**SERIES GENERATRICES**

*Deuxieme Parte:*

**FONCTIONS ARITHMETIQUES ET SERIES DE DIRICHLET**

Cours L3

Printemps 2013

**NOMS**

Leonard EULER (1707 - 1783)

Bernhard RIEMANN (1826 - 1866)

## §1. Fonction zêta de Riemann

**1.1. Définition.**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1.$$

**1.2. Théorème** (Euler).

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Preuve.** Utilisez

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\ x \in \mathbb{C}$$

**1.3. Théorème** (Euler).

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

**Corollaire.** *Il existe un nombre infini de nombres premiers.*

Voici un résultat plus précis:

**1.4. Théorème** (Euler) *Soit $P = \{p_1, p_2, \ldots\}$ l'ensemble de nombres premiers. La série*

$$\sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

*diverge.*

**Preuve.** On va utiliser le fait que

$$H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \gamma + O(1/n),$$

cf. 1.5 ci-dessous.

(En général, il est souvent vrai que

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \sim \int_1^n f(t)dt,$$

cf. §6 ci-dessous.)

Il s'en suit qu'il existe $C$ telle que

$$\log H_n \geq \log\log n - C$$

On a

$$H_n \leq \prod_{i=1}^{\pi(n)} (1 - p_i^{-1})^{-1},$$

d'où

$$\log\log n - C \leq \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{jp_i^j}$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{jp_i^j} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{p_i^j} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \leq C_2,$$

car

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{p^j} = p^{-2}(1 - p^{-1})^{-1} \leq 2/p^2,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_i} \geq \log\log n - C_3$$

□

**1.4. Théorème.** *Lorsque* $s \to 1+$,

(a)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$$

(b)

$$\log\zeta(s) = \log\frac{1}{s-1} + O(s-1)$$

$$\log\zeta(s) = \sum_{p\in P} \frac{1}{p^s} + O(1)$$

(c)

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + O(1)$$

**Preuve.** (a)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_1^{\infty} x^{-s}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})dx$$

Or

$$\int_1^{\infty} x^{-s}dx = \frac{1}{s-1}$$

lorsque $s > 1$. D'un autre côté

$$0 < n^{-s} - x^{-s} = \int_n^x st^{-s-1}dt < s\int_n^{n+1} t^{-2}dt < \frac{s}{n^2}$$

lorsque $n < x < n+1$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}(n^{-s} - x^{-s})dx < s\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2},$$

ce qui entraine (a). □

**1.5. Constante d'Euler - Mascheroni.**

**1.5.1. Lemme.**

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = 1 + \int_1^N \frac{[t]}{t^2}dt$$

**Preuve.**

$$\sum_{n\leq x}^{N}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + 1$$

Or

$$n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \int_n^{n+1}\frac{[t]}{t^2}dt$$

□

Il s'en suit:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \log N + \gamma + E(N)$$

où

$$\gamma = 1 - \int_1^{\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt$$

et

$$E(N) = \int_N^{\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt$$

On a

$$0 \leq \int_1^{\infty}\frac{t-[t]}{t^2}dt \leq \int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt = 1,$$

d'où

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

D'un autre côté

$$0 \leq E(N) \leq \int_N^{\infty}\frac{1}{t^2}dt = 1/N$$

Il s'en suit

**1.6. Théorème.**

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + O(1/N)$$

*où*

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \log m \right) = 0,5772156...$$

□

## §2. Fonctions arithmétiques

**2.1. Fonction d'Euler $\phi(n)$.** Notation: $[1,n] = \{1,\ldots,n\}$.

$$X_n = \{m \in [1,n] |\ (m,n) = 1\}$$

Par définition,

$$\phi(n) = \mathrm{Card}\, X_n$$

Exercice. Calculez $\phi(p^k)$.

**2.2. Théorème.** *Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$ la décomposition en nombres premiers. Alors*

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r}(1 - p^{-1}) = \prod_{p|n}(1 - p^{-1})$$

**Preuve.** Soit

$$E_i = \{m \in [1,n] |\ p_i|m\},\ 1 \le i \le r.$$

Alors

$$\phi(n) = \mathrm{Card}([1,n] \setminus \cup_i E_i)$$

**2.2.1. Formule d'inclusion - exclusion.** *Soient $B_1,\ldots,B_r$ des ensembles finis. Alors*

$$\mathrm{Card}(\cup_{i=1}^{r} B_r) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Card}\, B_i - \sum_{1\le i<j\le r} \mathrm{Card}(B_i \cap B_j) +$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le r} \mathrm{Card}(B_i \cap B_j \cap B_k) - \ldots + (-1)^{r-1}\, \mathrm{Card}(B_1 \cap \ldots \cap B_r)$$

