlet) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit, iar şirul $(b_n)_n$ este descrescător la zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

C3. (Criteriul lui Abel) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă iar şirul $(b_n)_n$ este monoton şi mărginit, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ este convergentă.

C4. (Criteriul lui Leibniz) Dacă şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi convergent la zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ este convergentă.

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi

În următoarele criterii (C4-C10) termenii seriilor care apar sunt strict pozitivi.

A. Criterii intrinseci

C4. Criteriul raportului (d'Alembert)

a) Dacă există $q \in (0, 1)$ şi $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

C4'. Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci:

a) pentru $l \in [0, 1)$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $l \in (1, \infty)$ seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă;

c) pentru $l = 1$ criteriul este ineficient.

C5. Criteriul radicalului (Cauchy)

a) Dacă există $q \in (0,1)$ şi $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pentru orice $n > N$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă există o infinitate de termeni pentru care $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ atunci seria este divergentă.

C5'. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ atunci:

a) pentru $l \in [0,1)$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $l \in (1,\infty)$ seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă;

c) pentru $l = 1$ criteriul este ineficient.

C6. Criteriul Raabe-Duhamel

a) Dacă există un număr real $c > 1$ şi un număr natural $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq c, \text{ pentru orice } n \geq N,$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă există un număr natural N pentru care

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \text{ pentru orice } n \geq N,$$

atunci seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă.

C6'. Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$ atunci:

a) pentru $l > 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $l < 1$ seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă;

c) pentru $l = 1$ criteriul este ineficient.

Observaţie. În general criteriul Raabe-Duhamel se aplică la serii la care criteriul raportului sau radicalului este ineficient.

C7. Criteriul condensării (Cauchy)

Dacă şirul $(a_n)_n$ este descrescător, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeaşi natură (sunt simultan convergente sau divergente).

B. Criterii de comparaţie

C8. Dacă există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $0 < a_n \leq b_n$ pentru orice $n > N$, atunci:

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

C9. Dacă există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ pentru orice $n > N$, atunci:

a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

b) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

C10. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ atunci:

a) pentru $l \in (0, \infty)$ seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ au aceeaşi natură;

b) pentru $l = 0$ avem implicaţiile:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentă;

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă;

c) pentru $l = \infty$ avem implicaţiile:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentă;

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergentă.

Observaţie. În general pentru a decide natura unei serii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prin criteriul C10 se folosesc pentru comparaţie serii armonice generalizate. Se obţine criteriul 10'.

C10'. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha} a_n = l \in (0, \infty)$$

atunci:

a) pentru $\alpha > 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

b) pentru $\alpha \le 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Produsul Cauchy a două serii

Definiţie. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt două serii, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ cu termenul general $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \cdots + a_n b_1$, $n \ge 1$, se numeşte produsul Cauchy al celor două serii.

Observaţie. În general produsul Cauchy a două serii convergente nu este neapărat o serie convergentă ($a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$).

Teoremă (Mertens). *Dacă seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt convergente, iar una din ele* *este absolut convergentă, atunci produsul lor Cauchy* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *este o serie convergentă şi dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.