Exercice. □

Remarquons que

$$\mathrm{Card}(E_{i_1} \cap \ldots \cap E_{i_q}) = \frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_q}}$$

Il en découle:

$$\phi(n) = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \ldots =$$
$$= n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

□

**2.2.2. Corollaire.** Si $(m, n) = 1$, $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

**2.3. Fonction de Möbius** $\mu : \mathbb{N}^* \longrightarrow \{0, 1, -1\}$. Par définition

$$\mu(n) = (-1)^r$$

si $n$ est un produit de $r$ facteurs premiers distincts: $n = p_1 \ldots p_r,\ p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. En particulier $\mu(1) = 1$.

S'il existe un premier $p$ tel que $p^2|n$ alors on pose $\mu(n) = 0$.

**2.4. Lemme.**

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

si $n > 1$, et $= 1$ si $n = 1$.

Preuve: exercice.

**2.5. Théorème** (formule d'inversion de Möbius). (a) *Étant données deux fonctions* $f, g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, *alors*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{2.5.1}$$

*ssi*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d). \tag{2.5.2}$$

(b) *Étant données deux fonctions* $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = g(x) = 0$ *pour* $x < 1$, *alors*

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} f(x/n) \tag{2.5.3}$$

*ssi*

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \mu(n) g(x/n). \tag{2.5.4}$$

**Preuve**: voire plus bas, cf. 2.11.

**2.6. Théorème.** (i)

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

(ii)

$$\phi(n) = \sum_{d|n} d\mu(n/d)$$

**Preuve.** (i) Pour $d|n$ soit $Y_d$ l'ensemble de $m \in [1, n]$ tels que $(n, m) = d$. Alors

$$[1, n] = \coprod_{d|n} Y_d$$

Par ailleurs

$$Y_d \overset{\sim}{=} X_{n/d},\ m \mapsto m/d.$$

En effet, les éléments de $Y_d$ sont $dm'$ où $(m', n) = 1$. Donc

$$n = \sum_{d|n} \phi(n/d) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

□

(ii) est une conséquence de (i) et de l'inversion de Möbius. □

**2.7. Fonctions $\sigma_k(n)$.**

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

$$d(n) := \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1;\ \sigma(n) := \sigma_1(n)$$

On remarque que

$$\sigma_k(mn) = \sigma_k(m)\sigma_k(n),$$
$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$$

et

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$$

et si $(m, n) = 1$. Des telles fonctions sont appelées *multiplicatives.*

**2.8. Théorème.** *Si* $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{a_i}$,

$$\sigma_k(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k(a_i+1)} - 1}{p_i^k - 1} \tag{2.8.1}$$

*et*

$$d(n) = \prod_{i=1}^{r} (a_i + 1) \tag{2.8.2}$$

**Preuve.** Les diviseurs de $n$ sont
$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{b_i}, \ 0 \leq b_i \leq a_i,$$
d'où (2.8.2).

Ensuite,
$$\sigma_k(n) = \sum_{b_i \in [0, a_i]} p_1^{kb_1} \ldots p_r^{kb_r} =$$
$$= \prod_{i=1}^{r} (1 + p_i^k + \ldots + p_i^{ka_i}) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k(a_i+1)} - 1}{p_i^k - 1}.$$
□

**2.9. Fonction $\Lambda(n)$.**
$$\Lambda(n) = \log p, \ \text{si } n = p^m, \ m \geq 1, \ = 0 \text{ sinon}$$

**2.10. Théorème.** (a)
$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$
(b)
$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \log d$$

**2.11. Convolution.** Soit $\mathcal{F} = \{f : \ \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}\}$.

Pour $f, g \in \mathcal{F}$ définissons $f * g \in \mathcal{F}$ par
$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d)$$
et $f + g$ par $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$.

Cela munit $\mathcal{F}$ d'une structure d'un anneau commutatif, associatif avec l'unité $u = \delta_1$: $u(1) = 1, u(n) = 0$ pour $n > 1$.

**2.12. Exercice.** (i) Montrez que l'inverse $v = \mu^{-1}$ dans $\mathcal{F}$ est donnée par $v(n) = 1$, tout $n$.

(ii) Pour $f \in \mathcal{F}$, calculez $\mu * f$ et $v * f$ et en déduisez la formule d'inversion de Möbius.

## §3. Séries de Dirichlet

**3.1.** Étant donnée $f \in \mathcal{F}$ on lui associe *une série de Dirichlet*

$$D(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

Ce n'est autre que la transformation de Mellin discrète.

**3.1.1. Exercice.** Montrez que

$$D(f * g) = D(f)D(g) \tag{3.1.1}$$

**3.2. Théorème.** (a)

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \; s > 1$$

(b)

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s}, \; s > 2$$

(c)

$$-\frac{d \log \zeta(s)}{ds} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

**Preuve.** (a) est la conséquence de $v * \mu = u$.

(b) On remarque que

$$\zeta(s-1) = D(w)$$

où $w(n) = n$. Donc (b) est la conséquence de $\phi = w * \mu$, cf. 2.6 (ii). □

**3.3. Théorème.**

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}, \; s > 1$$

**Preuve.** $v * v(n) = d(n)$. □

**3.4. Théorème.**

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}, \; s > 2$$

**Preuve.**

$$v * w = \sigma$$

□

**3.4.1. Exercice.** Montrez que

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s}, \ s > k+1$$

**3.5. Théorème.** *Pour* $f(n), g(n)$ *comme dans* 2.5, *posons*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}.$$

*Alors* (2.5.1) *est équivalente à*

$$G(s) = \zeta(s)F(s),$$

*et* (2.5.2) *est équialente à*

$$F(s) = \frac{G(s)}{\zeta(s)}.$$

Une fonction $f$ est dite *multiplicative* si $f(1) = 1$ et

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

dès que $(m, n) = 1$.

**3.5.1. Théorème.** Si $f$ est multiplicative alors

$$D(f) = \prod_{p \text{ premier}} (1 + f(p)p^{-s} + f(p^2)p^{-2s} + \ldots)$$

**Preuve.** Si

$$n = \prod_i {p_i}^{a_i}$$

est la décomposition en facteurs premiers alors

$$f(n) = \prod_i f({p_i}^{a_i})$$

L'égalité (3.5.1.1) s'en suit. $\square$

**3.6. Théorème.**

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}, \ s > 1.$$

On remarque que

$$q(n) := |\mu(n)| = 1$$

si $n$ est *libre de carrés (quadratferei)*, $= 0$ sinon.

**Preuve.**
$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{1-p^{-s}} = \prod_p (1+p^{-s})$$

Or,
$$1+p^{-s} = 1+q(p)p^{-s}+q(p^2)p^{-2s}+\dots$$
car $q(p^k)=0$ pour $k \geq 2$.

La fonction $q(n)$ est multiplicative, et on applique Thm 3.5.1. $\square$

**Exercice.** Montrez que
$$\sum_{d|n} q(d) = 2^n$$

**3.7. Théorème.** (Ramanujan)
$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)^2}{n^s}, \;\; s>1.$$

**Preuve.**
$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^4} = \prod_p \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^3}$$

**3.7.1. Lemme.**
$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$$

$\square$

Il s'en suit:
$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 p^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s}$$

où
$$a_n = \prod_{i=1}^{b} (a_i+1)^2 = d(n)^2$$

pour $n = \prod_{i=1}^b p_i^{a_i}$. $\square$

Plus généralement,

**3.7. Théorème.** (Ramanujan) *Si* $s, s-a, s-b, s-a-b > 1$,
$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}$$

## §4. Ordre de grandeur des fonctions arithmétiques

Notations:

$f(x) = O(g(x))$ veut dire que $|f(x)| < Ag(x)$

$f(x) = o(g(x))$ veut dire que $f(x)/g(x) \to 0$

$f(x) \sim g(x)$ veut dire que $f(x)/g(x) \to 1$,

lorsque $x \to \infty$.

**4.1. Théorème de nombres premiers.** Soit

$\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$.

Alors

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

C'est un théorème difficile. Vous pouvez consulter [K] pour la preuve.

**Exemples.** Pour $x = 10, 10^6, 10^9$ on a

$$\pi(x) = 168, 78498, 50847478$$

et

$$[x/\log x] = 145, 72382, 48254942$$

**4.2. Théorème.**

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) \sim n \log n$$

[On remarque que

$$\sum_{i=1}^{n} \log i \sim \int_{1}^{n} \log x dx \sim n \log n$$

]

**Preuve.** Considérons le domaine sous l'hyperbole

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0, y > 0, xy \leq n\}$$

et le réseau $L = \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = \mathrm{Card}(D_n \cap L) = \sum_{i=1}^{n} [n/i] =$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + O(n) = n \log n + O(n)$$

où on a utilisé Thm. 1.6 qui dit que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \log n + \gamma + O(1/n).$$

$\square$

***

[Voici une version plus forte de 4.2.

**Théorème.**

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = n \log n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

Ici

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \log n\right)$$

est *la constante d'Euler - Mascheroni.*]

***

**4.3. Lemme.**

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} = O(1/n).$$

**Preuve.**

$$\frac{1}{(i+1)^2} \leq \int_i^{i+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{i^2}.$$

Donc

$$0 \leq \frac{1}{i^2} - \int_i^{i+1} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \leq \frac{c}{i^3}$$

où $c$ ne depend pas de $i$.

Il s'en suit:

$$0 \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leq c \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^3} \leq$$

$$\leq \frac{c}{n} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \frac{c'}{n}.$$

Or

$$\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n},$$

d'où l'assertion. $\square$

**4.4. Théorème.**

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \frac{\pi^2 n^2}{12} + O(n \log n)$$

**Preuve.**

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{(i,j) \in D_n \cap L} j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \le i/n} j =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [n/i]([n/i]+1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (n/i + O(1))^2 =$$

$$= \frac{n^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + O\big(n \sum_{i=1}^{n} 1/i\big) + O(n);$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

et

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = O(1/n)$$

d'aprèz Lemme 4.3.

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} + O(1/n).$$

D'un autre côté

$$\sum_{i=1}^{n} 1/i = O(\log n),$$

cf. 1.6. L'assertion du théorème 4.4 s'en suit. $\square$

**4.5. Théorème.**

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(i) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n)$$

**Preuve.** Rappelons que

$$\phi(m) = \sum_{de=m} \mu(d) e,$$

cf. Th. 2.6 (ii). Il s'en suit:

$$\sum_{m=1}^{n} \phi(m) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{de=m} \mu(d) e = \sum_{de \le n} e \mu(d) =$$

$$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{e=1}^{[n/d]} e = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d)([n/d]^2 + [n/d]) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d)(n^2/d^2 + O(n/d)) = \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n \sum_{d=1}^{n} 1/d) =$$

Or,

$$\frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n^2 \sum_{d=n+1}^{\infty} 1/d^2) = \frac{6}{\pi^2} + O(n)$$

(ici on a encore une fois utilisé Lemme 4.3) et

$$O(n \sum_{d=1}^{n} 1/d) = O(n \log n),$$

et le théorème en découle. □

**4.6. Théorème.**

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(i)| = \frac{6n}{\pi^2} + O(\sqrt{n})$$

On remarque que $\sum_{i=1}^{n} |\mu(i)|$ est le nombre de nombres libres de carrés $\leq n$.

**Preuve.** Soit

$$Q(x) = \sum_{i \leq x} |\mu(i)|$$

Soit $S_d$ l'ensemble de nombres naturels $n \leq y^2$ dont le facteur le plus grand carré est $d^2$. Alors

$$\text{Card}\, S_d = Q(y^2/d^2)$$

et

$$[y^2] = \sum_{d \leq y} Q(y^2/d^2)$$

Il s'en suit

$$Q(y^2) = \sum_{d \leq y} \mu(d)[y^2/d^2] =$$

$$\sum_{d \leq y} \mu(d)(y^2/d^2 + O(1)) = y^2 \sum_{d \leq y} \mu(d)/d^2 + O(y) =$$

$$y^2 \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)/d^2 + O(y^2 \sum_{d>y} d^{-2}) + O(y)$$

Or,

$$\sum_{d>y} d^{-2} = O(1/y)$$

d'après Lemme 4.3.

Il s'en suit que

$$Q(y^2) = \frac{y^2}{\zeta(2)} + O(y).$$

□

# Annexe. NOMBRES DE BERNOULLI

# ET FORMULE D'EULER-MACLAURIN

## §5. Nombres de Bernoulli et formule d'Euler - Maclaurin

**5.1. Nombres de Bernoulli** sont définis par une série génératrice:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

*Exercice.* Montrer que $B_{2n+1} = 0$ pour $n > 0$.

Voici quelques premières valeurs:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

**5.2. Polynômes de Bernoulli.** On définit les polynômes $B_n(t)$ $(n \geq 0)$ par la série génératrice:

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!} \cdot x^n$$

*Exercice.* Montrez que: (i)

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} t^k$$

(ii) $B'_n(t) = nB_{n-1}(t)$

(iii) $B_n(t+1) - B_n(t) = nt^{n-1}$. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{k} i^n = \frac{B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} \tag{5.2.1}$$

Considérez les cas $n = 1, 2$ explicitement.

(iv) $\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} B_m = 0$ pour $n > 1$, ce qui permet de calculer les $B_n$ par recurrence. (Utilisez (iii) avec $t = 0$).

**5.3. Théorème** (Euler).

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!}\cdot \pi^{2n},$$

□

**5.4. Théorème** (Euler - Maclaurin). *Pour tout $f \in \mathbb{R}[x]$ et $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) =$$

$$= \int_0^n f(t)dt + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!}(f^{(2p-1)}(n) - f^{(2p-1)}(0))$$

**Preuve** (ésquise, cf. [W], pp. 258 - 259). Cherchons un polynôme $S(x)$ tel que

$$S(x) - S(x-1) = f(x).$$

Si $D = d/dx$ alors

$$S(x-1) = e^{-D}S(x)$$

donc

$$f(x) = (1 - e^{-D})S(x)$$

Il s'en suit

$$S(x) = (1 - e^{-D})^{-1} = (b_0D^{-1} + b_1 + b_2D + ...)f(x)$$

où les $b_n$ sont définis par la série génératrice

$$\frac{t}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}t^n,$$

i.e. $b_0 = 1, b_1 = 1/2$, $b_n = B_n, n \geq 2$.

Cela donne

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!}f^{(m)}(x) + C$$

La condition supplémentaire $S(0) = 0$ donne la valeur de la constante $C$, et on l'en déduit

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!}(f^{(m)}(x) - f^{(m)}(0))$$

□

## §6. Formule d'Euler - Maclaurin. II.

**6.1.** Étudions maintenant le cas de fonctions pas forcement polynômielles, cf. [AAR], Appendix D.

Soit $f \in C^1([1,\infty))$. On a

$$\frac{1}{2}(f(j)+f(j+1)) = \int_j^{j+1}((x-j-1/2)f(x))'dx$$
$$= \int_j^{j+1} f(x)dx + \int_j^{j+1}(x-j-1/2)f'(x)dx \qquad (6.1.1)$$

En sommant $\sum_{j=1}^n$, il s'en suit:

**6.2. Théorème.**

$$\sum_{j=2}^n f(j) + B_1\cdot(f(n)-f(1)) =$$
$$\sum_{j=2}^{n-1} f(j) + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) = \int_1^n f(x)dx + \int_1^n B_1(x-[x])f'(x)dx$$

*où*

$$B_1(x) = x - 1/2$$

*est le premier polynôme de Bernoulli.* □

**6.3. Formule de Stirling.** Faisons $f(x) = \log x$ dans 6.2:

$$\log n! - (n+1/2)\log n + n = 1 + \int_1^n \frac{B_1(x-[x])}{x}dx$$

**6.3.1. Lemme.** *La limite*

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{B_1(x-[x])}{x}dx$$

*existe et est finie.*

**Preuve: exercice.** Idée: calculez l'intégrale et pour la majorer utilisez qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n > 1$

$$\log(1+1/n) - 1 + 1/n < C/n^2.$$

Notons cette limite par $C - 1$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty}(\log n! - (n+1/2)\log n + n) = C$$

On peut montrer que

$$C = \frac{1}{2}\log 2\pi$$

Donc

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{-1/2}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**6.4.** Plus généralement, si $f \in C^k([1,\infty))$,

$$\sum_{j=2}^{n} f(j) = \int_1^n f(x)dx + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \frac{B_j}{j!} \cdot (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(1))$$
$$+\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_1^n B_k(x-[x])f^{(k^{(j-1)})}(x)dx$$

## Bibliographie


[AAR] G.Andrews, R.Askey, R.Roy, Special functions.

[HW] G.H.Hardy, E.M.Wright, Introduction to the theory of numbers, Chapitres XVI - XVIII.

[K] D.Kazhdan, Lectures on automorphic forms, http://www.ma.huji.ac.il/ kazhdan/automorphic-lectures.html.

[RW] G.-P.Ramis, A.Warusfel, Cours de mathématiques pures et appliquées, Vol. 1, Première Partie, Chapitre 5.

[W] A.Weil, Number theory, An approach through history.